Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen & Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 23. Juni 2020

Prof. Dr. Alexander Wolff
Diana Sieper, B. Sc.

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2020)

Aufgabe 1 – Linienüberdeckung

Das Problem LINIENÜBERDECKUNG ist wie folgt definiert. Gegeben eine endliche Menge von Punkten in der Ebene, finde eine Menge von Geraden, die die Punkte *überdeckt*, d. h. jeder Punkt muss in mindestens einer Geraden enthalten sein. Sei $k \in \mathbb{N}$. Im Folgenden soll ein FPT-Algorithmus entwickelt werden, der prüft, ob es eine Linienüberdeckung mit Größe k gibt.

a) Erläutern Sie, dass es genügt, nur die Geraden anzuschauen, auf denen mindestens 2 Punkte liegen. **1 Punkt**

b) Beschreiben Sie, wie mit Geraden umzugehen ist, die mehr als k Punkte enthalten. Beschreiben Sie eine leicht zu überprüfende Bedingung dafür, dass es keine zulässige Linienüberdeckung geben kann, falls keine solche Gerade existiert. **2 Punkte**

c) Geben Sie einen FPT-Algorithmus für LINIENÜBERDECKUNG bezüglich des Parameters k in Worten an. Schätzen Sie seine Laufzeit scharf ab. **4 Punkte**

Aufgabe 2 – Größte Clique

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Bei dem Problem GRÖSSTE CLIQUE geht es darum, eine Teilmenge $V' \subseteq V$ zu finden, so dass V' in G eine Clique ist, und es keine größere Clique in G gibt.

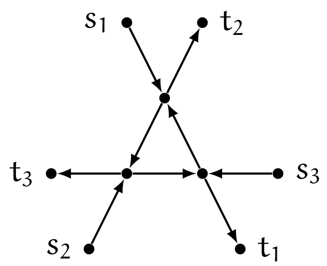
a) Beschreiben Sie einen Brute-Force-Ansatz, der dieses Problem löst, und schätzen Sie seine Laufzeit scharf ab. **2 Punkte**

b) Der Maximalgrad von G sei nun Δ (es gilt also $\Delta = \max_{v \in V} \deg(v)$). Beschreiben Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe von G sowie einem Knoten $v \in V$ die größte Clique findet, an der v beteiligt ist. Dieser Algorithmus muss nicht effizient sein. Schätzen Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus scharf in Abhängigkeit von G und Δ ab. **2 Punkte**

c) Zeigen Sie: GRÖSSTE CLIQUE ist festparameterberechenbar bezüglich des Maximalgrades Δ. **3 Punkte**

Aufgabe 3 – Mehrgüterfluss

Wir betrachten die Verallgemeinerung von Flüssen auf so genannte *Mehrgüterflüsse*, bei denen es mehrere Quellen und Senken geben kann. Gegeben ist auch hier ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$. Statt einer Quelle s und einer Senke t gibt es jetzt aber eine Menge $V_s = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq V$ von Quellen und eine Menge $V_t = \{t_1, \dots, t_k\} \subseteq V$ von Senken.



Das k-Tupel $f = (f_1, \dots, f_k)$ mit $f_i\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $1 \leq i \leq k$, ist ein *zulässiger* Mehrgüterfluss, wenn jedes f_i ein zulässiger s_i-t_i-Fluss ist und $\sum_i f_i(e) \leq c(e)$ für alle Kanten $e \in E$. Der Flusswert eines s_i-t_i-Flusses sei mit $F(f_i)$ bezeichnet. Der Gesamtflusswert ist definiert als $F(f) := \sum_i F(f_i)$.

a) Betrachten Sie den abgebildeten Graphen. Es sei $c(e) = 1$ für alle $e \in E$. Geben Sie den maximalen Gesamtflusswert an (mit Begründung) unter der Bedingung, dass jede Kante einen ganzzahligen Flusswert besitzt. **3 Punkte**

b) Betrachten Sie den abgebildeten Graphen. Es sei $c(e) = 1$ für alle $e \in E$. Geben Sie den maximalen Gesamtflusswert an (mit Begründung), wenn es keine weiteren Bedingungen gibt. **3 Punkte**

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 30. Juni 2020, 12:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim entsprechenden Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller (bis zu 2) BearbeiterInnen an.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit CPLEX gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch. Der Quellcode sollte von der selben Person abgegeben werden, die auch die pdf hochgeladen hat. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, welche BearbeiterIn den Quellcode hochgeladen hat.

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.