Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2020

1. Vorlesung

Graphen: Eine Einführung

Lehrstuhl für Informatik I

Alexander Wolff

Termine & das Kleingedruckte

Vorlesung per Video:

https://chat.informatik.uni-wuerzburg.de

– Mittwochs, 10:15–11:45, Fragestunde zum Vorlesungsvideo (ifiChat)
Alexander Wolff (Büro 01.001, Gebäude M4, Sprechstunde: Mi, 13–14)
(Termin bitte per Email abmachen, dann Skype o.ä.)

Übungen:

– TutorInnen: Vasil Alistarov, Annika Förster, Lukas Schreiner, Diana Sieper
– Freitags, 8:30 (SE I), 10:15 (SE II), 12:15 (SE I) – **ab 24.4.!**

Übungsaufgaben:

– Bearbeitung in Gruppen von max. je zwei Teilnehmern
– Ausgabe: dienstags via WueCampus
– Abgabe: dienstags, 12:00 Uhr, auf WueCampus (nur pdf)
Bitte möglichst mit LaTeX o.ä. schreiben!

Klausuren (voraussichtlich):

– 1. Termin: 27.07.2018, 12:00–14:00 Uhr, Turing-, Zuse-HS, HS 2
– 2. Termin: 08.10.2018, 10:00–12:00 Uhr, Zuse-HS

2x Anmelden!

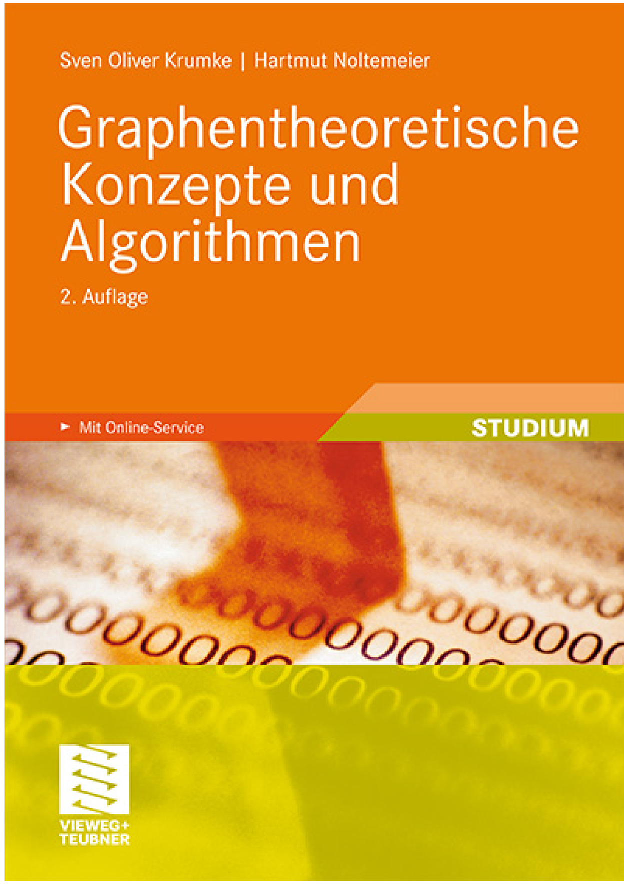
Bitte melden Sie sich *sofort*
– bei WueStudy und
– bei WueCampus an

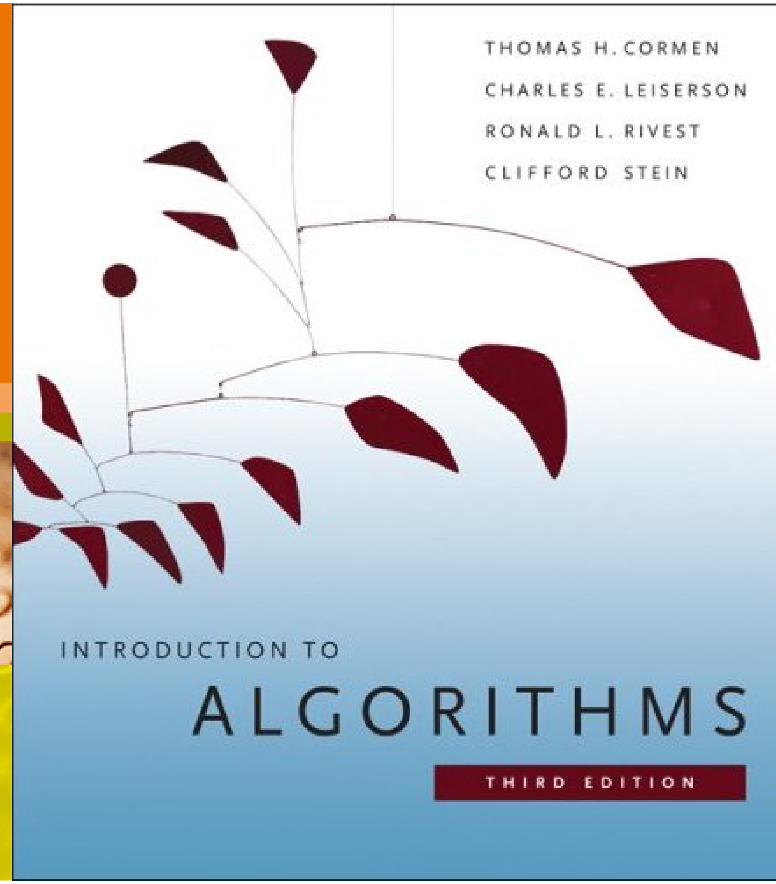
- Übungseinteilung erfolgt über WueStudy
  (Die Übungszeiten sind wichtig, falls Übungen irgendwann wieder offline stattfinden.)

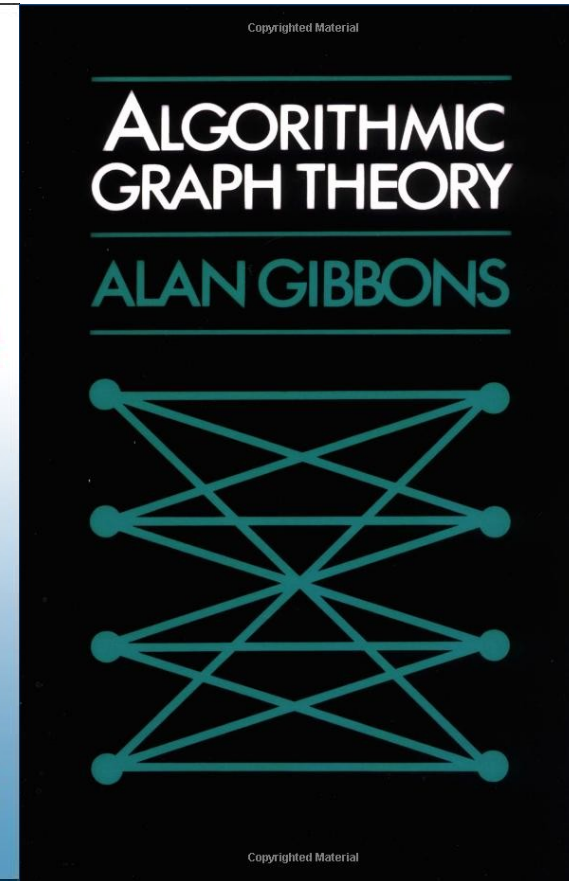
- WueCampus für Kommunikation, z.B. falls eine Übungsaufgabe fehlerhaft oder missverständlich ist.
  (Zum Einschreiben klicken Sie auf das kleine Zahnrad oben links und wählen dann “Mich in diesen Kurs einschreiben”.)

- Wenn Sie sich nicht fristgerecht bei WueStudy anmelden, ist es für uns **unmöglich** Ihre Note zu verbuchen.

Bücher zur Vorlesung







[KN] [CLRS] [G]

Hauptreferenz; elektronische Kopie über die Unibib erhältlich

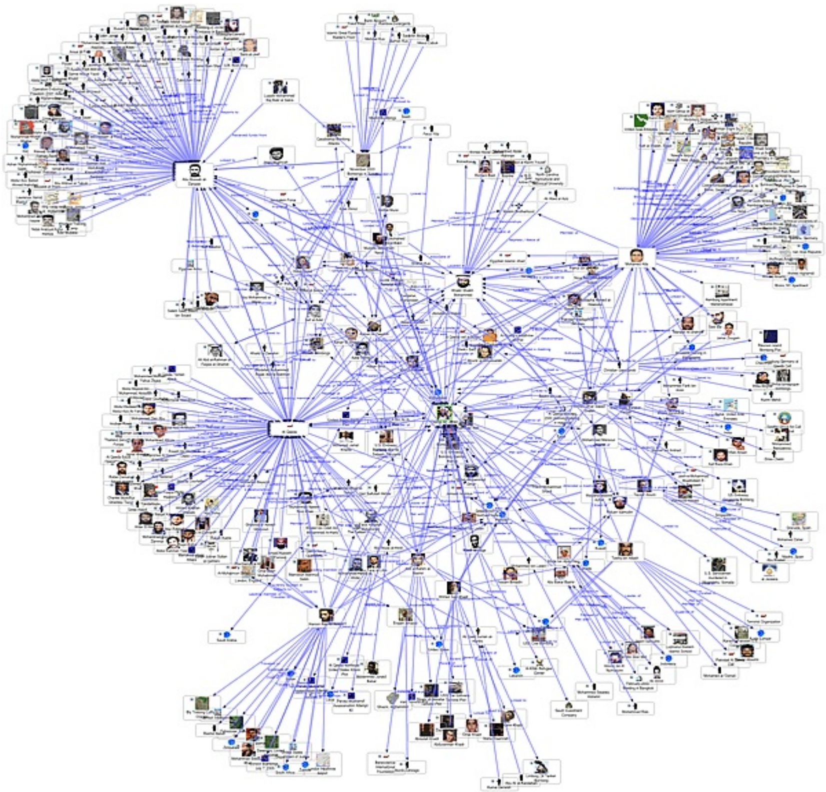
Voraussetzungen

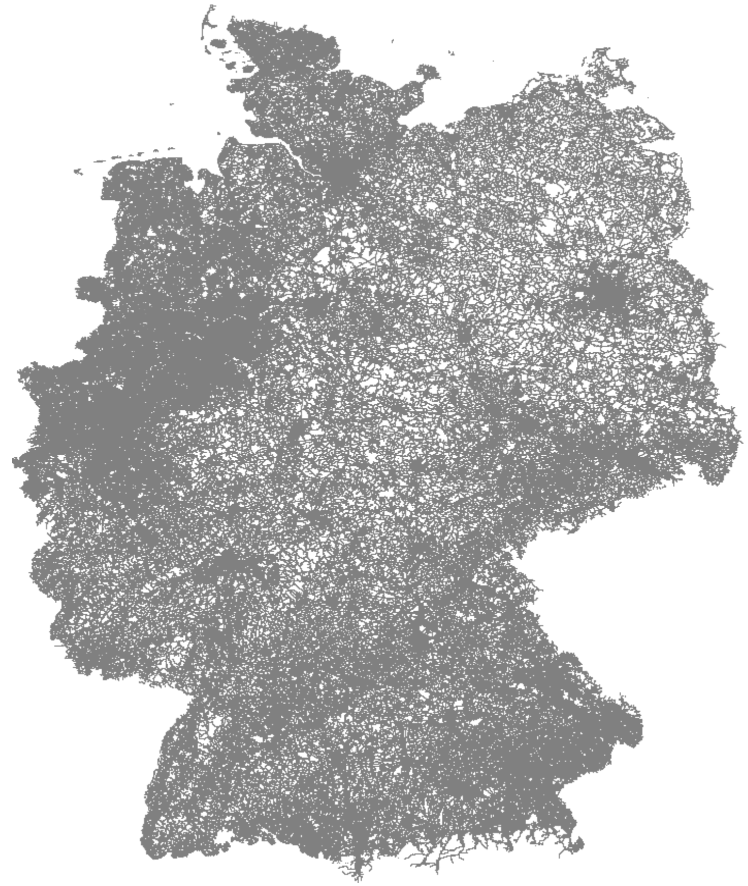
Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

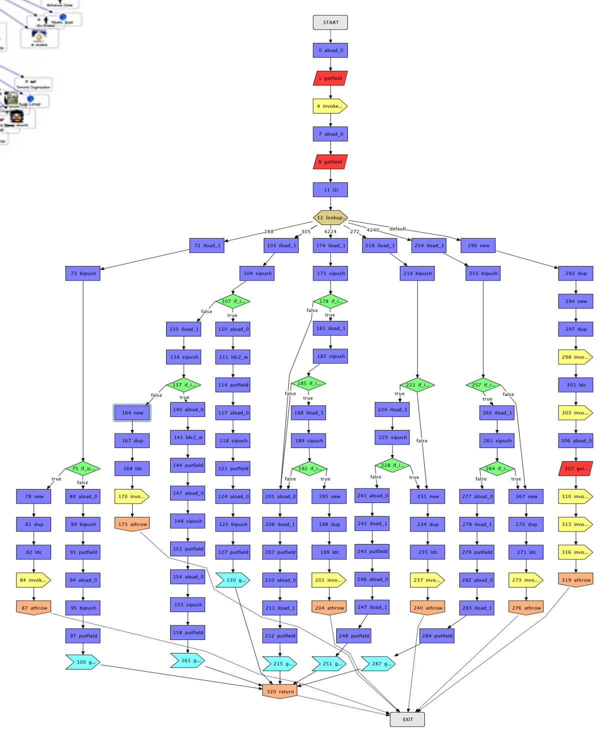
- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche
  - Tiefensuche
- Berechnung kürzester Wege
  - Breitensuche
  - Algorithmus von Dijkstra
- Minimale Spannbäume
  - Algorithmus von Kruskal
  - Algorithmus von Jarník–Prim

Repetitorium in der allerersten Übung

Graphen





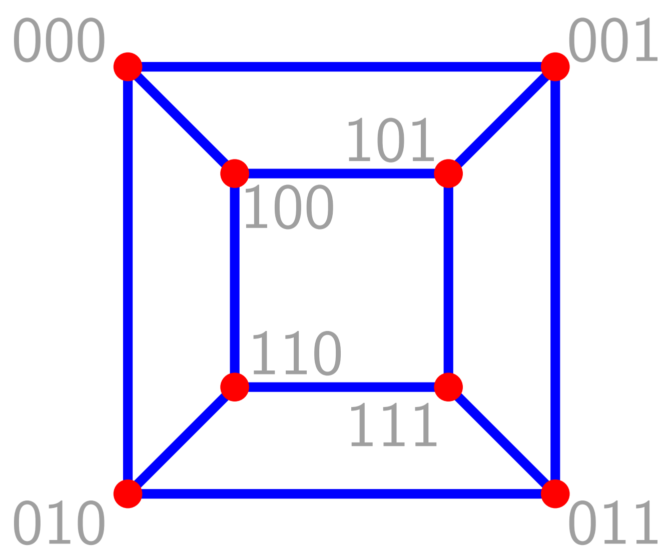


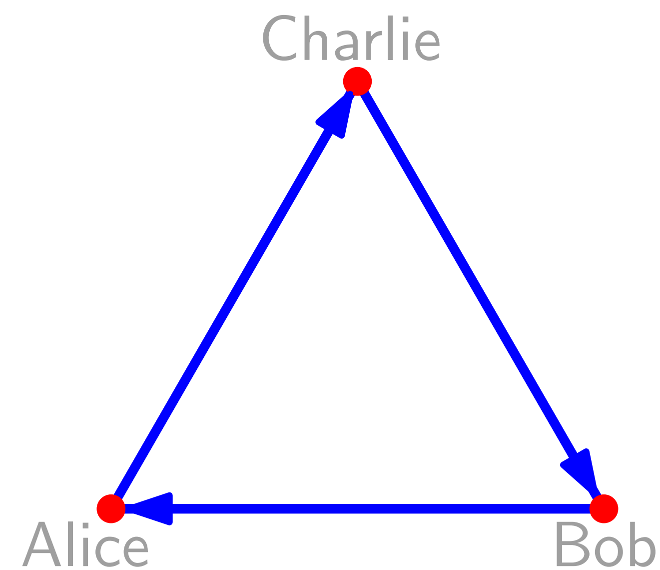
F: Was ist ein Graph?

A_1: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Tupel (V, E), wobei

- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

$V = \{000, 001, \ldots, 111\}$
$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad ?$



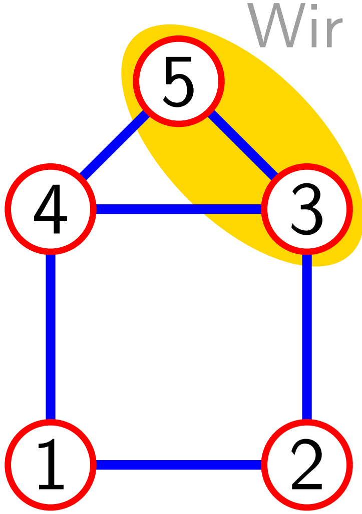


A_2: Ein *gerichteter* Graph ist ein Tupel (V, E), wobei

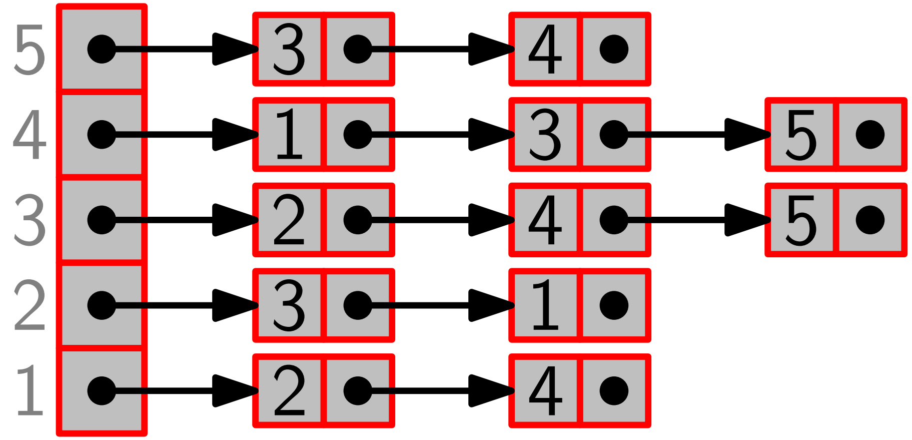
- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq V \times V = \{(u, v) \in V^2 \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



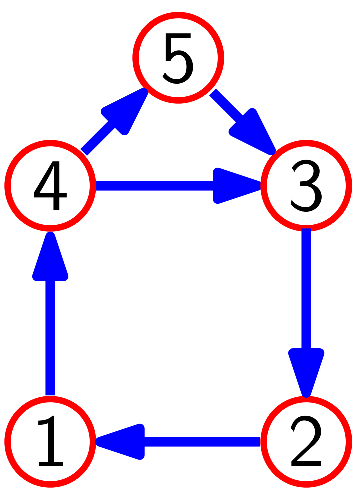
ungerichteter Graph



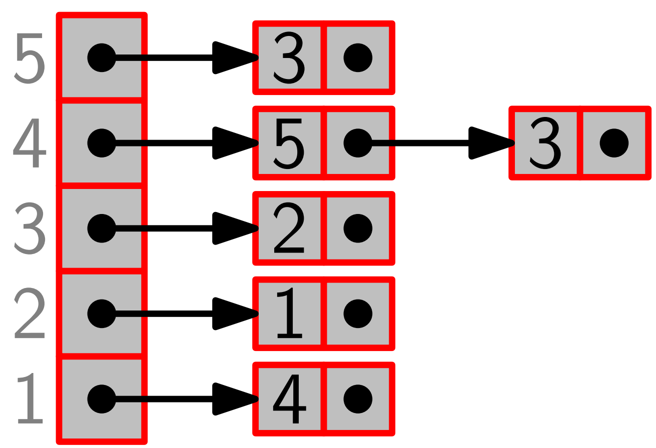
Adjazenzlisten

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Adjazenzmatrix



gerichteter Graph



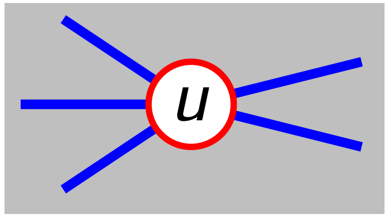
$\mathrm{Adj}[i] = \{j \in V \mid (i,j) \in E\}$

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

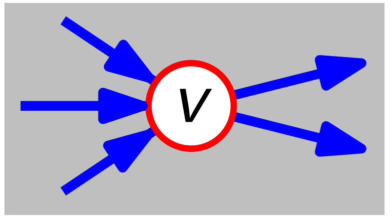
$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i,j) \in E$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

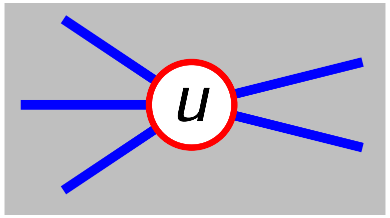
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

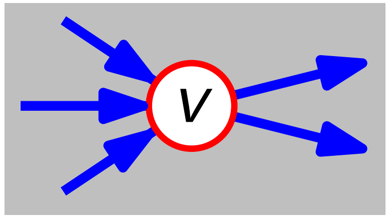
Ein Knoten ist *inzident* zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= \; 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

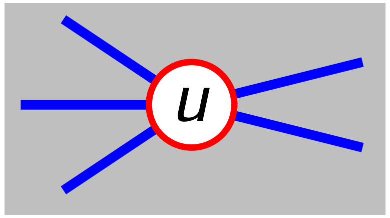
Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg v$

Aus Sicht der Kanten: $\sum_{e \in E} 2 \; = 2 \cdot |E|$

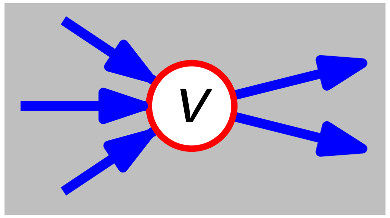
also gleich!

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= \; 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis. $\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg v}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v}_{\textit{gerade!}} + \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v}_{\Rightarrow \; \textit{gerade!}}$

$\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v$ *gerade* $\Rightarrow$ $|V_{\mathrm{ung}}|$ ist *gerade!* $\square$