Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen & Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 26. Mai 2020

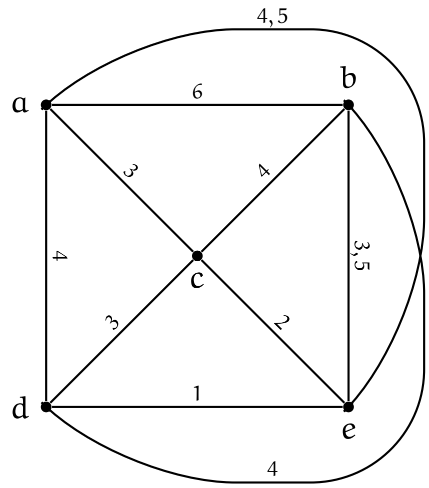
Prof. Dr. Alexander Wolff
Diana Sieper, B. Sc.

6. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2020)

Aufgabe 1 – Christofides' Algorithmus

Gegeben sei folgender vollständiger und ungerichteter Graph G mit Kantengewichten, sodass G metrisch ist.

G:



a) Wenden Sie den Algorithmus von Christofides auf G an, um eine Lösung für das Problem des Handlungsreisenden (TSP) zu finden. Geben Sie bei allen Schritten des Algorithmus genau und nachvollziehbar an, was getan wird. Wie lange ist Ihre gefundene TSP-Tour? **5 Punkte**

b) Christofides' Algorithmus liefert nicht immer eine optimale Lösung, allerdings eine gültige Lösung, die höchstens 3/2 mal die Länge einer optimalen TSP-Tour hat. Geben Sie für G eine TSP-Tour an, die kürzer ist als die von Ihnen gefundene und nicht mit dem Algorithmus von Christofides gefunden werden kann. **1 Punkt**

Aufgabe 2 – Kreise

Ein *Hyperwürfel der Dimension* $d \geq 2$ ist ein Graph $H_d = (V_d, E_d)$ mit der Knotenmenge $V_d = \{0,1\}^d = \{(x_1, \ldots, x_d) \mid x_i \in \{0,1\} \text{ für } i = 1, \ldots, d\}$. Zwei Knoten aus H_d sind benachbart in H_d, wenn sie sich in genau einer Koordinate x_i unterscheiden.

a) Für welche Werte von d besitzt H_d einen *Eulerkreis*? Zeigen Sie, dass Ihre Behauptung korrekt ist. **2 Punkte**

b) Zeigen Sie per Induktion über die Dimension d, dass jeder Hyperwürfel einen *Hamiltonkreis* besitzt. **3 Punkte**

Aufgabe 3 – LP-Runden

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine *Knotenüberdeckung* ist eine Menge $V' \subseteq V$ von Knoten, so dass für jede Kante $e \in E$ mindestens einer der Endknoten in V' enthalten ist. Das Problem eine minimale Knotenüberdeckung (d. h. mit möglichst wenig Knoten) zu finden ist $\mathcal{NP}$-schwer. In der zweiten Vorlesung haben wir diese Modellierung des Problems als ganzzahliges lineares Programm kennengelernt:

$$\begin{array}{rll} \text{Minimiere} & \sum_{v \in V} x_v & \\ \text{Beschränkungen:} & x_u + x_v \geq 1 & \text{für jede Kante } uv \in E \\ & x_v \in \{0, 1\} & \text{für jeden Knoten } v \in V \end{array}$$

CPLEX

a) Implementieren Sie das ganzzahlige lineare Programm aus der Vorlesung in CPLEX. Ihr Modell muss in der Lage sein, beliebige einfache, ungerichtete Graphen aus einer `.dat`-Datei einzulesen und eine minimale Knotenüberdeckung zu finden.

   Entwerfen Sie zunächst ein geeignetes Format, um Graphen in `.dat`-Form zu speichern. Ihr Modell muss dieses Format einlesen und mittels Quantifizierung alle nötigen Constraints erzeugen und so eine optimale Lösung finden können.

   Laden Sie bis zur Abgabefrist dieses Blattes eine Modell- (`.mod`) und eine passende Daten-Datei (`.dat`) in WueCampus hoch. **3 Zusatzpunkte**

   Hinweis: Es steht ein weiterer Teil der CPLEX-Einführung im Kursraum zur Verfügung. Wenn Sie Ihren Code testen, versuchen Sie sich an kleinen Graphen ($|V| \leq 10$) und verifizieren Sie die Lösung von Hand.

Wir betrachten nun die zugehörige LP-Relaxierung, d. h. folgendes lineares Programm:

$$\begin{array}{rll} \text{Minimiere} & \sum_{v \in V} x_v & \\ \text{Beschränkungen:} & x_u + x_v \geq 1 & \text{für jede Kante } uv \in E \\ & 0 \leq x_v \leq 1 & \text{für jeden Knoten } v \in V \end{array}$$

b) Wir betrachten eine optimale Lösung für die LP-Relaxierung. Seien dazu die Mengen $U = \left\{v \in V \mid 0 < x_v < \frac{1}{2}\right\}$ und $W = \left\{v \in V \mid \frac{1}{2} < x_v < 1\right\}$.

   Wir nehmen an, dass $|U| + |W| \geq 1$ und $|W| \geq |U|$ gilt. Zeigen Sie, wie sich in $O(n)$ Zeit eine neue optimale Lösung finden lässt, so dass $|U| + |W|$ kleiner wird. **4 Punkte**

   Hinweis: Suchen sie ein geeignetes $\varepsilon > 0$ und ändern sie manche Werte um ε.

   Für den Fall, dass $|U| + |W| \geq 1$ und $|W| < |U|$ ist, lässt sich ebenfalls eine solche Transformation finden; das müssen Sie hier aber nicht tun.

c) Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus, der eine optimale Lösung für die LP-Relaxierung findet, in der als Variablenwerte nur 0, $\frac{1}{2}$ und 1 vorkommen. Zeigen Sie, dass Ihr Algorithmus korrekt ist und schätzen Sie seine Laufzeit scharf ab. **3 Punkte**

d) Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus, der eine 2-Approximation für eine minimale Knotenüberdeckung liefert. **2 Punkte**

   Hinweis: Runden Sie geschickt.

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 2. Juni 2020, 12:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim entsprechenden Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller (bis zu 2) BearbeiterInnen an.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit $\boxed{\text{CPLEX}}$ gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch. Der Quellcode sollte von der selben Person abgegeben werden, die auch die pdf hochgeladen hat. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, welche BearbeiterIn den Quellcode hochgeladen hat.