Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen & Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 22. April 2020

Prof. Dr. Alexander Wolff
Diana Sieper, B. Sc.

1. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2020)

Aufgabe 1 – Spannbäume & Breitensuche

Begründen Sie jeweils, warum die Behauptung korrekt ist, oder widerlegen Sie die Behauptung anhand eines Gegenbeispiels.

a) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, $s \in V$ und $w(e) = 1$ für alle $e \in E$. Dann ist jeder Breitensuchbaum mit Quelle s ein minimaler Spannbaum von G.
2 Punkte

b) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, $s \in V$ und $w(e) = 1$ für alle $e \in E$. Dann ist jeder minimale Spannbaum von G ein Breitensuchbaum mit Quelle s.
2 Punkte

Aufgabe 2 – Zweifärbbarkeit

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt zweifärbbar, wenn eine Abbildung $c\colon V \to \{\mathrm{red}, \mathrm{blue}\}$ existiert, so dass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt, dass $c(u) \neq c(v)$. In anderen Worten, die Knoten eines zweifärbbaren Graphen können wir so färben, dass keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe bekommen.

a) Welches ist der kleinste Graph (gemessen an der Anzahl der Knoten), der nicht zweifärbbar ist? **2 Punkte**

b) Entwerfen Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ und eine gegebene Färbung c testet, ob es zwei benachbarte Knoten mit derselben Farbe gibt. In diesem Fall soll der Algorithmus *false* ausgeben. Sind alle benachbarten Knoten verschiedenfarbig soll *true* ausgegeben werden. Was ist die asymptotische Worst-Case-Laufzeit des Algorithmus? **3 Punkte**

c) Entwerfen Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ ermittelt, ob er zweifärbbar ist. Die Laufzeit des Algorithmus soll $O(|V| + |E|)$ sein. Beachten Sie, dass der Graph G nicht notwendigerweise zusammenhängend ist. **5 Punkte**

Aufgabe 3 – Schach

Gesucht ist ein Algorithmus, der ermittelt, wieviele Züge man benötigt, um auf einem Schachbrett mit $n \times n$ Feldern einen Springer von Feld (x_1, y_1) zu Feld (x_2, y_2) zu bewegen.

a) Beschreiben Sie, wie Sie das Problem als Kürzeste-Wege-Problem auf einem Graphen modellieren können. Was repräsentieren die Knoten und Kanten des Graphen? **1 Punkt**

b) Ist der Graph zweifärbbar (entsprechend der Definition in Aufgabe 2)? Begründen Sie Ihre Antwort. **1 Punkt**

c) Geben Sie für das gewöhnliche Schachbrett mit 8×8 Feldern die genaue Anzahl der Kanten des Graphen an. **1 Punkt**

d) Geben Sie für ein Schachbrett mit $n \times n$ Feldern eine scharfe obere Schranke für die Anzahl der Kanten an. Verwenden Sie dafür die Groß-O-Notation. **1 Punkt**

e) Geben Sie einen Algorithmus an, der für ein als Graph G gegebenes Schachbrett die erforderliche Anzahl an Zügen in $\Theta(n^2)$ Zeit berechnet. Begründen Sie, warum der Algorithmus diese Laufzeit hat. **2 Punkte**

Aufgabe 4 – Eulerpfade

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die zusammenhängenden, ungerichteten Graphen, die einen Eulerkreis besitzen, genau diejenigen sind, in denen alle Knoten geraden Grad haben. Sie sollen nun eine ähnliche Aussage für Euler-Pfade zeigen. Beweisen Sie dazu die folgende Aussage:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph. Dann gilt: G hat genau dann einen Eulerpfad, wenn die Anzahl an Knoten $v \in V$, für die gilt, dass $deg(v)$ ungerade ist, genau 0 oder 2 ist. **4 Zusatzpunkte**

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 28. April 2020, 12:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim entsprechenden Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller (bis zu 2) BearbeiterInnen an.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!