Teaser: Visualisierung von Graphen

Knickminiminimale orthogonale Zeichnungen

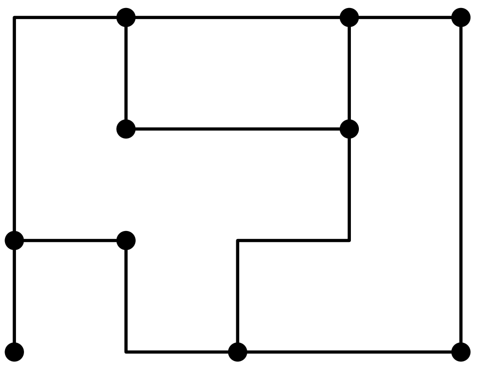
12. Vorlesung (AGT)

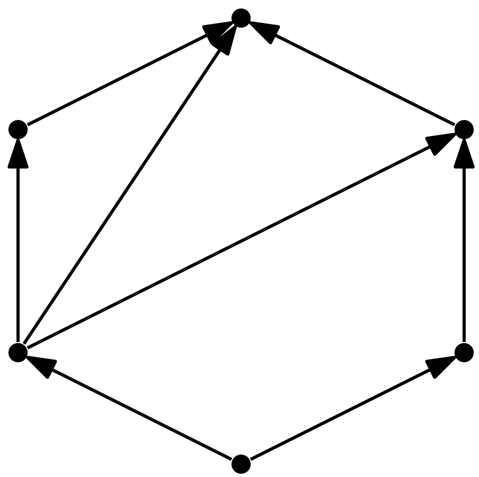
Sommersemester 2019

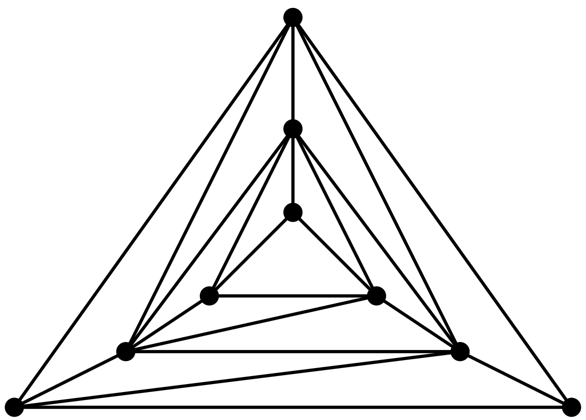
(basierend auf Folien von Martin Nöllenburg und Robert Görke, KIT)

Beispiele für Probleme beim Zeichnen planarer Graphen

- orthogonale Zeichnungen
- aufwärtsgerichtete Zeichnungen für gerichtete azyklische Graphen
- Winkelauflösung in geradlinigen Zeichnungen

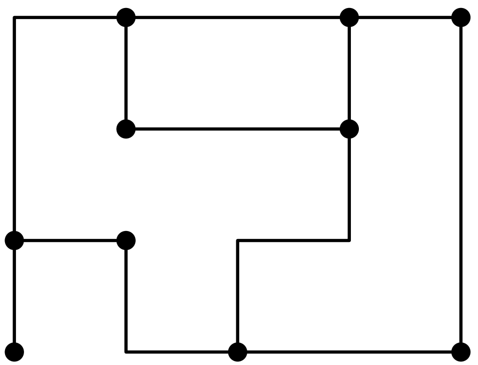


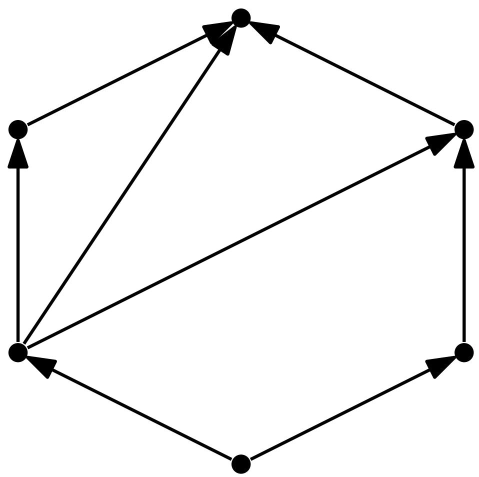


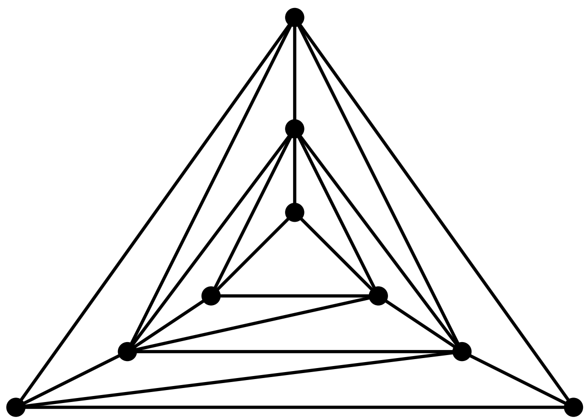


Beispiele für Probleme beim Zeichnen planarer Graphen

- orthogonale Zeichnungen
- aufwärtsgerichtete Zeichnungen für gerichtete azyklische Graphen
- Winkelauflösung in geradlinigen Zeichnungen







→ Modellierung der Probleme durch Flussnetzwerke

Planarität

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar (oder plättbar), wenn es eine Zeichnung Γ von G in die Ebene gibt, in der sich die Zeichnungen von je zwei Kanten nicht schneiden.

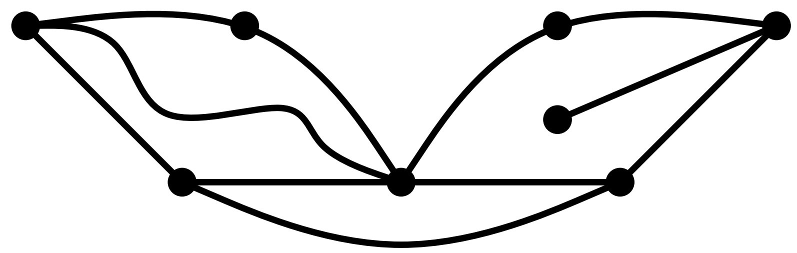
Eine solche Zeichnung Γ heißt eben.

Planarität

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar (oder plättbar), wenn es eine Zeichnung Γ von G in die Ebene gibt, in der sich die Zeichnungen von je zwei Kanten nicht schneiden.

Eine solche Zeichnung Γ heißt eben.

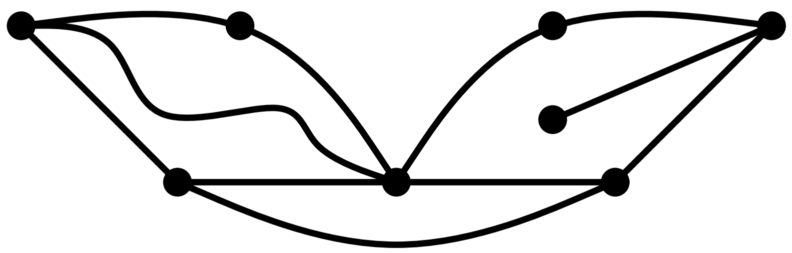


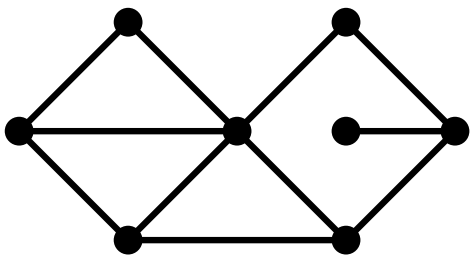
Planarität

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar (oder plättbar), wenn es eine Zeichnung Γ von G in die Ebene gibt, in der sich die Zeichnungen von je zwei Kanten nicht schneiden.

Eine solche Zeichnung Γ heißt eben.



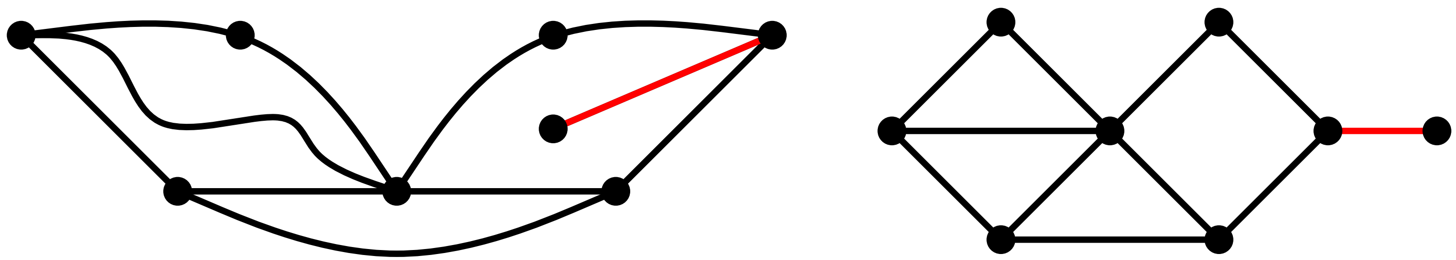


Planarität

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar (oder plättbar), wenn es eine Zeichnung Γ von G in die Ebene gibt, in der sich die Zeichnungen von je zwei Kanten nicht schneiden.

Eine solche Zeichnung Γ heißt eben.

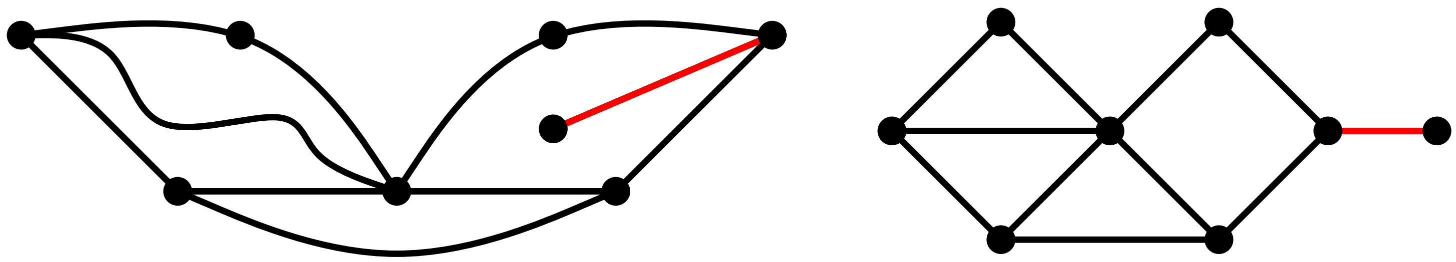


Planarität

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar (oder plättbar), wenn es eine Zeichnung Γ von G in die Ebene gibt, in der sich die Zeichnungen von je zwei Kanten nicht schneiden.

Eine solche Zeichnung Γ heißt eben.



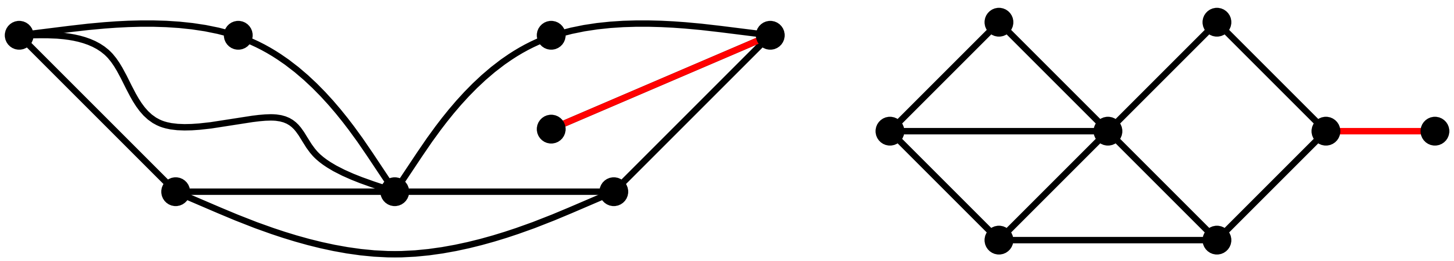
Definition *(kombinatorische) Einbettung*?!

Planarität

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar (oder plättbar), wenn es eine Zeichnung Γ von G in die Ebene gibt, in der sich die Zeichnungen von je zwei Kanten nicht schneiden.

Eine solche Zeichnung Γ heißt eben.



Definition *(kombinatorische) Einbettung*?!

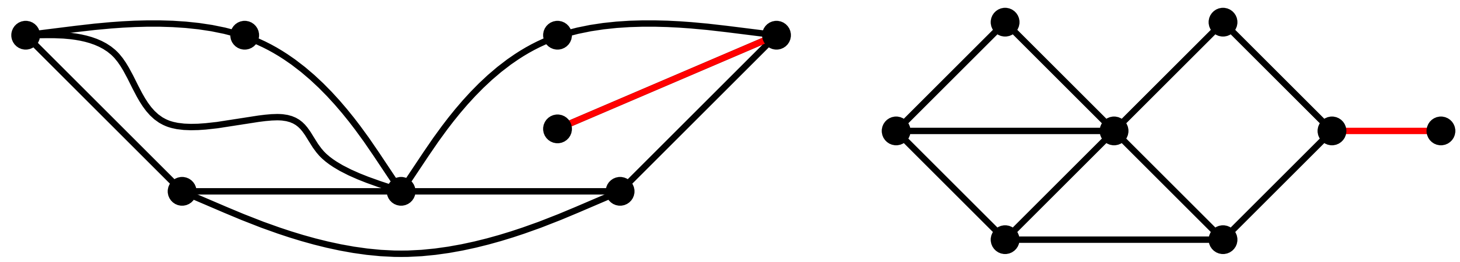
Äquivalenzklasse von Zeichnungen:

Planarität

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar (oder plättbar), wenn es eine Zeichnung Γ von G in die Ebene gibt, in der sich die Zeichnungen von je zwei Kanten nicht schneiden.

Eine solche Zeichnung Γ heißt eben.



Definition *(kombinatorische) Einbettung*?!

Äquivalenzklasse von Zeichnungen: $\Gamma_1 \sim \Gamma_2 \quad :\Leftrightarrow$

für jeden Knoten v gilt: die zu v inzidenten Kanten verlassen v in Γ_1 und Γ_2 in der gleichen zirkulären Reihenfolge.

Knoten, Kanten und *Facetten*

- Jede Zeichnung Γ eines planaren Graphen zerlegt die Ebene in *Facetten*.

Knoten, Kanten und *Facetten*

- Jede Zeichnung Γ eines planaren Graphen zerlegt die Ebene in *Facetten*.
- Die Facetten sind die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.

Knoten, Kanten und *Facetten*

- Jede Zeichnung Γ eines planaren Graphen zerlegt die Ebene in *Facetten*.
- Die Facetten sind die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- $F :=$ Facetten einer geg. planaren Einbettung von G.

Knoten, Kanten und *Facetten*

- Jede Zeichnung Γ eines planaren Graphen zerlegt die Ebene in *Facetten*.
- Die Facetten sind die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- $F :=$ Facetten einer geg. planaren Einbettung von G.
- Was ist der Zusammenhang zwischen $|V|$, $|E|$, $|F| =: f$?

Knoten, Kanten und *Facetten*

- Jede Zeichnung Γ eines planaren Graphen zerlegt die Ebene in *Facetten*.
- Die Facetten sind die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- $F :=$ Facetten einer geg. planaren Einbettung von G.
- Was ist der Zusammenhang zwischen $|V|$, $|E|$, $|F| =: f$?

Eulersche Polyederformel:

$$n - m + f = k + 1,$$

wobei $k =$ Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G.

Knoten, Kanten und *Facetten*

- Jede Zeichnung Γ eines planaren Graphen zerlegt die Ebene in *Facetten*.
- Die Facetten sind die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- $F :=$ Facetten einer geg. planaren Einbettung von G.
- Was ist der Zusammenhang zwischen $|V|$, $|E|$, $|F| =: f$?

Eulersche Polyederformel:

$$n - m + f = k + 1,$$

wobei $k =$ Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G.

Beweis?

s-t Flussnetzwerk

Definition

s-t Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(G = (V, E); s, t; c)$ mit

s-t Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(G = (V, E); s, t; c)$ mit

≫ gerichtetem Graph $G = (V, E)$

s-t Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(G = (V, E); s, t; c)$ mit

- ≫ gerichtetem Graph $G = (V, E)$
- ≫ *Kantenkapazitäten* $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$

s-t Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(G = (V, E); s, t; c)$ mit

- gerichtetem Graph $G = (V, E)$
- *Kantenkapazitäten* $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$
- *Quelle* $s \in V$, *Senke* $t \in V$

s-t Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(G = (V, E); s, t; c)$ mit

- ≫ gerichtetem Graph $G = (V, E)$
- ≫ *Kantenkapazitäten* $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$
- ≫ *Quelle* $s \in V$, *Senke* $t \in V$

Eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-Fluss, falls gilt:

s-t Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(G = (V, E); s, t; c)$ mit

- gerichtetem Graph $G = (V, E)$
- *Kantenkapazitäten* $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$
- *Quelle* $s \in V$, *Senke* $t \in V$

Eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-Fluss, falls gilt:

$$\text{für alle } e \in E\colon \qquad f(e) \leq c(e)$$

$$\text{für alle } v \in V \setminus \{s, t\}\colon \qquad \sum_{vw \in E} f(vw) - \sum_{uv \in E} f(uv) = 0$$

s-t Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(G = (V, E); s, t; c)$ mit

- gerichtetem Graph $G = (V, E)$
- *Kantenkapazitäten* $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$
- *Quelle* $s \in V$, *Senke* $t \in V$

Eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-Fluss, falls gilt:

$$\text{für alle } e \in E\colon \qquad f(e) \leq c(e)$$

$$\text{für alle } v \in V \setminus \{s, t\}\colon \qquad \underbrace{\sum_{vw \in E} f(vw)}_{\text{Ausfluss}_f(v)} - \sum_{uv \in E} f(uv) = 0$$

s-t Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(G = (V, E); s, t; c)$ mit

- ≫ gerichtetem Graph $G = (V, E)$
- ≫ *Kantenkapazitäten* $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$
- ≫ *Quelle* $s \in V$, *Senke* $t \in V$

Eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-Fluss, falls gilt:

$$\text{für alle } e \in E\colon \qquad f(e) \leq c(e)$$

$$\text{für alle } v \in V \setminus \{s, t\}\colon \qquad \underbrace{\sum_{vw \in E} f(vw)}_{\text{Ausfluss}_f(v)} - \underbrace{\sum_{uv \in E} f(uv)}_{\text{Zufluss}_f(v)} = 0$$

s-t Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(G = (V, E); s, t; c)$ mit

- gerichtetem Graph $G = (V, E)$
- *Kantenkapazitäten* $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$
- *Quelle* $s \in V$, *Senke* $t \in V$

Eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-Fluss, falls gilt:

$$\text{für alle } e \in E\colon \qquad f(e) \leq c(e)$$

$$\text{für alle } v \in V \setminus \{s, t\}\colon \qquad \sum_{vw \in E} f(vw) - \sum_{uv \in E} f(uv) = 0$$

$$\text{Überschuss}_f(v) := \text{Ausfluss}_f(v) - \text{Zufluss}_f(v)$$

Allgemeines Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(G = (V, E); l; u; b)$ mit

- gerichtetem Graph $G = (V, E)$
- untere Kantenkapazitäten $l \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
- obere Kantenkapazitäten $u \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$
- Knotenbewertung $b \colon V \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V} b(v) = 0$

Allgemeines Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(G = (V, E); l; u; b)$ mit

- gerichtetem Graph $G = (V, E)$
- untere Kantenkapazitäten $l \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
- obere Kantenkapazitäten $u \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$
- Knotenbewertung $b \colon V \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V} b(v) = 0$

Eine Abbildung $X \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *Fluss*, falls gilt:

für alle $e \in E$: $\quad l(e) \leq X(e) \leq u(e)$

für alle $v \in V$: $\quad \displaystyle\sum_{vw \in E} X(vw) - \sum_{uv \in E} X(uv) = b(v)$

Allgemeines Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(G = (V, E); l; u; b)$ mit

- gerichtetem Graph $G = (V, E)$
- untere Kantenkapazitäten $l \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
- obere Kantenkapazitäten $u \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$
- Knotenbewertung $b \colon V \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V} b(v) = 0$

Eine Abbildung $X \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *Fluss*, falls gilt:

für alle $e \in E$: $\quad l(e) \leq X(e) \leq u(e)$

für alle $v \in V$: $\quad \underbrace{\sum_{vw \in E} X(vw) - \sum_{uv \in E} X(uv)}_{\text{Überschuss}_X(v)} = b(v)$

Fragestellungen auf gegebenem Flussnetzwerk

Gültiger Fluss

Finde gültigen Fluss $X\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, d.h. Kantenbewertung, die

- Kapazitätsschranken respektiert, also $l \leq X \leq u$, und
- Überschuss/Bedarf b genau deckt.

Fragestellungen auf gegebenem Flussnetzwerk

Gültiger Fluss

Finde gültigen Fluss $X\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, d.h. Kantenbewertung, die

- ≫ Kapazitätsschranken respektiert, also $l \leq X \leq u$, und
- ≫ Überschuss/Bedarf b genau deckt.

Zusätzlich gegeben: Kostenfunktion $\mathrm{cost}\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Def. $\mathrm{cost}(X) := \sum_{e \in E} \mathrm{cost}(e) \cdot X(e)$

Fragestellungen auf gegebenem Flussnetzwerk

Gültiger Fluss

Finde gültigen Fluss $X\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, d.h. Kantenbewertung, die

- ≫ Kapazitätsschranken respektiert, also $l \leq X \leq u$, und
- ≫ Überschuss/Bedarf b genau deckt.

Zusätzlich gegeben: Kostenfunktion $\mathrm{cost}\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Def. $\mathrm{cost}(X) := \sum_{e \in E} \mathrm{cost}(e) \cdot X(e)$

Minimalkostenflussproblem

Finde einen gültigen Fluss $X\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, der

- ≫ $\mathrm{cost}(X)$ minimiert (unter allen gültigen Flüssen)

Fragestellungen auf gegebenem Flussnetzwerk

Gültiger Fluss

Finde gültigen Fluss $X \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, d.h. Kantenbewertung, die
- $\gg$ Kapazitätsschranken respektiert, also $l \leq X \leq u$, und
- $\gg$ Überschuss/Bedarf b genau deckt.

Zusätzlich gegeben: Kostenfunktion $\mathrm{cost} \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Def. $\mathrm{cost}(X) := \sum_{e \in E} \mathrm{cost}(e) \cdot X(e)$

Minimalkostenflussproblem

Finde einen gültigen Fluss $X \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, der
- $\gg$ $\mathrm{cost}(X)$ minimiert (unter allen gültigen Flüssen)

Laufzeit im Allgemeinen $O(n^2 m^3 \log n)$

Netz planar, Kantenkosten $\leq c$, Facettengrade $\leq d$ $O(c\sqrt{d} \cdot n^{3/2})$

[Cornelsen & Karrenbauer, JGAA'12]

(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$

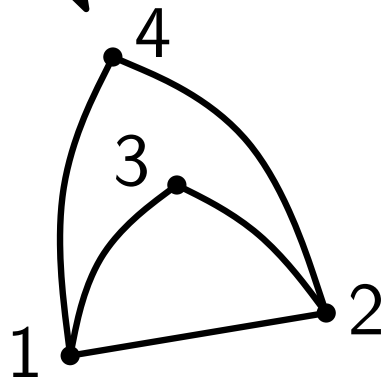
(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$

Kreuzungsminimierung

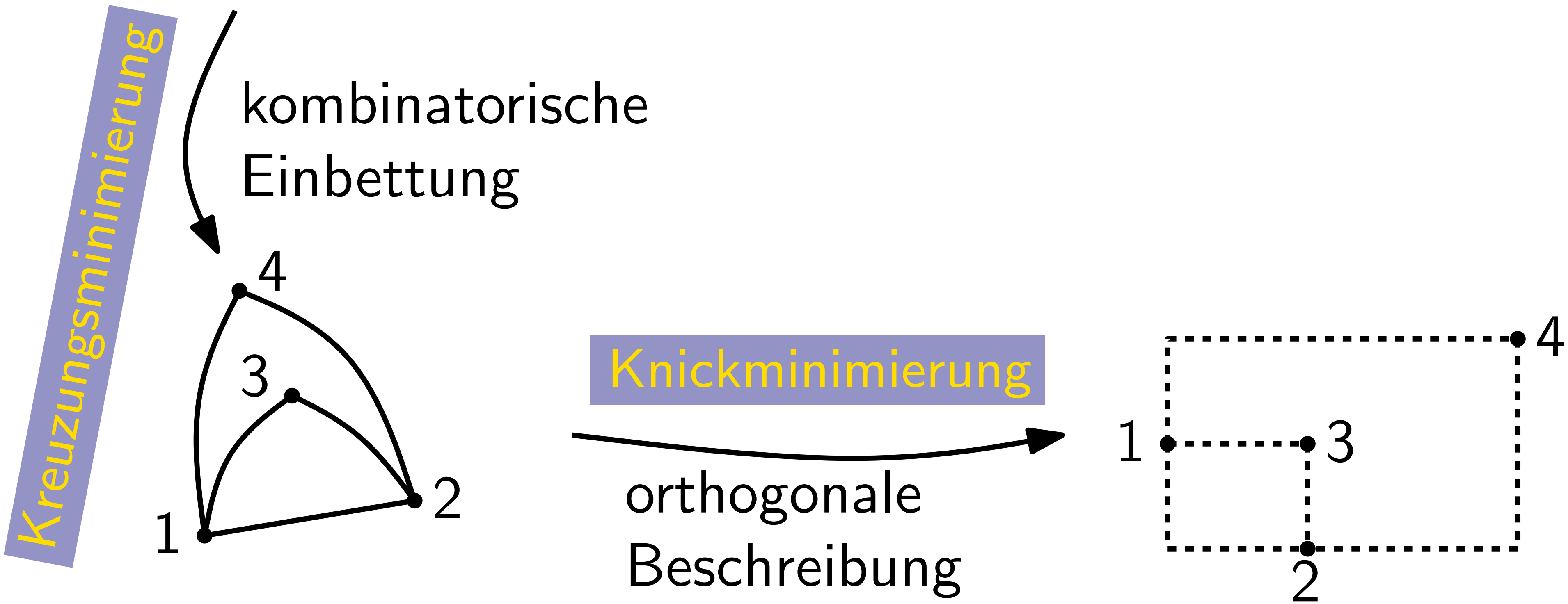
kombinatorische Einbettung



(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

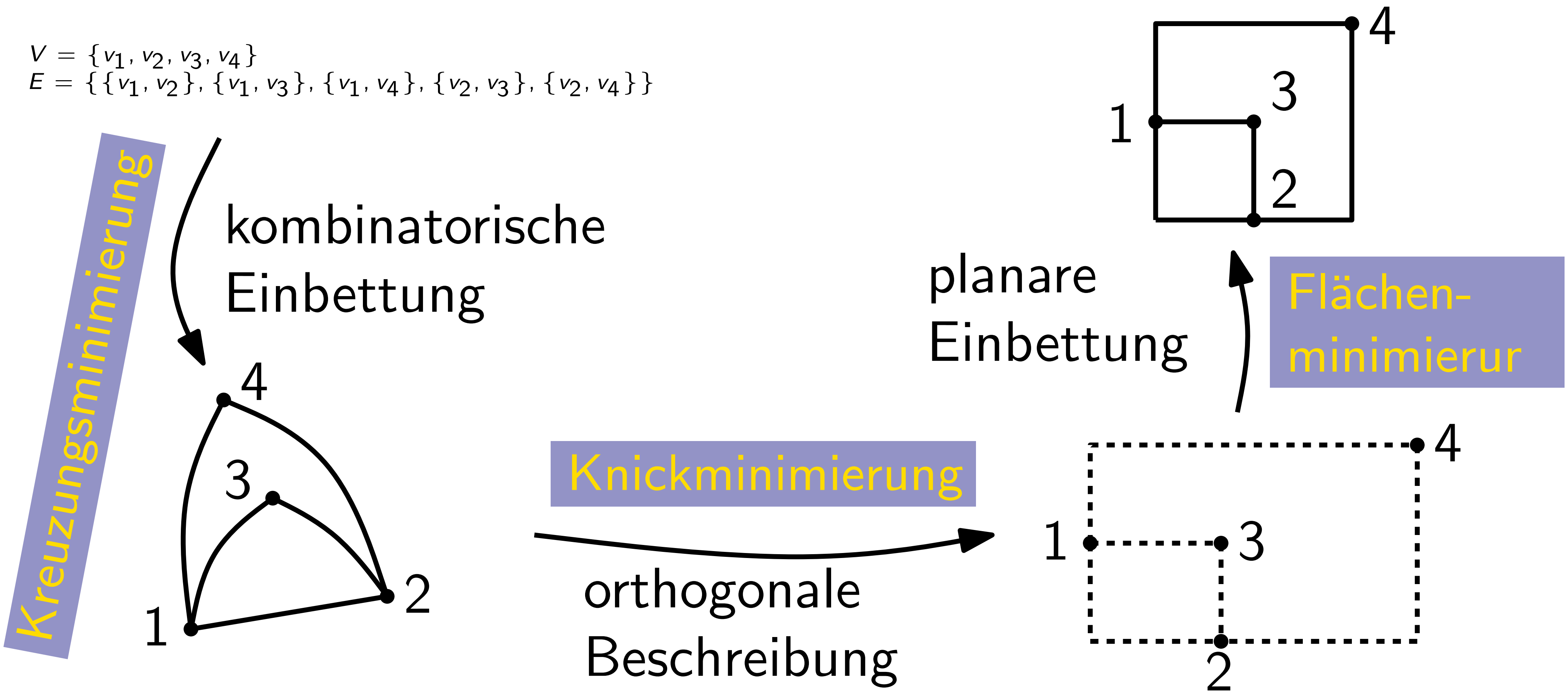
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$



(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

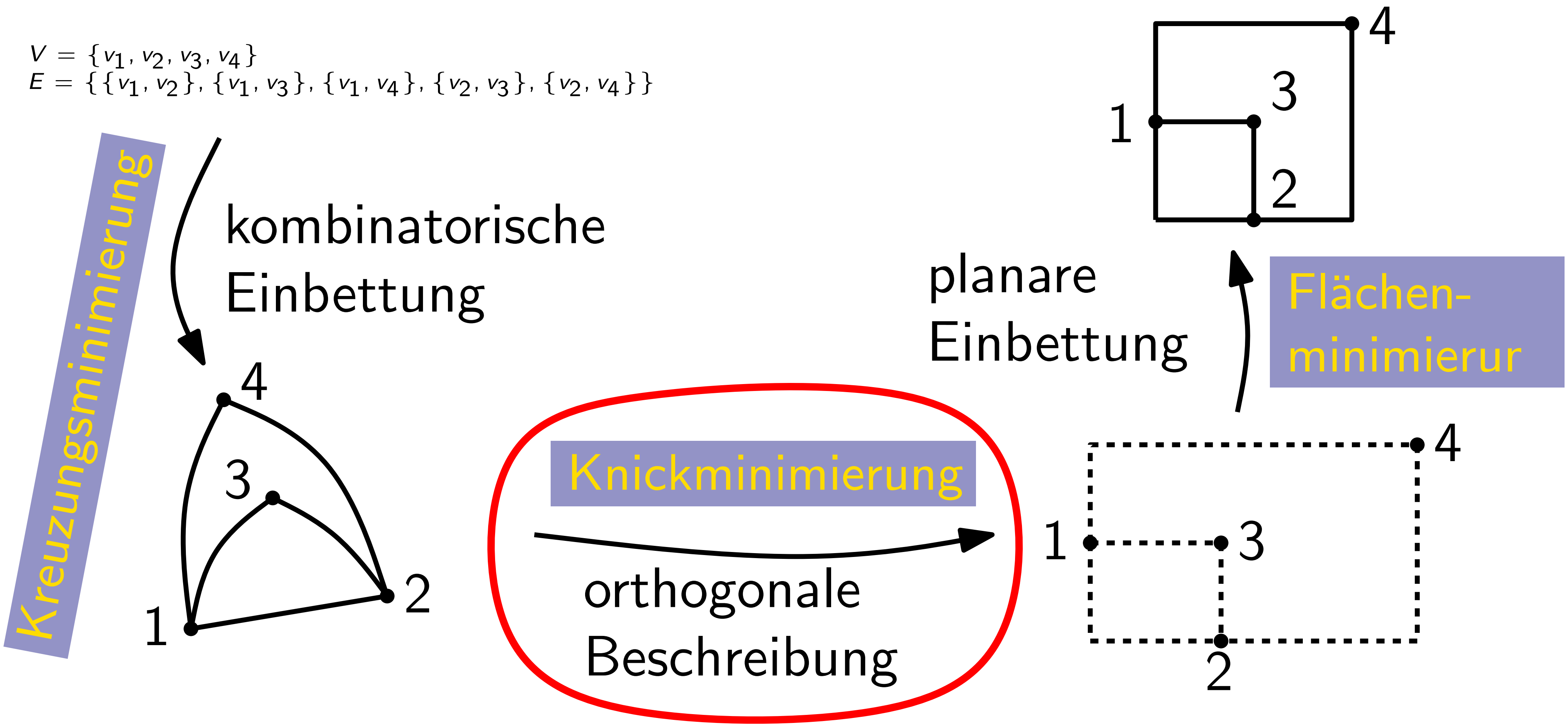
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$



(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$



Das Problem

Problem 2: Knickminimierung mit fester Einbettung

Gegeben	Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\Delta \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0,
finde	orthogonale Gitterzeichnung, die $(\mathcal{F}, f_0)$ erhält und minimale Knickanzahl hat.

Das Problem

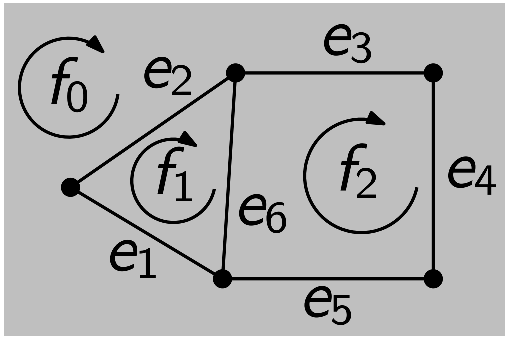
Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben	Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\Delta \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0,
finde	orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F}, f_0)$ erhält und minimale Knickanzahl hat.

Orthogonale Beschreibung

Eingabe: $G = (V, E)$ planar, $\mathcal{F}$, f_0
Ausgabe: orthogonale Beschreibung $H(G) = \{H(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$

Beispielgraph $\boldsymbol{G}$:

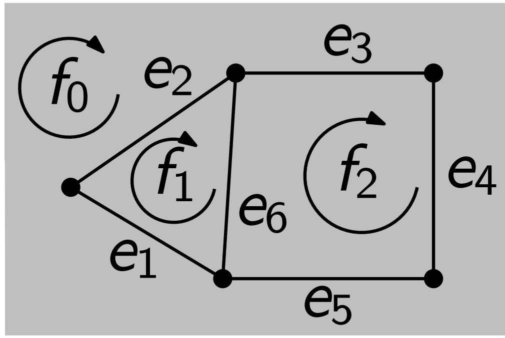


Orthogonale Beschreibung

Eingabe: $G = (V, E)$ planar, $\mathcal{F}$, f_0
Ausgabe: orthogonale Beschreibung $H(G) = \{H(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$

Facettenbeschreibung $H(f)$:
im UZS geordnete Folge v. Kantenbeschreibungen (e, δ, α) mit

Beispielgraph G:



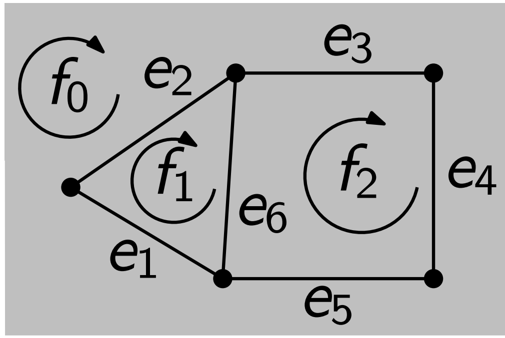
$H(G)$:
$H(f_1) = ((e_1, 00, \frac{3\pi}{2}),$

Orthogonale Beschreibung

Eingabe: $G = (V, E)$ planar, $\mathcal{F}$, f_0
Ausgabe: orthogonale Beschreibung $H(G) = \{H(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$

Facettenbeschreibung $H(f)$:
im UZS geordnete Folge v. Kantenbeschreibungen (e, δ, α) mit
≫ e ist Randkante von f

Beispielgraph G:



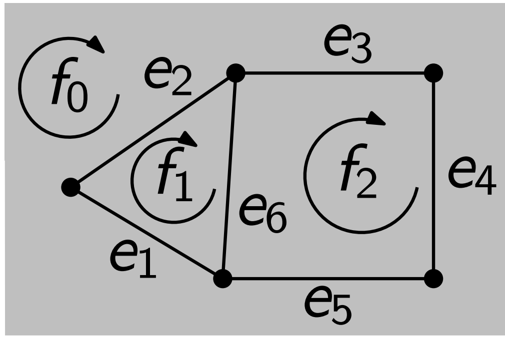
$H(G)$:
$H(f_1) = ((e_1, 00, \frac{3\pi}{2}),$

Orthogonale Beschreibung

Eingabe: $G = (V, E)$ planar, $\mathcal{F}$, f_0
Ausgabe: orthogonale Beschreibung $H(G) = \{H(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$

Facettenbeschreibung $H(f)$:
im UZS geordnete Folge v. Kantenbeschreibungen (e, δ, α) mit
- e ist Randkante von f
- δ ist 0-1-Folge (0 = Rechtsknick, 1 = Linksknick)

Beispielgraph G:



$H(G)$:
$H(f_1) = ((e_1, 00, \frac{3\pi}{2}),$

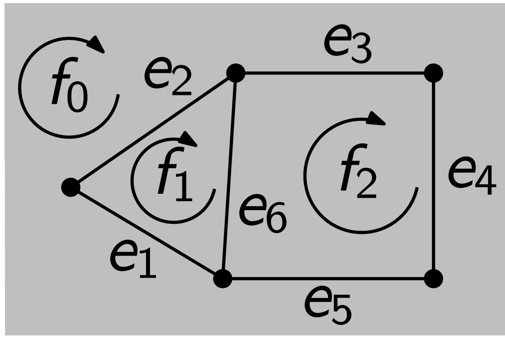
Orthogonale Beschreibung

Eingabe: $G = (V, E)$ planar, $\mathcal{F}$, f_0
Ausgabe: orthogonale Beschreibung $H(G) = \{H(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$

Facettenbeschreibung $H(f)$:
im UZS geordnete Folge v. Kantenbeschreibungen (e, δ, α) mit

- e ist Randkante von f
- δ ist 0-1-Folge (0 = Rechtsknick, 1 = Linksknick)
- α ist Winkel $\in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ zwischen e und Nachfolger e'

Beispielgraph G:



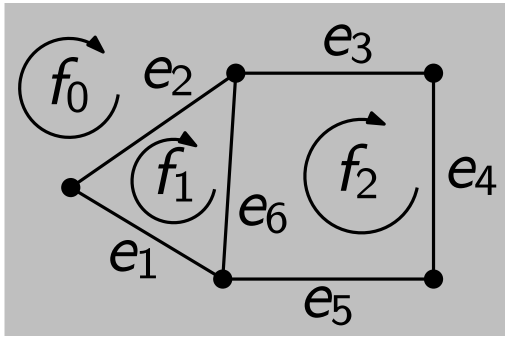
$H(G)$:
$H(f_1) = ((e_1, 00, \frac{3\pi}{2}),$

Orthogonale Beschreibung

Eingabe: $G = (V, E)$ planar, $\mathcal{F}$, f_0
Ausgabe: orthogonale Beschreibung $H(G) = \{H(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$

Facettenbeschreibung $H(f)$:
im UZS geordnete Folge v. Kantenbeschreibungen (e, δ, α) mit
- $\gg$ e ist Randkante von f
- $\gg$ δ ist 0-1-Folge (0 = Rechtsknick, 1 = Linksknick)
- $\gg$ α ist Winkel $\in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ zwischen e und Nachfolger e'

Beispielgraph G:



$H(G)$:

$H(f_1) = ((e_1, 00, \frac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$

$H(f_2) = ((e_5, 000, \frac{\pi}{2}), (e_6, 11, \frac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$

$H(f_0) = ((e_1, 11, \frac{\pi}{2}), (e_5, 111, \frac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$

Orthogonale Beschreibung

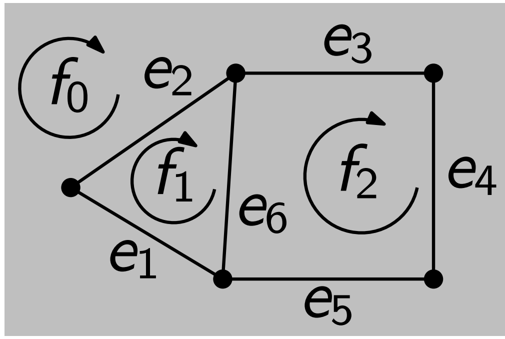
Eingabe: $G = (V, E)$ planar, $\mathcal{F}$, f_0
Ausgabe: orthogonale Beschreibung $H(G) = \{H(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$

Facettenbeschreibung $H(f)$:
im UZS geordnete Folge v. Kantenbeschreibungen (e, δ, α) mit

- e ist Randkante von f
- δ ist 0-1-Folge (0 = Rechtsknick, 1 = Linksknick)
- α ist Winkel $\in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ zwischen e und Nachfolger e'

f_0 falsch rum!?

Beispielgraph G:



$H(G)$:

$H(f_1) = ((e_1, 00, \frac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$

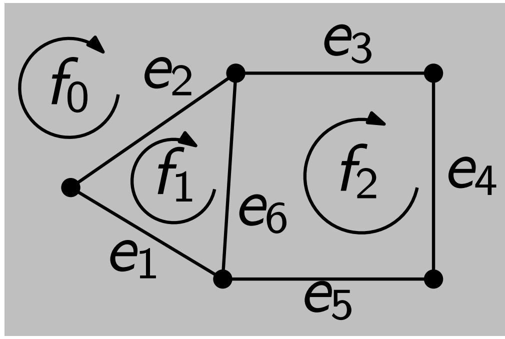
$H(f_2) = ((e_5, 000, \frac{\pi}{2}), (e_6, 11, \frac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$

$H(f_0) = ((e_1, 11, \frac{\pi}{2}), (e_5, 111, \frac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$

Beispiel: Orthogonale Beschreibung

Aufgabe: Finde eine orthogonale Zeichnung von G gemäß der orthogonalen Beschreibung $H(G)$!

Beispielgraph $\boldsymbol{G}$



$\boldsymbol{H(G)}$:

$H(f_1) = ((e_1, 00, \frac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$

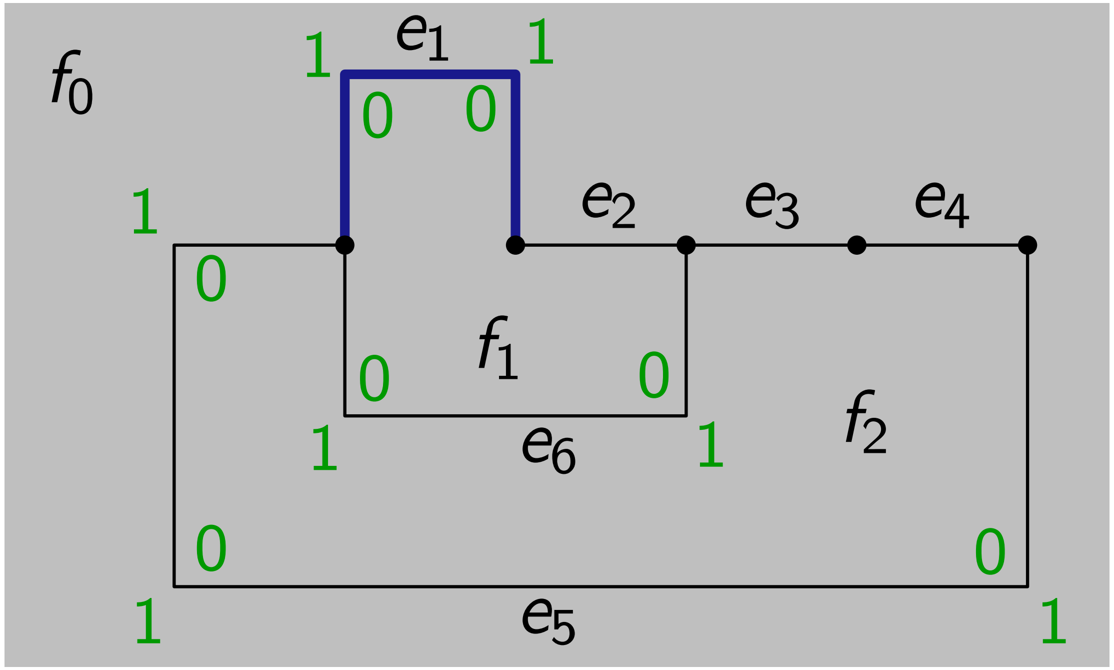
$H(f_2) = ((e_5, 000, \frac{\pi}{2}), (e_6, 11, \frac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$

$H(f_0) = ((e_1, 11, \frac{\pi}{2}), (e_5, 111, \frac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$

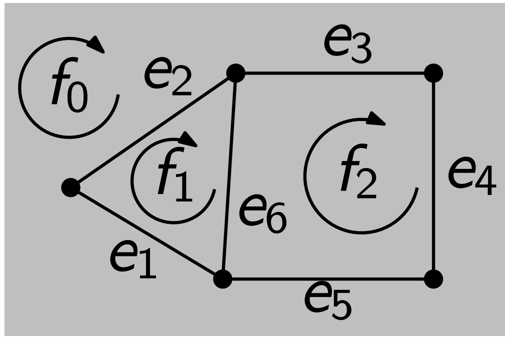
Beispiel: Orthogonale Beschreibung

Aufgabe: Finde eine orthogonale Zeichnung von G gemäß der orthogonalen Beschreibung $H(G)$!

Lösung:



Beispielgraph $\boldsymbol{G}$



$\boldsymbol{H(G)}$:

$H(f_1) = ((e_1, 00, \frac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$

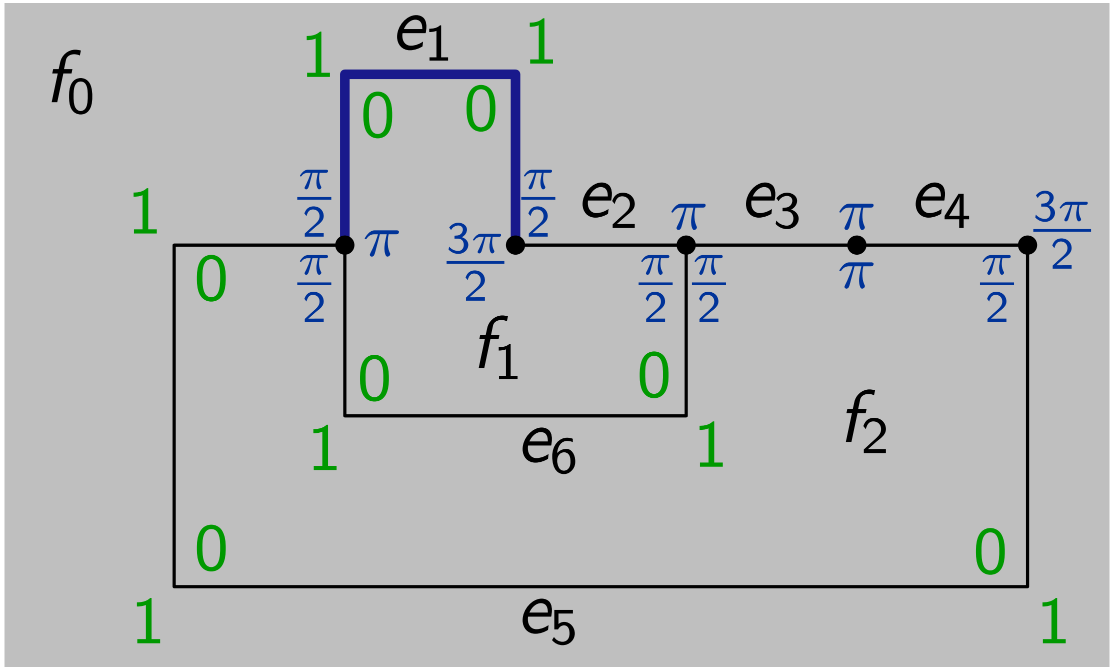
$H(f_2) = ((e_5, 000, \frac{\pi}{2}), (e_6, 11, \frac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$

$H(f_0) = ((e_1, 11, \frac{\pi}{2}), (e_5, 111, \frac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$

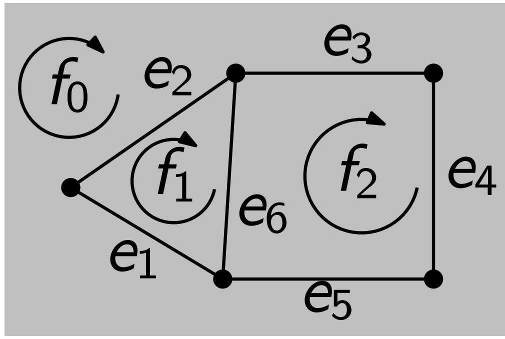
Beispiel: Orthogonale Beschreibung

Aufgabe: Finde eine orthogonale Zeichnung von G gemäß der orthogonalen Beschreibung $H(G)$!

Lösung:



Beispielgraph G



$\boldsymbol{H(G)}$:

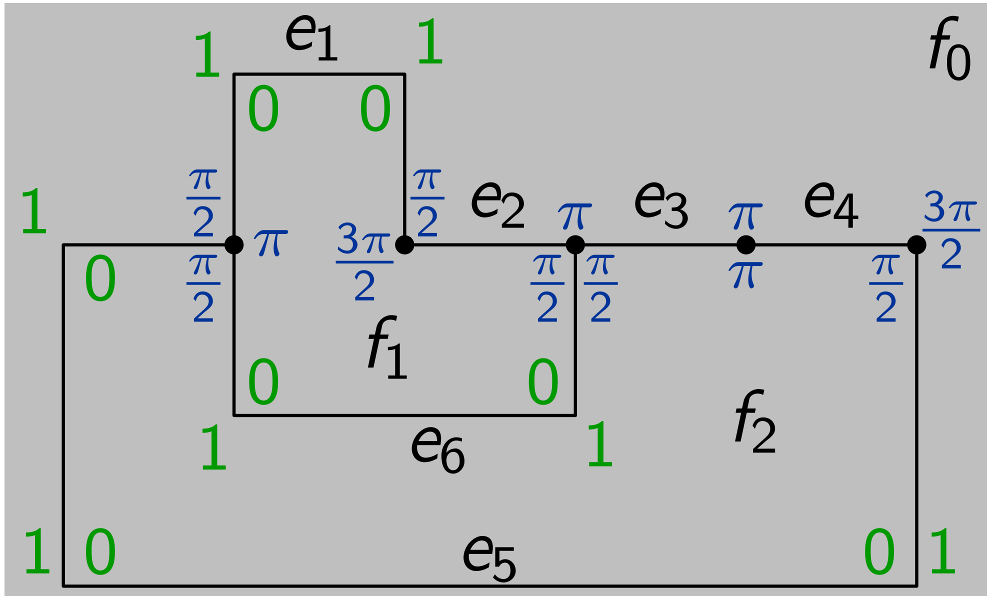
$H(f_1) = (\boxed{(e_1, 00, \frac{3\pi}{2})}, (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$

$H(f_2) = ((e_5, 000, \frac{\pi}{2}), (e_6, 11, \frac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$

$H(f_0) = ((e_1, 11, \frac{\pi}{2}), (e_5, 111, \frac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$

Zulässige orthogonale Beschreibungen

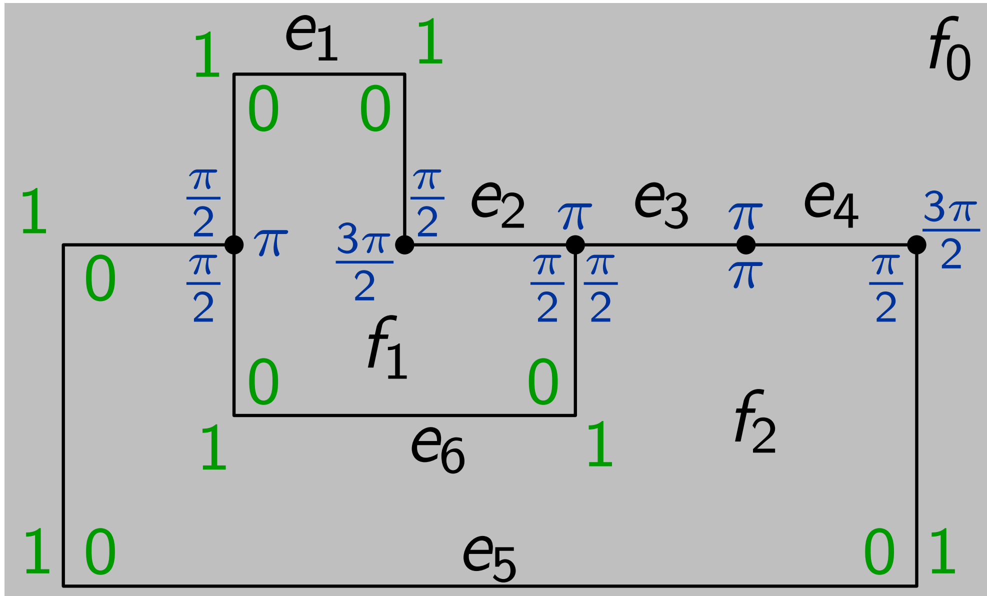
H1) $H(G)$ entspricht $(\mathcal{F}, f_0)$.



Zulässige orthogonale Beschreibungen

H1) $H(G)$ entspricht $(\mathcal{F}, f_0)$.

H2) Für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $(uv, \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $(vu, \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt: δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2.



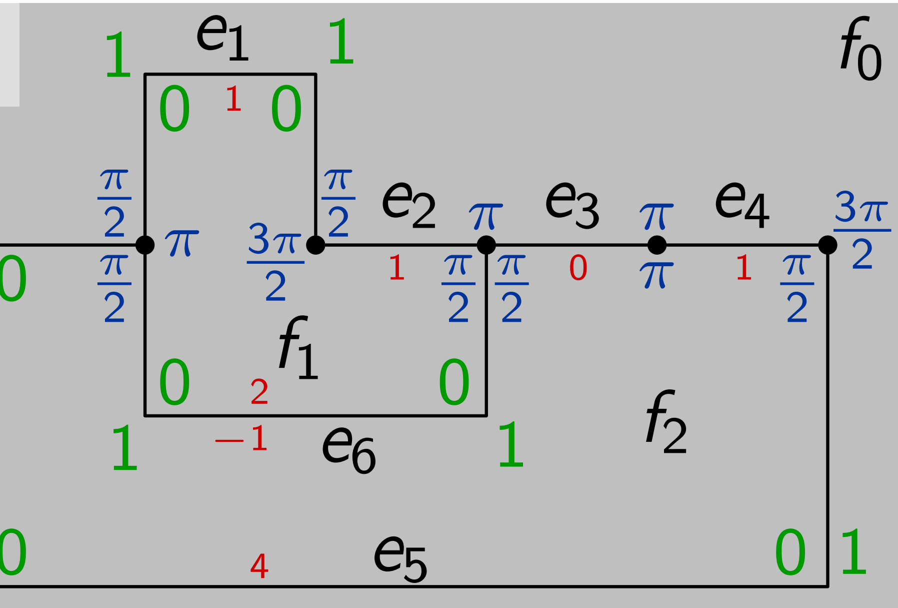
Zulässige orthogonale Beschreibungen

H1) $H(G)$ entspricht $(\mathcal{F}, f_0)$.

H2) Für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $(uv, \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $(vu, \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt: δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2.

H3) Seien $|\delta|_0$ und $|\delta|_1$ die Anzahlen Nullen bzw. Einsen in δ. Sei $r = (e, \delta, \alpha)$. Für $C(r) := |\delta|_0 - |\delta|_1 + 2 - \alpha / \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\sum_{r \in H(f)} C(r) = \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0 \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases}$$



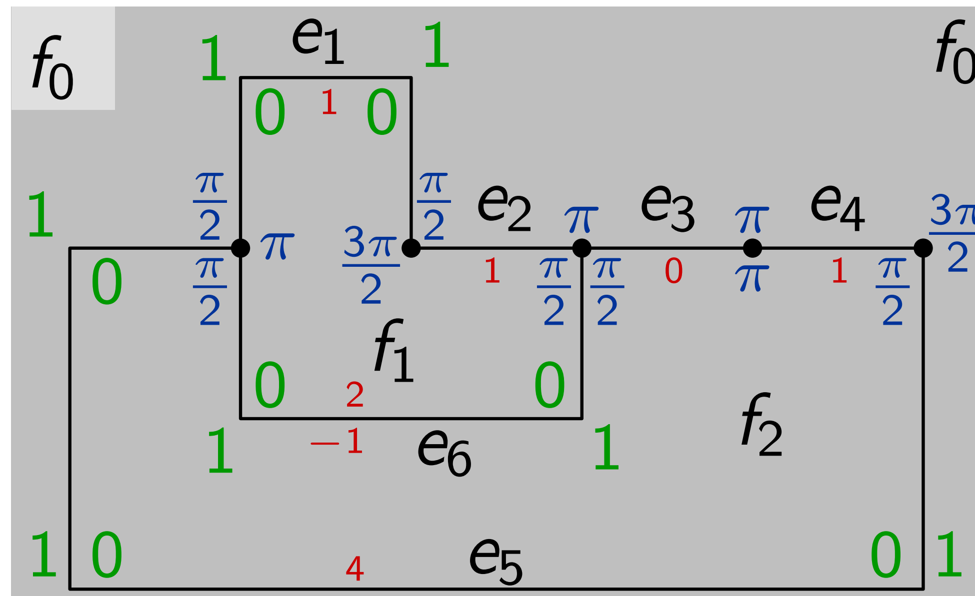
Zulässige orthogonale Beschreibungen

H1) $H(G)$ entspricht $(\mathcal{F}, f_0)$.

H2) Für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $(uv, \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $(vu, \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt: δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2.

H3) Seien $|\delta|_0$ und $|\delta|_1$ die Anzahlen Nullen bzw. Einsen in δ. Sei $r = (e, \delta, \alpha)$. Für $C(r) := |\delta|_0 - |\delta|_1 + 2 - \alpha / \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\sum_{r \in H(f)} C(r) = \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0 \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases}$$



H4) Für jeden Knoten v ist die Summe der anliegenden Winkel gleich 2π.

Erinnerung

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben	Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\Delta \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0,
finde	orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F}, f_0)$ erhält und minimale Knickanzahl hat.

Erinnerung

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben	Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\Delta \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0,
finde	orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F}, f_0)$ erhält und minimale Knickanzahl hat.

Ansatz: Baue Flussnetzwerk!

$\gg$ Währung $= \measuredangle \frac{\pi}{2}$

Erinnerung

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\Delta \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0,

finde orthogonale Beschreibung $H(G)$,
die $(\mathcal{F}, f_0)$ erhält und minimale Knickanzahl hat.

Ansatz: Baue Flussnetzwerk!

- Währung $= \measuredangle\frac{\pi}{2}$
- Knoten $\xrightarrow{\measuredangle}$ Facetten ($\#\ \measuredangle\frac{\pi}{2}$ zur Facette)

Erinnerung

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

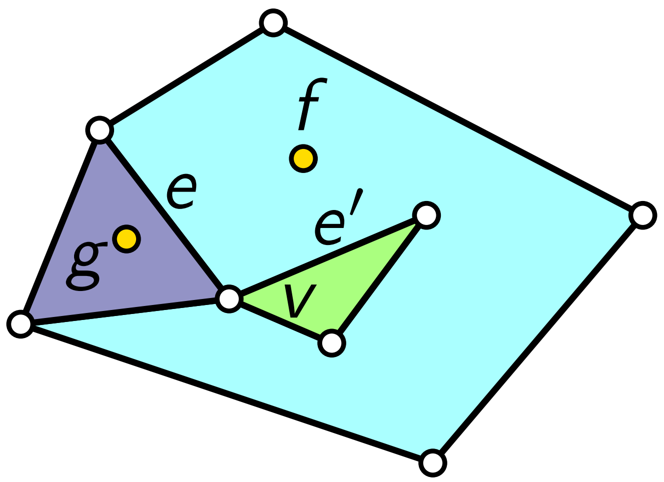
Gegeben	Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\Delta \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0,
finde	orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F}, f_0)$ erhält und minimale Knickanzahl hat.

Ansatz: Baue Flussnetzwerk!

- Währung $= \measuredangle \frac{\pi}{2}$
- Knoten $\xrightarrow{\measuredangle}$ Facetten ($\# \measuredangle \frac{\pi}{2}$ zur Facette)
- Facetten $\xrightarrow{\measuredangle}$ Nachbar-Facetten ($\#$ Knicke zum Nachbarn)

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

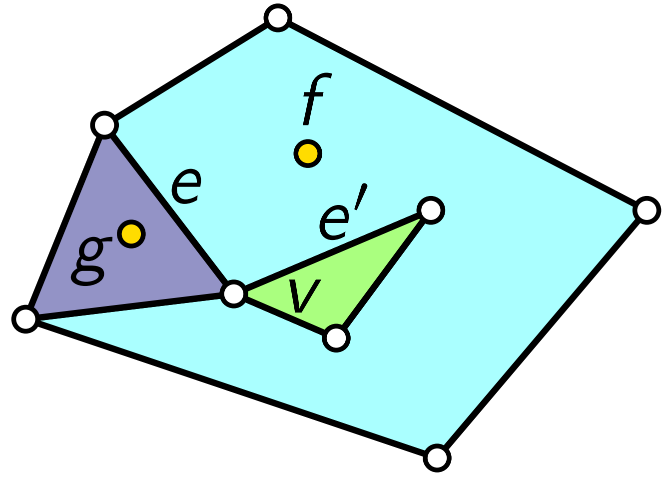
Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$



Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

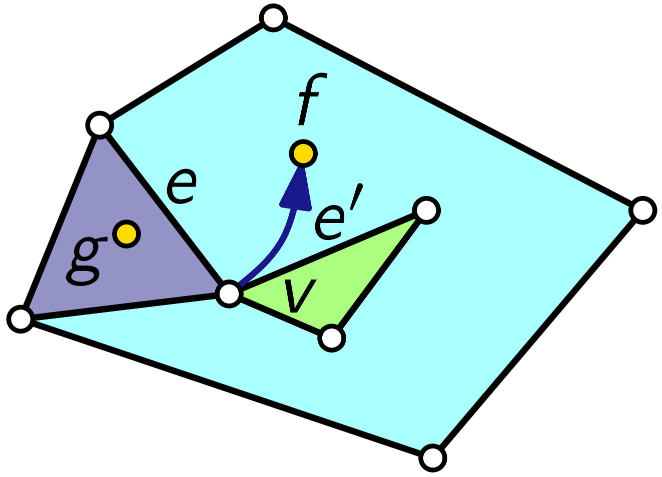
$\gg$ $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v$ liegt zw. Kanten e, e' auf $\partial f\}$



Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

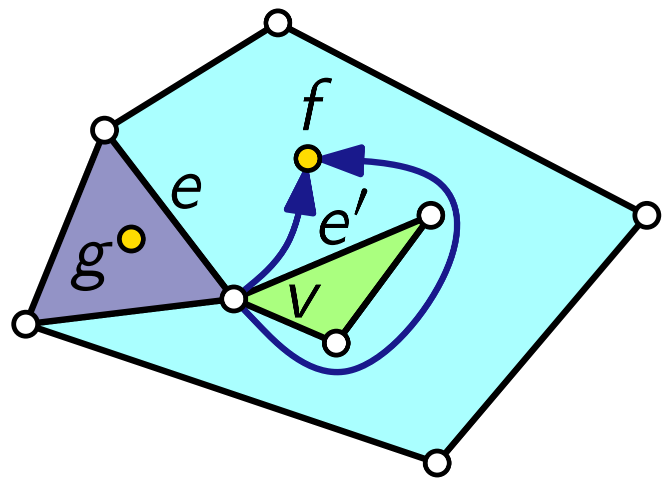
≫ $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v$ liegt zw. Kanten e, e' auf $\partial f\}$



Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

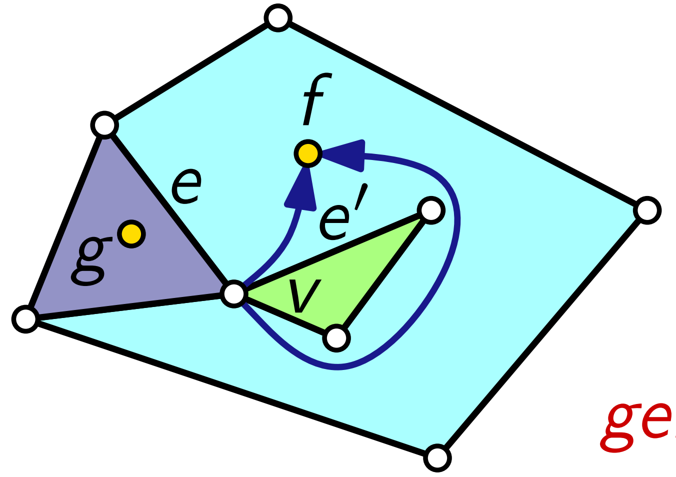
≫ $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v$ liegt zw. Kanten e, e' auf $\partial f\}$



Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

≫ $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v$ liegt zw. Kanten e, e' auf $\partial f\}$

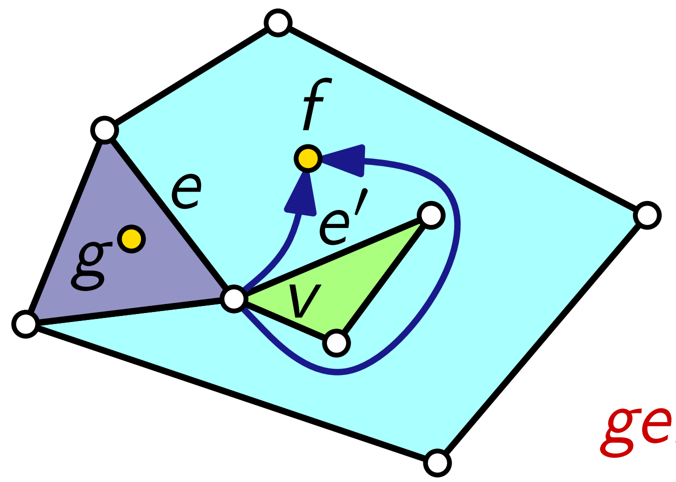


gerichteter Multigraph!

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

≫ $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ liegt zw. Kanten } e, e' \text{ auf } \partial f\}$
$\quad \cup \{(f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ haben Kante } e \text{ gemein}\}$

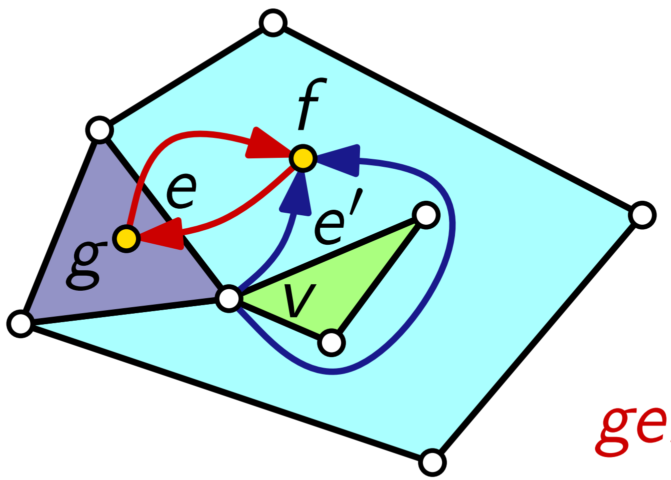


gerichteter Multigraph!

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

≫ $A = \{(v,f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ liegt zw. Kanten } e, e' \text{ auf } \partial f\}$
$\quad \cup \{(f,g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ haben Kante } e \text{ gemein}\}$

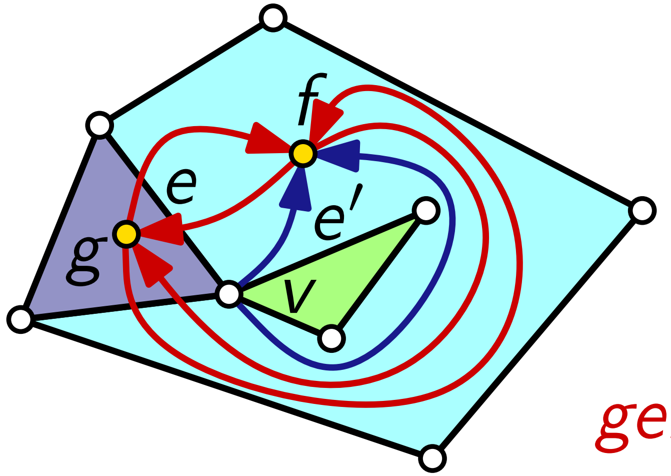


gerichteter Multigraph!

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

≫ $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ liegt zw. Kanten } e, e' \text{ auf } \partial f\}$
$\quad \cup \{(f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ haben Kante } e \text{ gemein}\}$



gerichteter Multigraph!

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

- $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v$ liegt zw. Kanten e, e' auf $\partial f\}$
  $\cup \{(f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g$ haben Kante e gemein$\}$
- $b(v) = 4$ für alle $v \in V$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

- $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v$ liegt zw. Kanten e, e' auf $\partial f\}$
  $\cup \{(f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g$ haben Kante e gemein$\}$
- $b(v) = 4$ für alle $v \in V$
- $b(f) = -2\deg_G(f) + \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0, \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases}$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

- $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v$ liegt zw. Kanten e, e' auf $\partial f\}$
  $\cup \{(f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g$ haben Kante e gemein$\}$
- $b(v) = 4$ für alle $v \in V$
- $b(f) = -2\deg_G(f) + \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0, \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \sum b \stackrel{?}{=} 0$$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ liegt zw. Kanten } e, e' \text{ auf } \partial f\}$
  $\cup \{(f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ haben Kante } e \text{ gemein}\}$

- $b(v) = 4$ für alle $v \in V$
- $b(f) = -2\deg_G(f) + \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0, \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} b(v) = 4 \text{ für alle } v \in V \\ b(f) = -2\deg_G(f) + \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0, \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum b = 0$

(Euler)

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

≫ $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ liegt zw. Kanten } e, e' \text{ auf } \partial f\}$
$\quad \cup \{(f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ haben Kante } e \text{ gemein}\}$

≫ $b(v) = 4$ für alle $v \in V$

≫ $b(f) = -2\deg_G(f) + \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0, \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases}$ $\Rightarrow \sum b = 0$ (Euler)

≫ für alle $vf \in A$: $\quad \leq X(vf) \leq$

für alle $fg \in A$: $\quad \leq X(fg) \leq$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

≫ $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v$ liegt zw. Kanten e, e' auf $\partial f\}$
$\cup \{(f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g$ haben Kante e gemein$\}$

≫ $b(v) = 4$ für alle $v \in V$

≫ $b(f) = -2\deg_G(f) + \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0, \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum b = 0$ (Euler)

≫ für alle $vf \in A$: $\quad l(vf) := 1 \leq X(vf) \leq 4 =: u(vf)$

für alle $fg \in A$: $\quad \leq X(fg) \leq$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

- $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v$ liegt zw. Kanten e, e' auf $\partial f\}$ $\cup \{(f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g$ haben Kante e gemein$\}$

- $b(v) = 4$ für alle $v \in V$
- $b(f) = -2\deg_G(f) + \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0, \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum b = 0$ (Euler)

- für alle $vf \in A$: $l(vf) := 1 \leq X(vf) \leq 4 =: u(vf)$

  für alle $fg \in A$: $l(fg) := 0 \leq X(fg) \leq \infty =: u(fg)$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

- $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ liegt zw. Kanten } e, e' \text{ auf } \partial f\}$
  $\cup \{(f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ haben Kante } e \text{ gemein}\}$

- $b(v) = 4$ für alle $v \in V$
- $b(f) = -2\deg_G(f) + \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0, \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum b = 0$ (Euler)

- für alle $vf \in A$: $l(vf) := 1 \leq X(vf) \leq 4 =: u(vf)$

  für alle $fg \in A$: $l(fg) := 0 \leq X(fg) \leq \infty =: u(fg)$

  $\mathrm{cost}(vf) =$ $\mathrm{cost}(fg) =$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v$ liegt zw. Kanten e, e' auf $\partial f\}$
  $\cup \{(f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g$ haben Kante e gemein$\}$

- $b(v) = 4$ für alle $v \in V$
- $b(f) = -2\deg_G(f) + \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0, \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum b = 0$ (Euler)

- für alle $vf \in A$: $l(vf) := 1 \leq X(vf) \leq 4 =: u(vf)$

  für alle $fg \in A$: $l(fg) := 0 \leq X(fg) \leq \infty =: u(fg)$

  $\text{cost}(vf) = 0$ $\qquad$ $\text{cost}(fg) = 1$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Wir modellieren nur die *Anzahl* der Knicke. Warum reicht das?

→ Übung

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \mathrm{cost})$

- $A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ liegt zw. Kanten } e, e' \text{ auf } \partial f\}$
  $\cup \{(f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ haben Kante } e \text{ gemein}\}$

- $b(v) = 4$ für alle $v \in V$
- $b(f) = -2\deg_G(f) + \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0, \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases}$

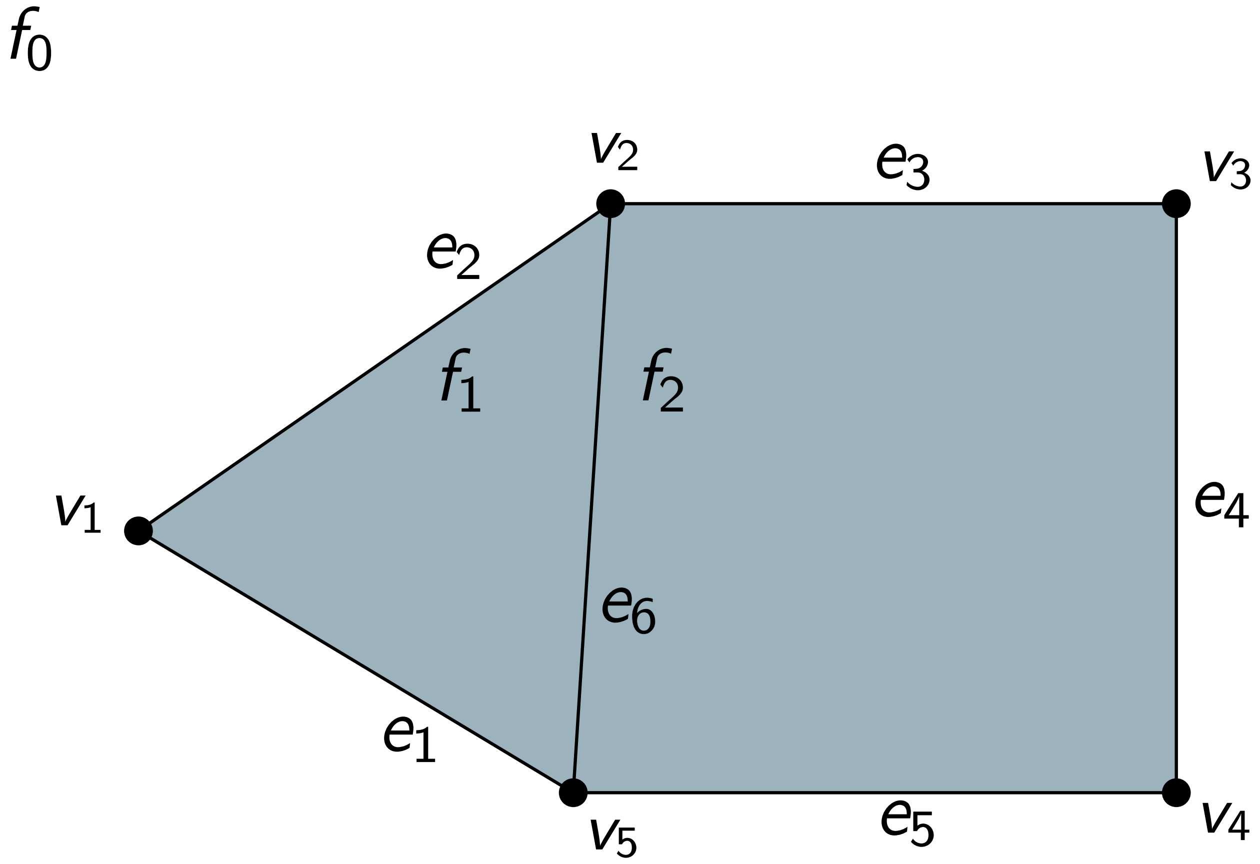
$\Rightarrow \sum b = 0$ (Euler)

- für alle $vf \in A$: $\quad l(vf) := 1 \leq \boxed{X(vf)} \leq 4 =: u(vf)$

  für alle $fg \in A$: $\quad l(fg) := 0 \leq \boxed{X(fg)} \leq \infty =: u(fg)$

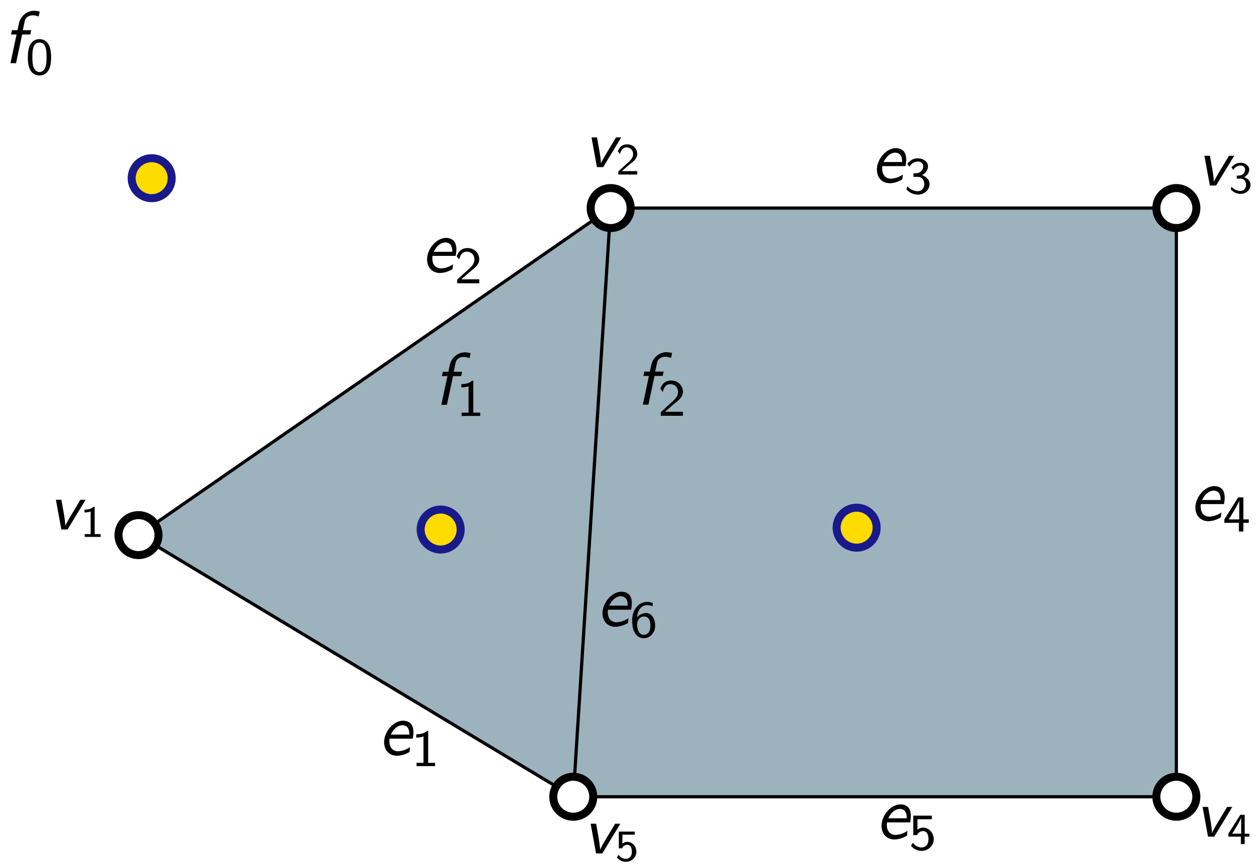
  $\mathrm{cost}(vf) = 0 \qquad \mathrm{cost}(fg) = 1$

Beispiel Flussnetzwerk



Legende

Beispiel Flussnetzwerk

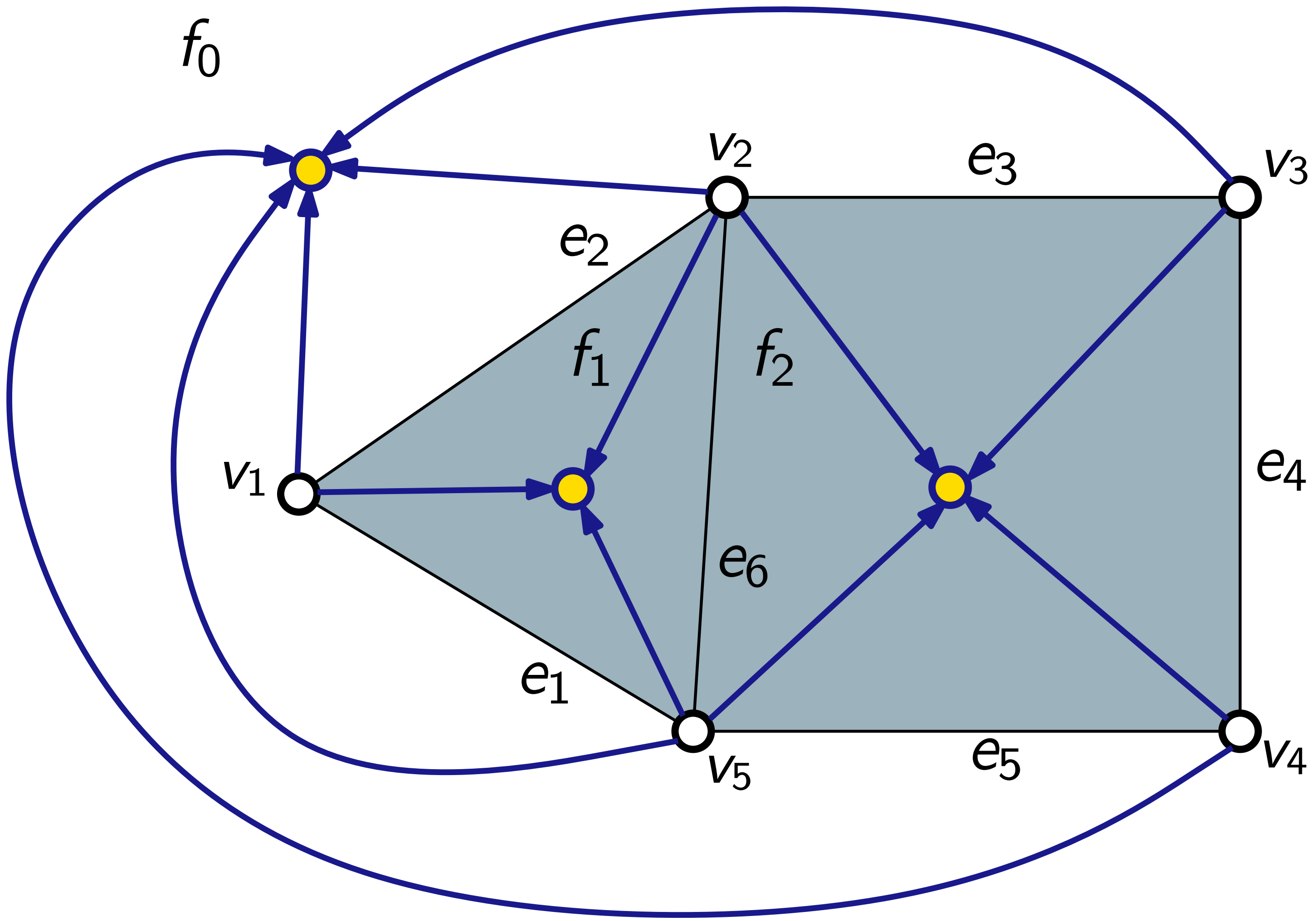


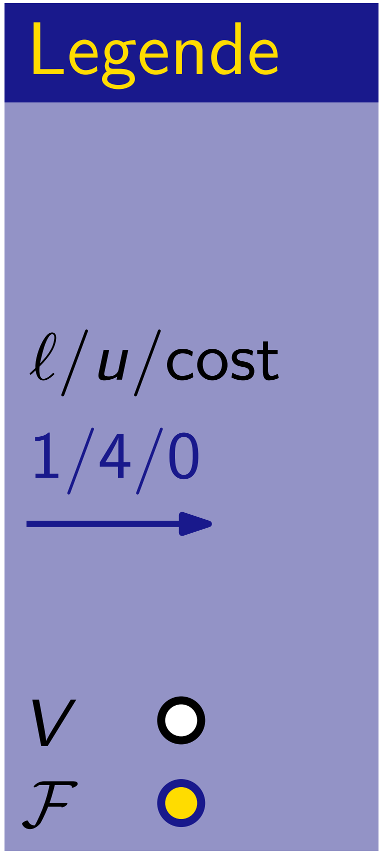
Legende

V

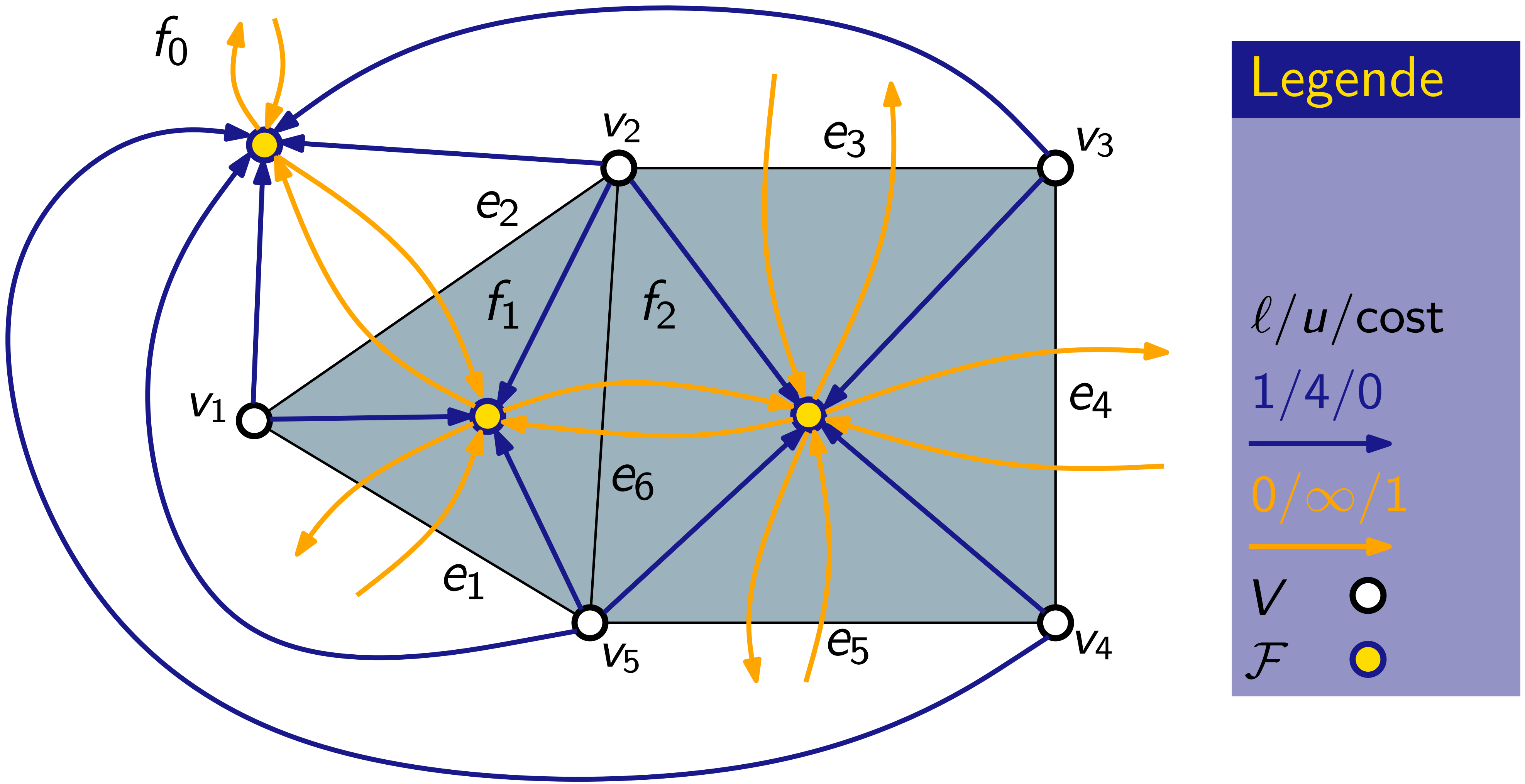
$\mathcal{F}$

Beispiel Flussnetzwerk

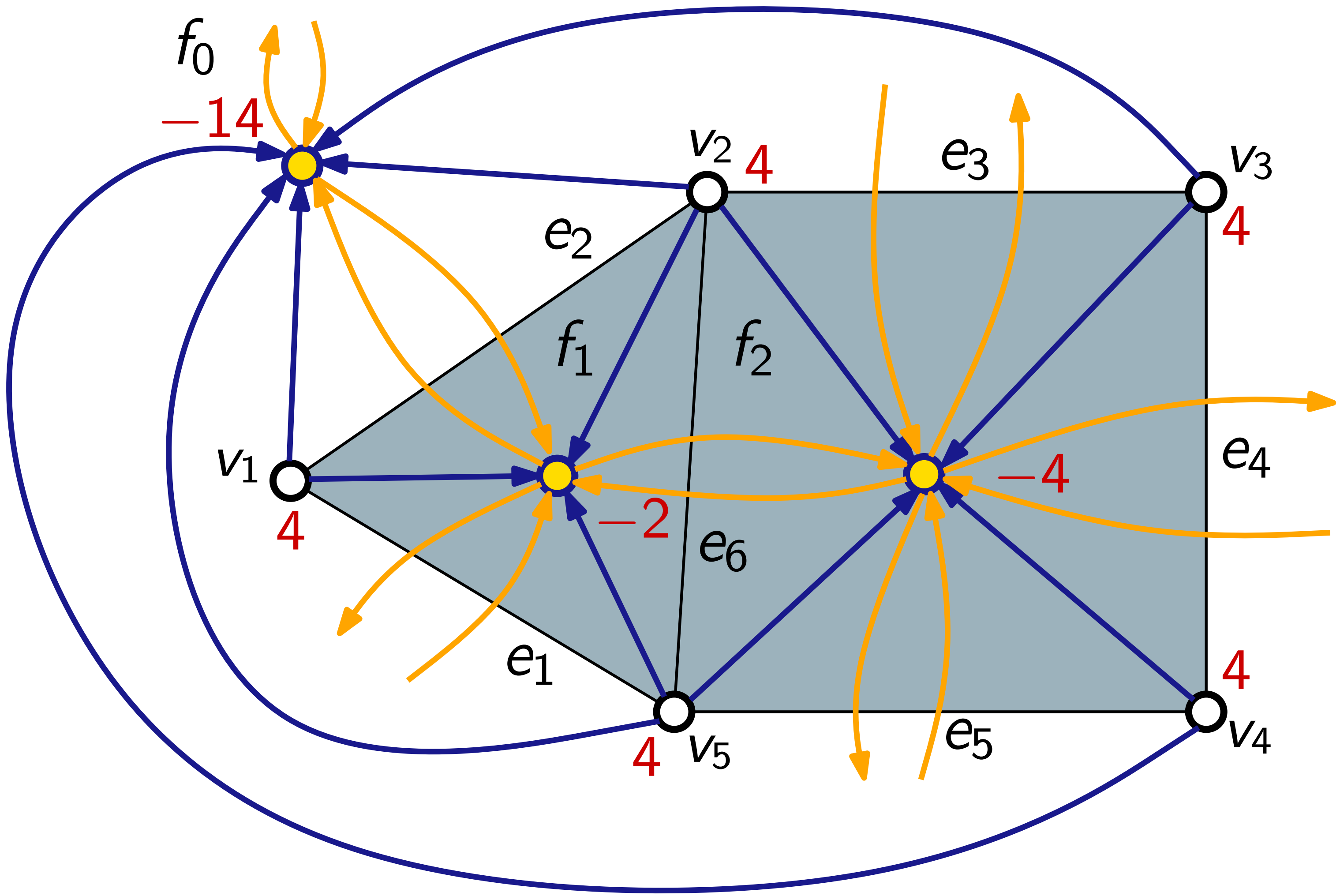




Beispiel Flussnetzwerk



Beispiel Flussnetzwerk



Legende

$4 = b$-Wert

$\ell/u/\mathrm{cost}$

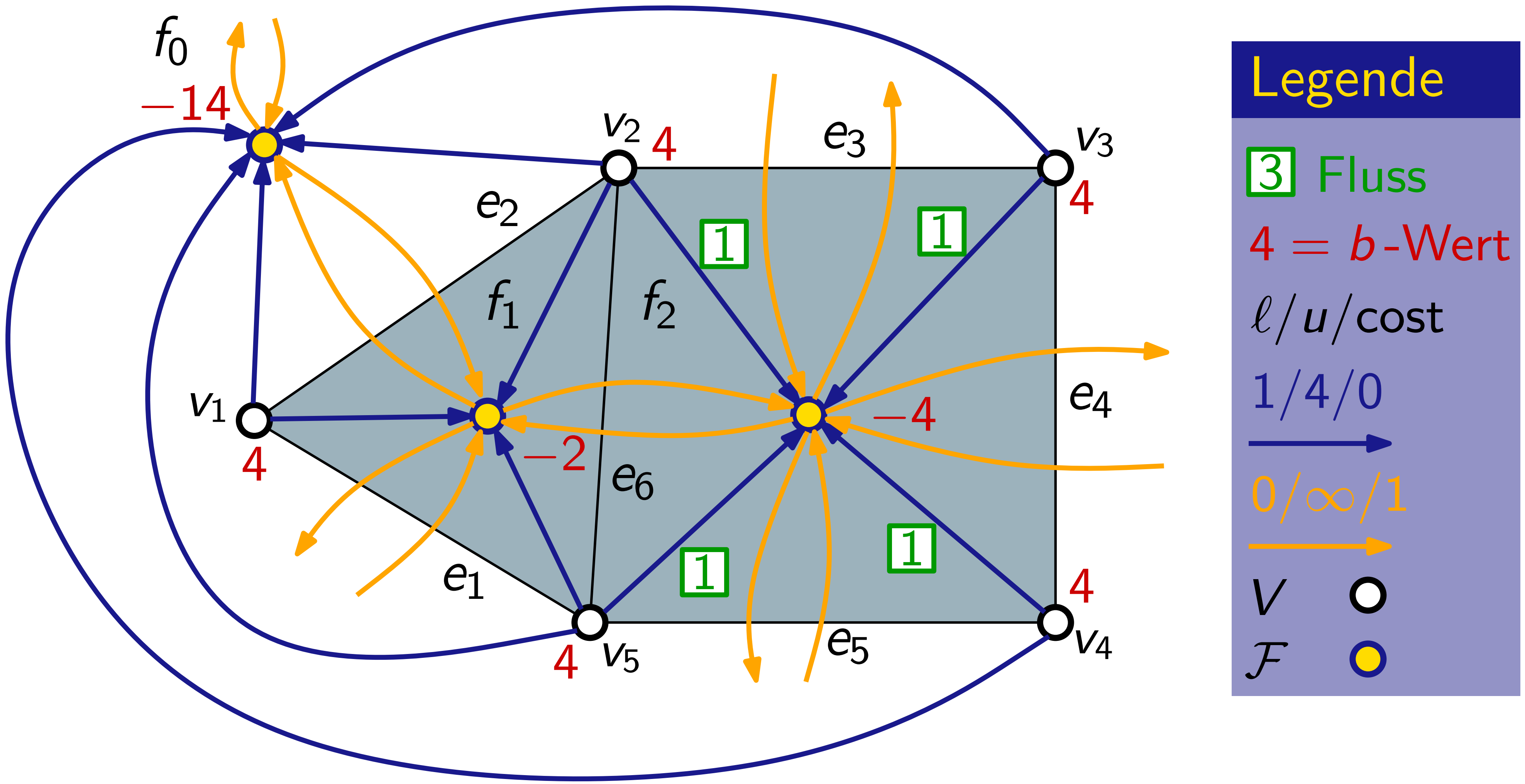
$1/4/0$

$0/\infty/1$

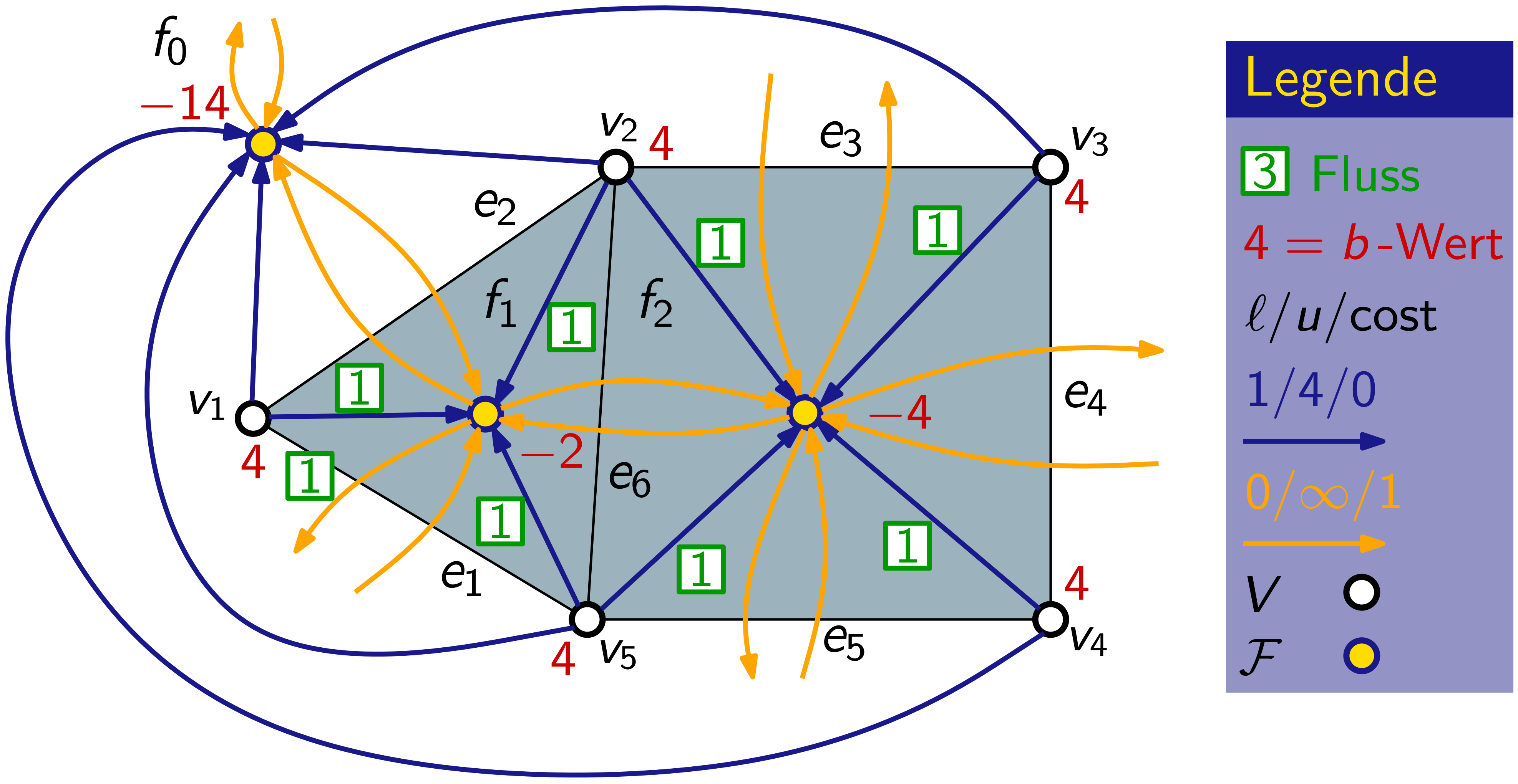
V

$\mathcal{F}$

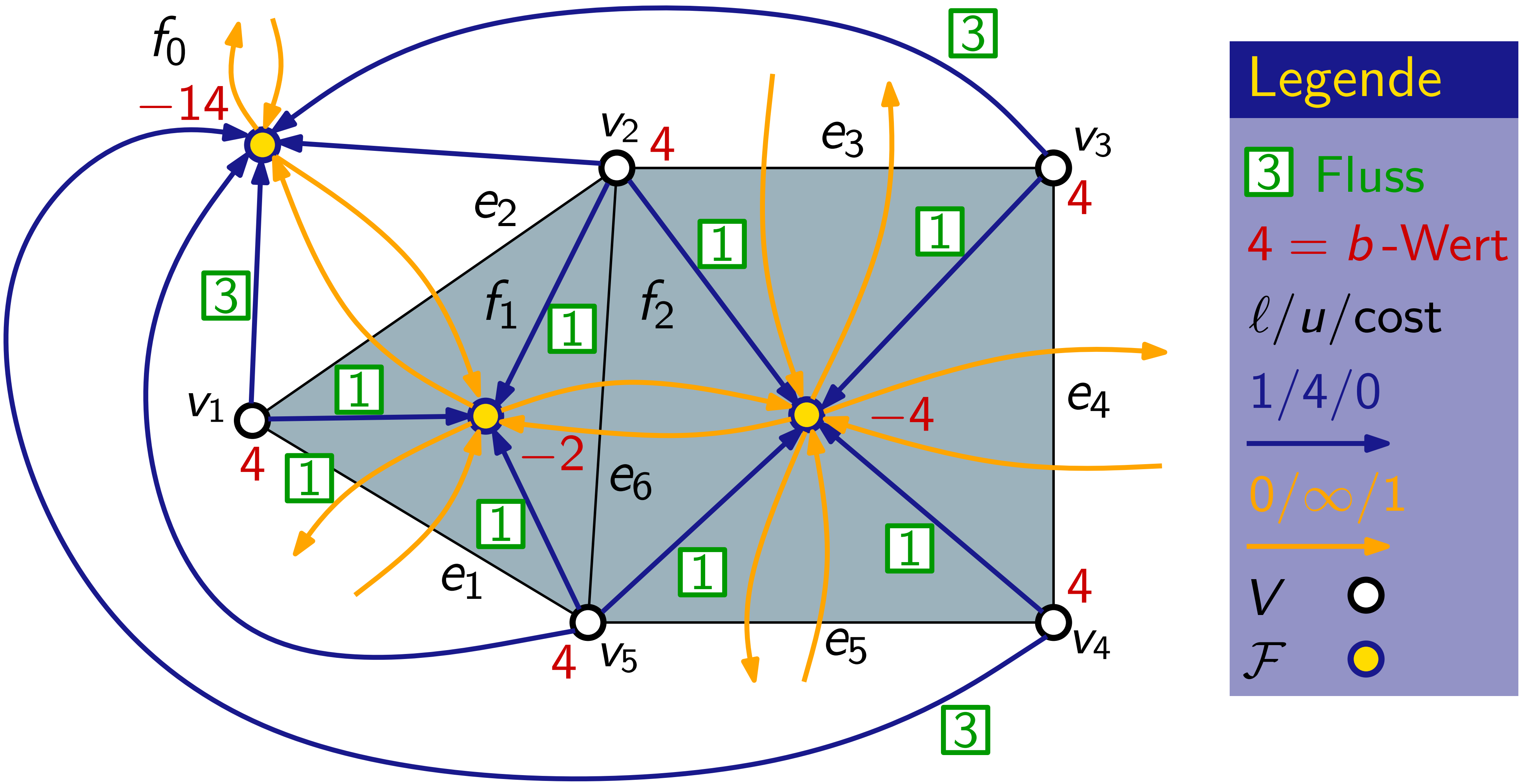
Beispiel Flussnetzwerk



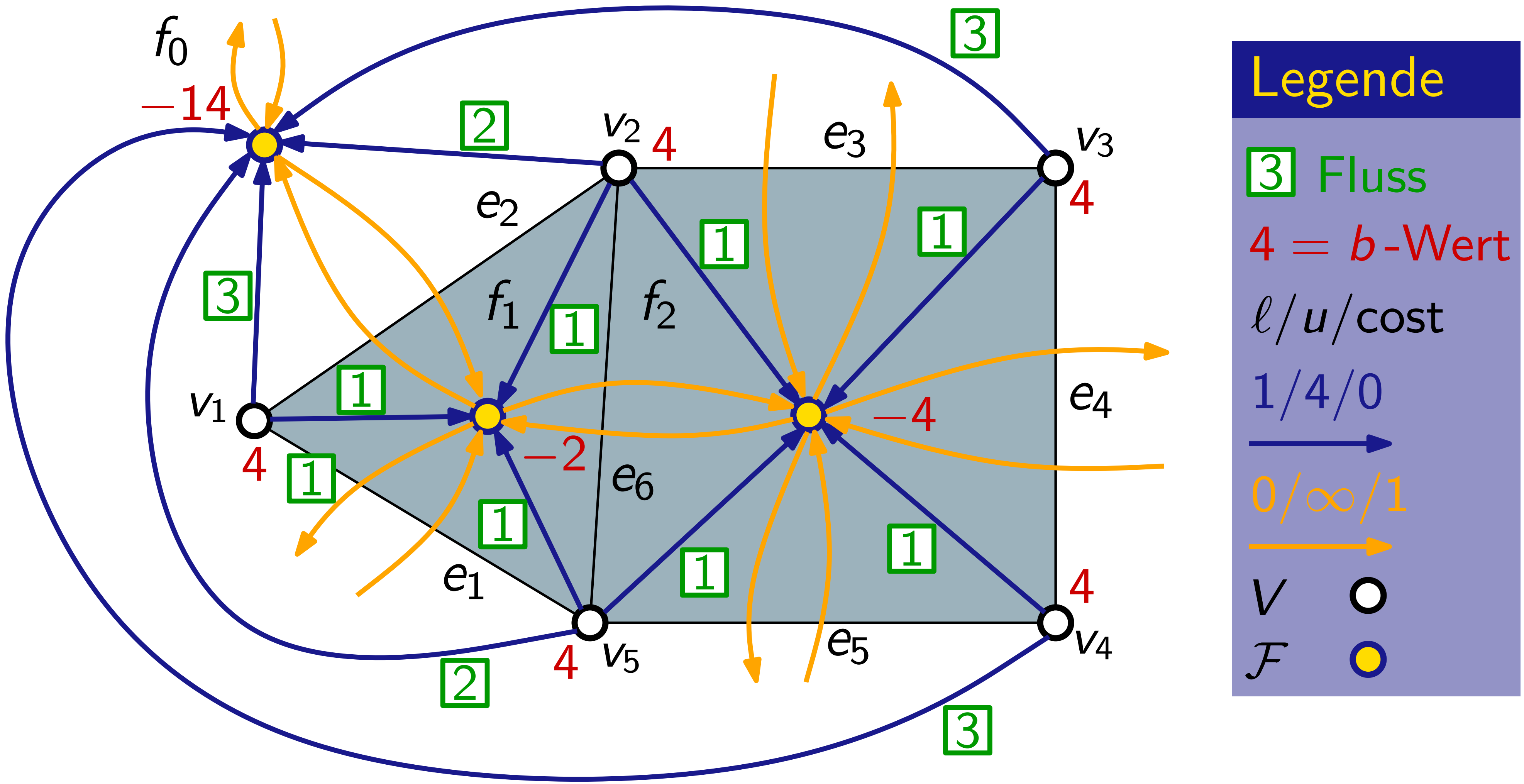
Beispiel Flussnetzwerk



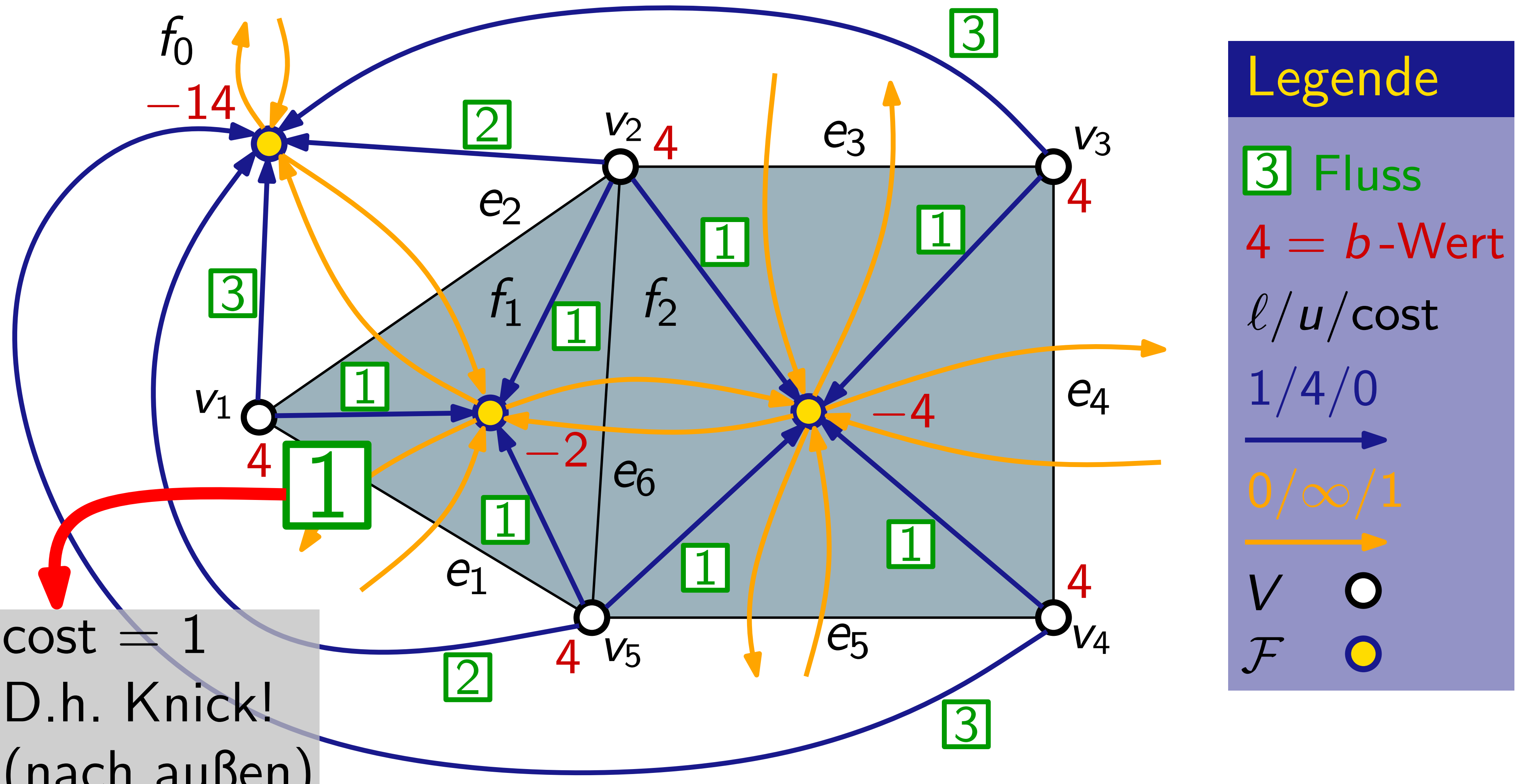
Beispiel Flussnetzwerk



Beispiel Flussnetzwerk



Beispiel Flussnetzwerk



cost = 1
D.h. Knick!
(nach außen)

Kernaussage + Korrektheit

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

Kernaussage + Korrektheit

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung $H(G)$

Kernaussage + Korrektheit

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung $H(G)$

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π ✓

Kernaussage + Korrektheit

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung $H(G)$

(H2) Kantenbeschr. von anderer Seite invertiert + umgedreht ✓

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π ✓

Kernaussage + Korrektheit

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung $H(G)$

(H1) H(G) entspricht $\mathcal{F}$, f_0 ✓

(H2) Kantenbeschr. von anderer Seite invertiert + umgedreht ✓

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π ✓

Kernaussage + Korrektheit

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung $H(G)$

(H1) H(G) entspricht $\mathcal{F}$, f_0 ✓

(H2) Kantenbeschr. von anderer Seite invertiert + umgedreht ✓

(H3) Winkelsumme an f: $b(f)$ ohne gestreckte Winkel $= 4$ ✓

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π ✓

Übung

Kernaussage + Korrektheit

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

Kernaussage + Korrektheit

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung $H(G)$
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k

Kernaussage + Korrektheit

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung $H(G)$
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k

(N1) $X(vf) = 1/2/3/4$ ✓

Kernaussage + Korrektheit

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung $H(G)$
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k

(N1) $X(vf) = 1/2/3/4$ ✓

(N2) $X(fg) := |\delta_{fg}|_0$, (e, δ_{fg}, x) Beschreibung v. $e \stackrel{*}{=} fg$ für f ✓

Kernaussage + Korrektheit

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung $H(G)$
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k

(N1) $X(vf) = 1/2/3/4$ ✓

(N2) $X(fg) := |\delta_{fg}|_0$, (e, δ_{fg}, x) Beschreibung v. $e \stackrel{*}{=} fg$ für f ✓

(N3) Kapazitäten ✓, Überschuss-/Bedarfsdeckung

Kernaussage + Korrektheit

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung $H(G)$
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k

(N1) $X(vf) = 1/2/3/4$ ✓

(N2) $X(fg) := |\delta_{fg}|_0$, (e, δ_{fg}, x) Beschreibung v. $e \stackrel{*}{=} fg$ für f ✓

(N3) Kapazitäten ✓, Überschuss-/Bedarfsdeckung ✓

Kernaussage + Korrektheit

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung $H(G)$
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k

(N1) $X(vf) = 1/2/3/4$ ✓

(N2) $X(fg) := |\delta_{fg}|_0$, (e, δ_{fg}, x) Beschreibung v. $e \stackrel{*}{=} fg$ für f ✓

(N3) Kapazitäten ✓, Überschuss-/Bedarfsdeckung ✓

(N4) Kosten $= k$ ✓

Kernaussage + Korre

Laufzeit:
Nutze Ganzzahligkeit (l, u, c), wenige Kanten,...

$O(n^2 \log n)$	[Tamassia '87]
$O(n^{7/4}\sqrt{\log n})$	[Garg & Tamassia '96]
$O(n^{3/2})$	[Cornelsen & Karrenbauer '12]

Satz. [Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

$\Leftrightarrow$ Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung $H(G)$
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k

(N1) $X(vf) = 1/2/3/4$ ✓

(N2) $X(fg) := |\delta_{fg}|_0$, (e, δ_{fg}, x) Beschreibung v. $e \stackrel{*}{=} fg$ für f ✓

(N3) Kapazitäten ✓, Überschuss-/Bedarfsdeckung ✓

(N4) Kosten $= k$ ✓

Kompaktifizierung

Problem: orthogonale Zeichnung zu orthogonaler Beschreibung

Gegeben	planarer Graph $G = (V, E)$ mit $\Delta \leq 4$ und orthogonaler Beschreibung $H(G)$.
Finde	orthogonale Zeichnung von G, die $H(G)$ realisiert.

Kompaktifizierung

Problem: orthogonale Zeichnung zu orthogonaler Beschreibung

Gegeben	planarer Graph $G = (V, E)$ mit $\Delta \leq 4$ und orthogonaler Beschreibung $H(G)$.
Finde	orthogonale Zeichnung von G, die $H(G)$ realisiert.

Spezialfall: alle Facetten sind Rechtecke

$\Rightarrow$ erlaubt Garantien:
- $\gg$ minimale Gesamtkantenlänge
- $\gg$ minimale Fläche

Kompaktifizierung

Problem: orthogonale Zeichnung zu orthogonaler Beschreibung

Gegeben	planarer Graph $G = (V, E)$ mit $\Delta \leq 4$ und orthogonaler Beschreibung $H(G)$.
Finde	orthogonale Zeichnung von G, die $H(G)$ realisiert.

Spezialfall: alle Facetten sind Rechtecke

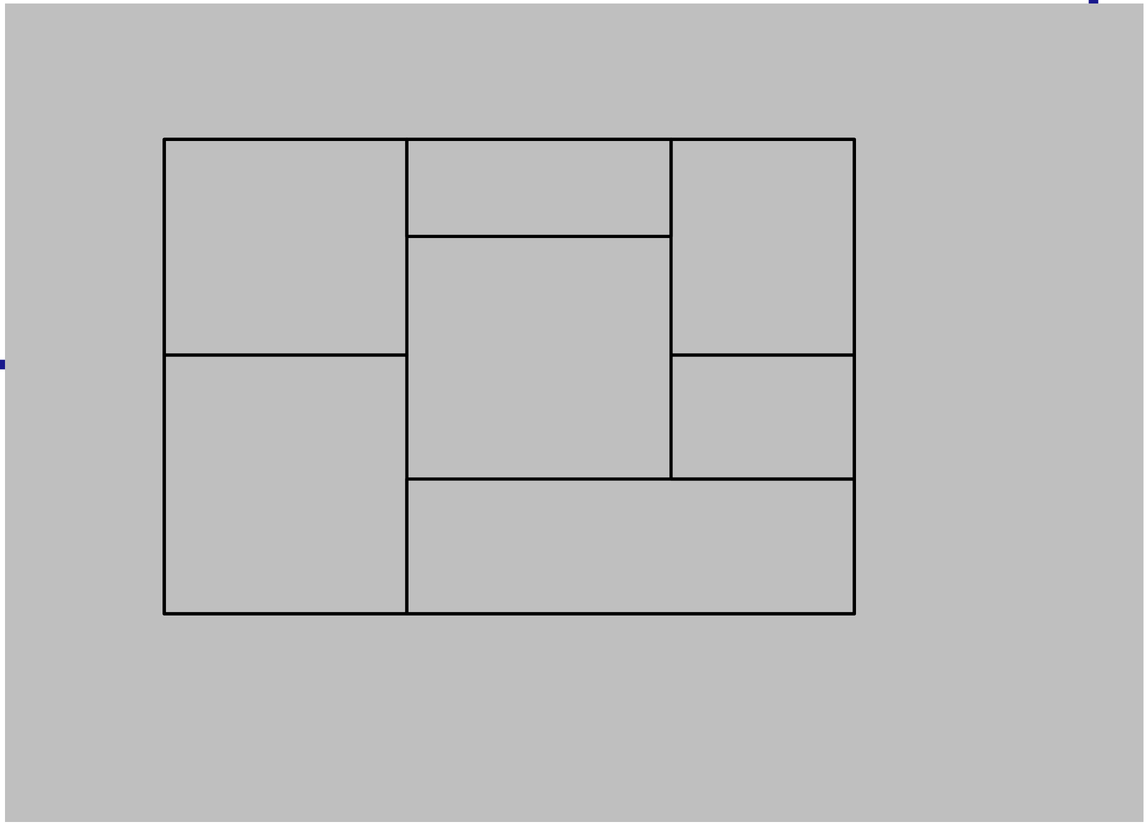
$\Rightarrow$ erlaubt Garantien:
- $\gg$ minimale Gesamtkantenlänge
- $\gg$ minimale Fläche

- $\gg$ Knicke sind außen
- $\gg$ gegenüberliegende Seiten gleich lang $\Rightarrow$ Layout ok

Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\text{hor}} = ((V_{\text{hor}}, A_{\text{hor}}); l; u; b; \text{cost})$

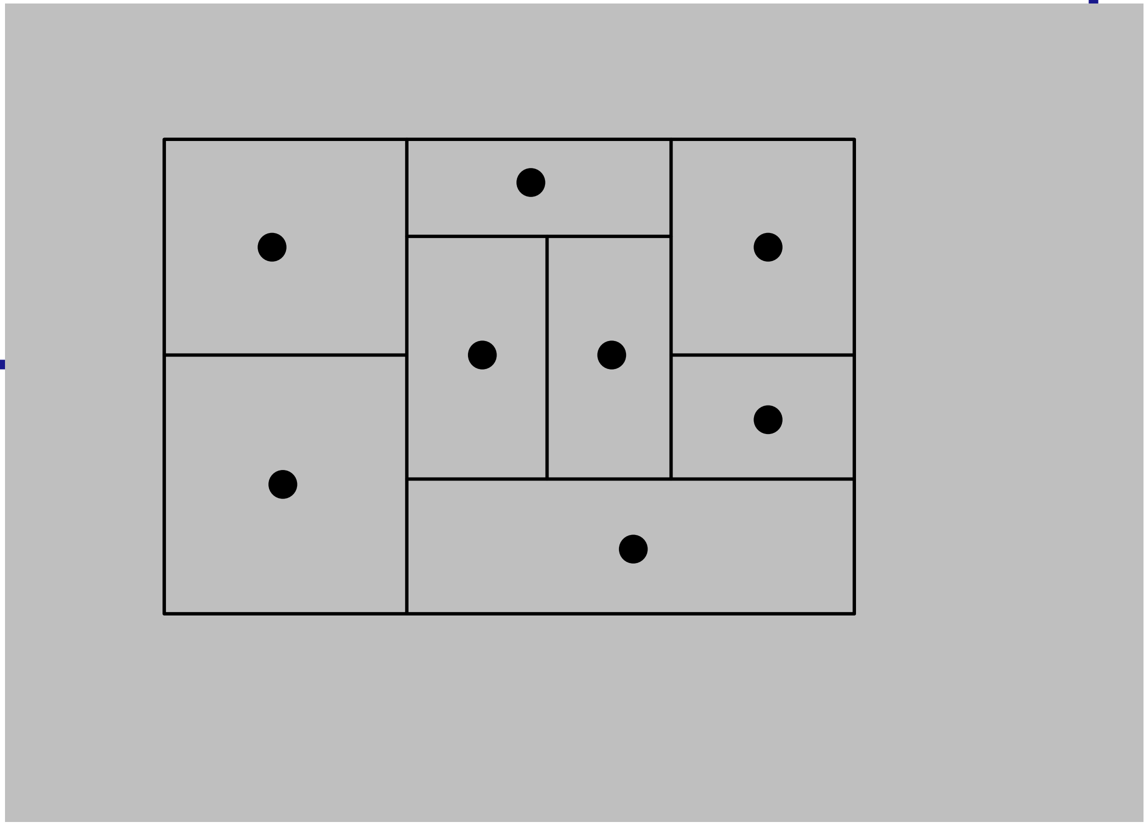
- $V_{\text{hor}} = \mathcal{F}$
- $A_{\text{hor}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames horizontales Kantensegment und f liegt unterhalb von $g\}$
- $l \equiv 1$
- $u \equiv \infty$
- $\text{cost} \equiv 1$
- $b \equiv 0$



Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\mathrm{hor}} = ((V_{\mathrm{hor}}, A_{\mathrm{hor}}); l; u; b; \mathrm{cost})$

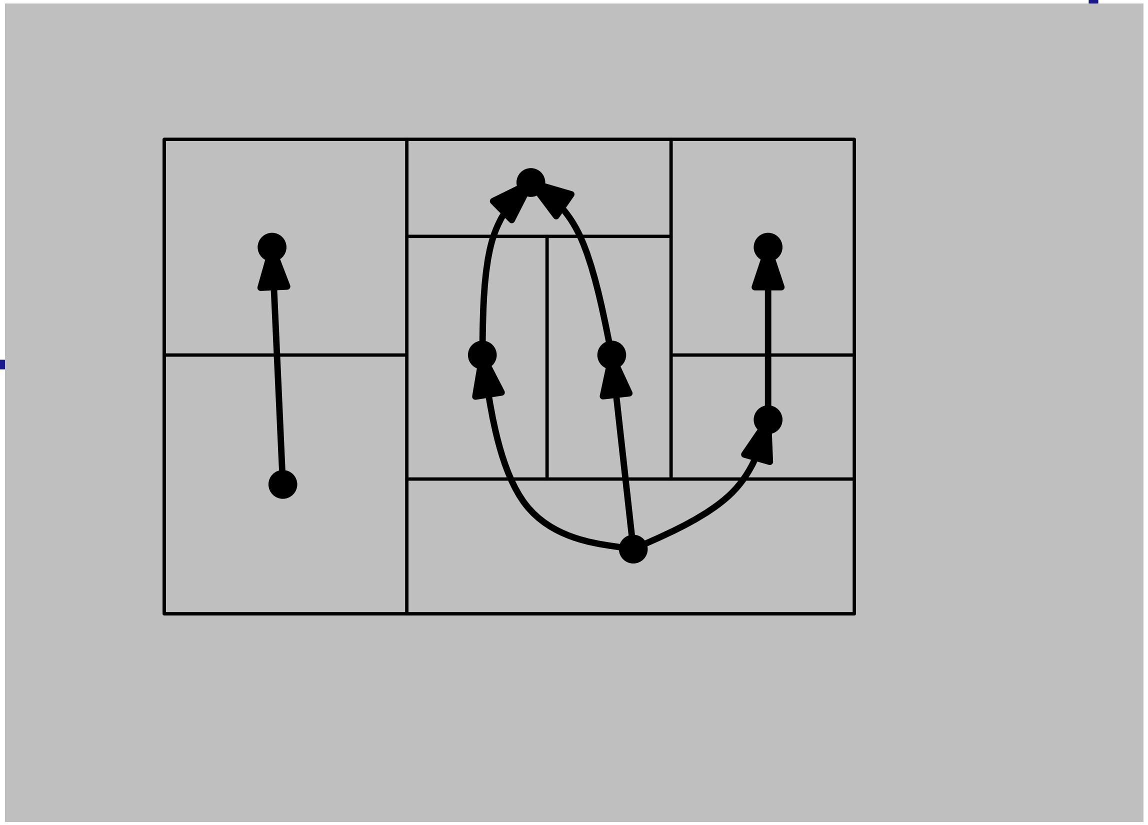
- $V_{\mathrm{hor}} = \mathcal{F}$
- $A_{\mathrm{hor}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames horizontales Kantensegment und f liegt unterhalb von $g\}$
- $l \equiv 1$
- $u \equiv \infty$
- $\mathrm{cost} \equiv 1$
- $b \equiv 0$



Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\mathrm{hor}} = ((V_{\mathrm{hor}}, A_{\mathrm{hor}}); l; u; b; \mathrm{cost})$

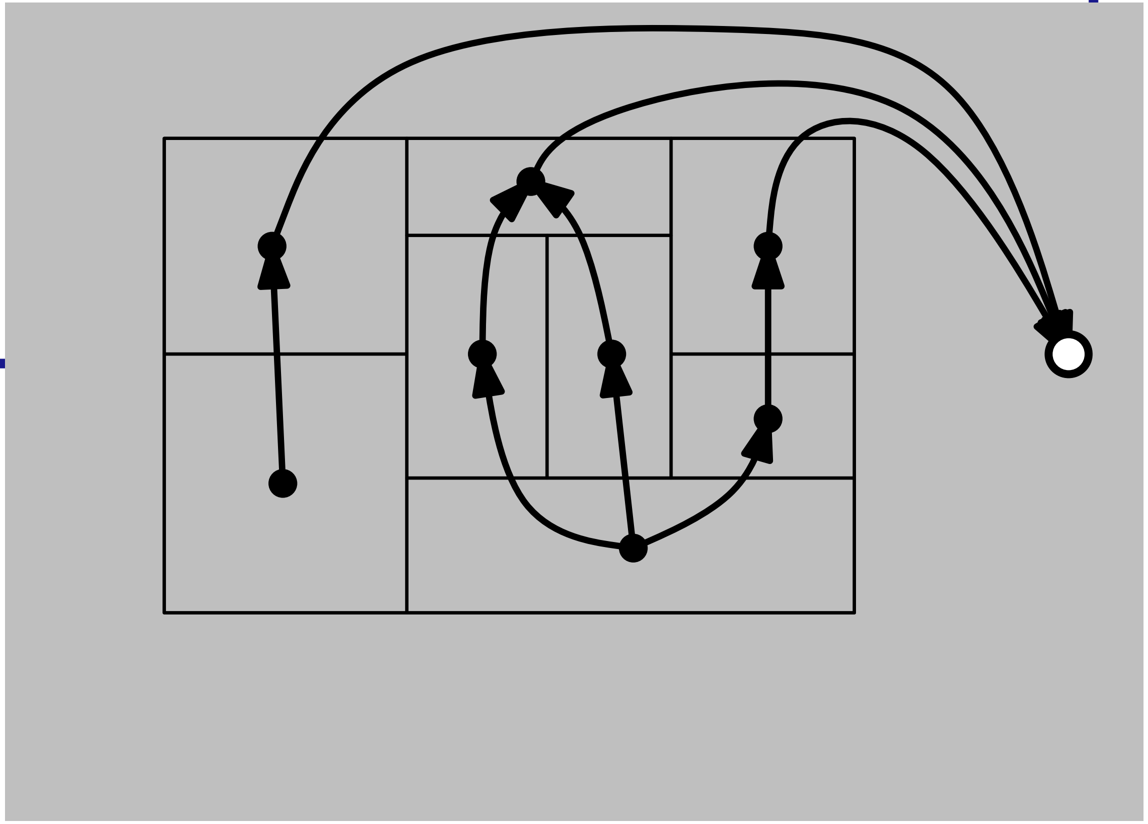
- $V_{\mathrm{hor}} = \mathcal{F}$
- $A_{\mathrm{hor}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames horizontales Kantensegment und f liegt unterhalb von $g\}$
- $l \equiv 1$
- $u \equiv \infty$
- $\mathrm{cost} \equiv 1$
- $b \equiv 0$



Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\text{hor}} = ((V_{\text{hor}}, A_{\text{hor}}); l; u; b; \text{cost})$

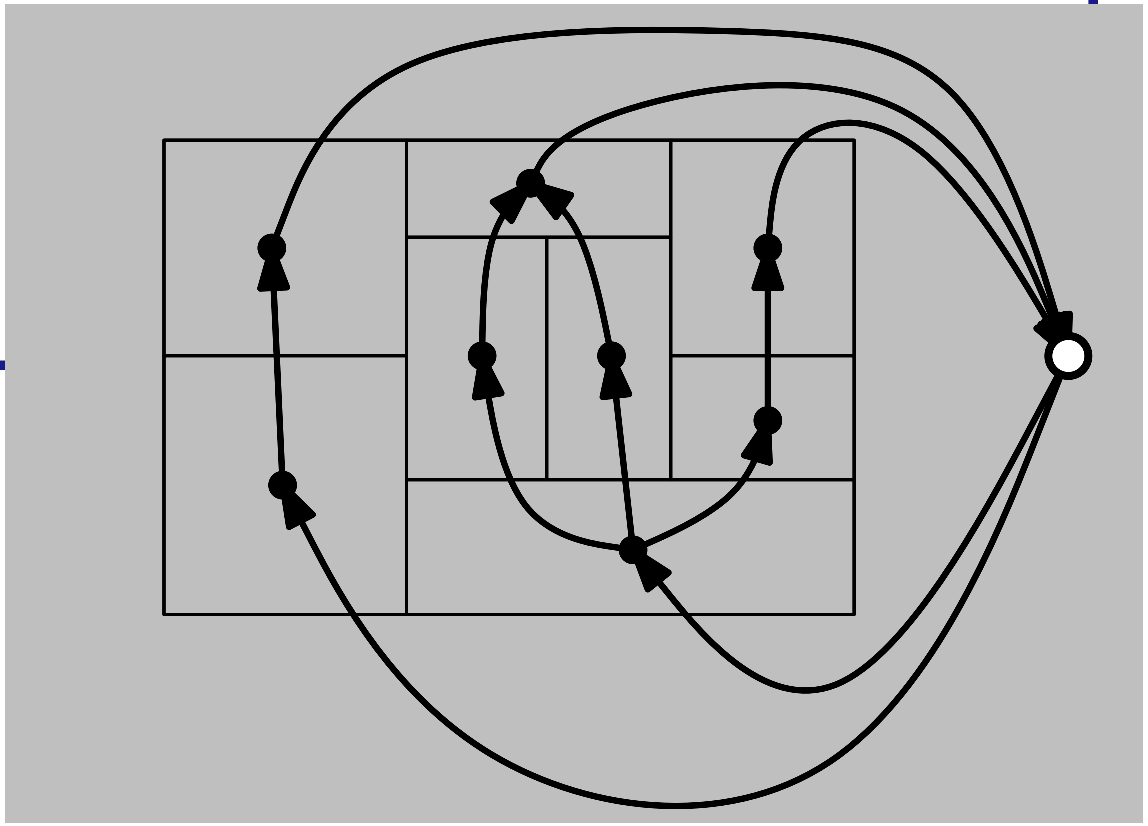
- $V_{\text{hor}} = \mathcal{F}$
- $A_{\text{hor}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames horizontales Kantensegment und f liegt unterhalb von $g\}$
- $l \equiv 1$
- $u \equiv \infty$
- $\text{cost} \equiv 1$
- $b \equiv 0$



Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\mathrm{hor}} = ((V_{\mathrm{hor}}, A_{\mathrm{hor}}); l; u; b; \mathrm{cost})$

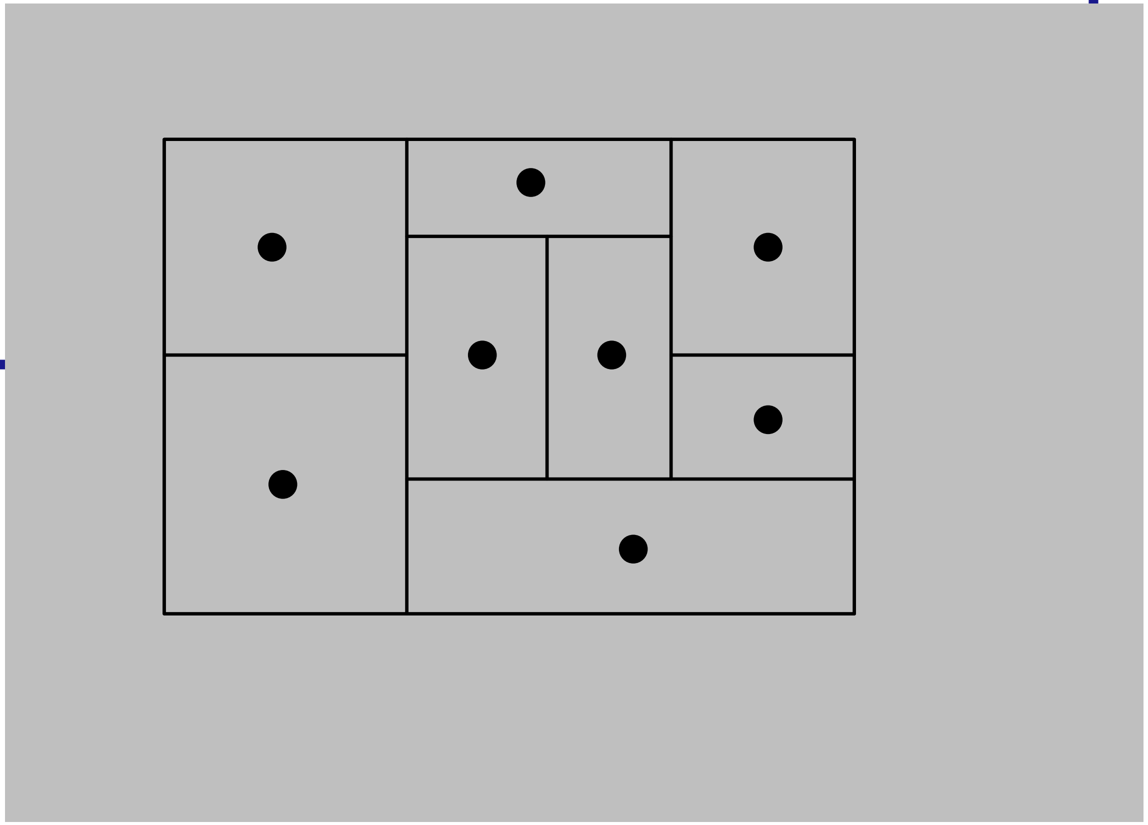
- $V_{\mathrm{hor}} = \mathcal{F}$
- $A_{\mathrm{hor}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames horizontales Kantensegment und f liegt unterhalb von $g\}$
- $l \equiv 1$
- $u \equiv \infty$
- $\mathrm{cost} \equiv 1$
- $b \equiv 0$



Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\text{ver}} = ((V_{\text{ver}}, A_{\text{ver}}); l; u; b; \text{cost})$

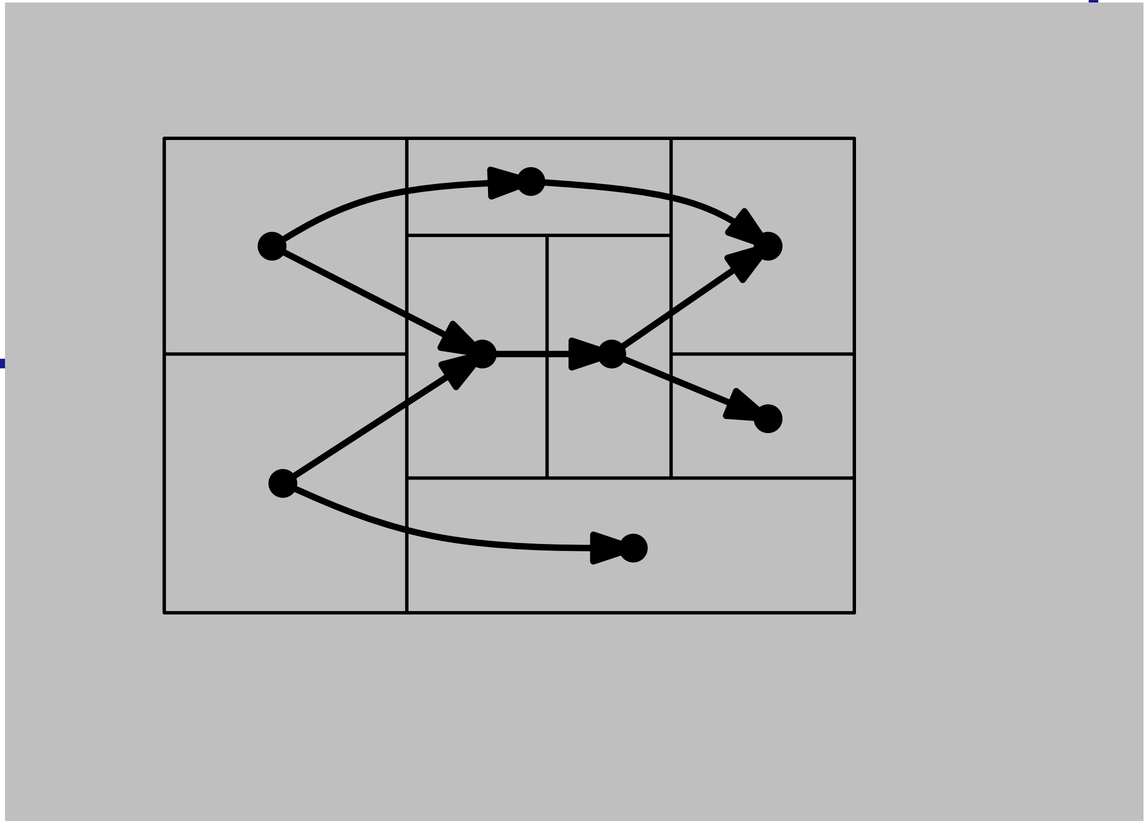
- $V_{\text{ver}} = \mathcal{F}$
- $A_{\text{ver}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames vertikales Kantensegment und f liegt links von $g\}$
- $l \equiv 1$
- $u \equiv \infty$
- $\text{cost} \equiv 1$
- $b \equiv 0$



Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\text{ver}} = ((V_{\text{ver}}, A_{\text{ver}}); l; u; b; \text{cost})$

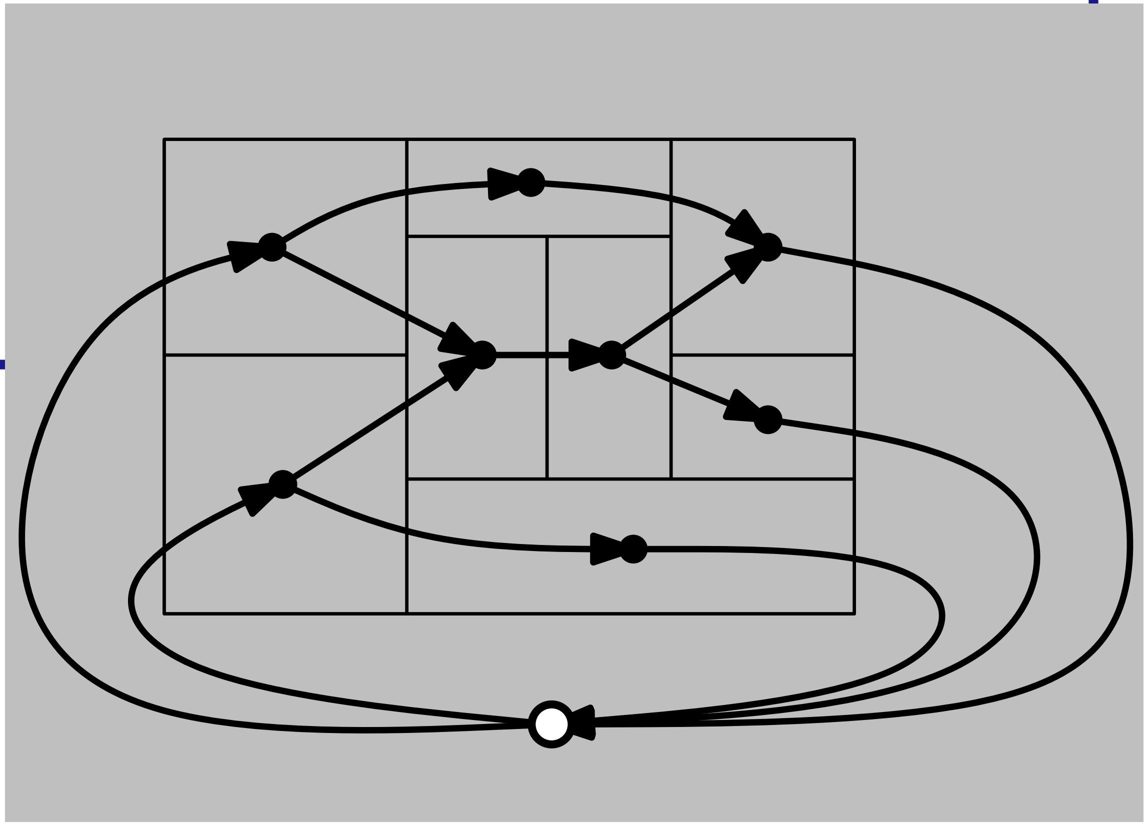
- $V_{\text{ver}} = \mathcal{F}$
- $A_{\text{ver}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames vertikales Kantensegment und f liegt links von $g\}$
- $l \equiv 1$
- $u \equiv \infty$
- $\text{cost} \equiv 1$
- $b \equiv 0$



Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\mathrm{ver}} = ((V_{\mathrm{ver}}, A_{\mathrm{ver}}); l; u; b; \mathrm{cost})$

- $V_{\mathrm{ver}} = \mathcal{F}$
- $A_{\mathrm{ver}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames vertikales Kantensegment und f liegt links von $g\}$
- $l \equiv 1$
- $u \equiv \infty$
- $\mathrm{cost} \equiv 1$
- $b \equiv 0$

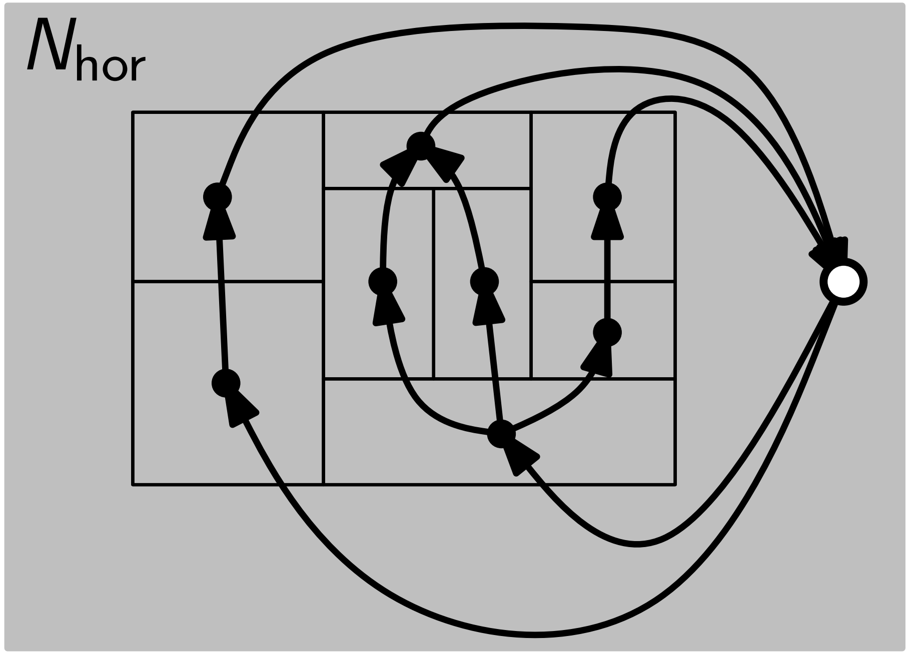


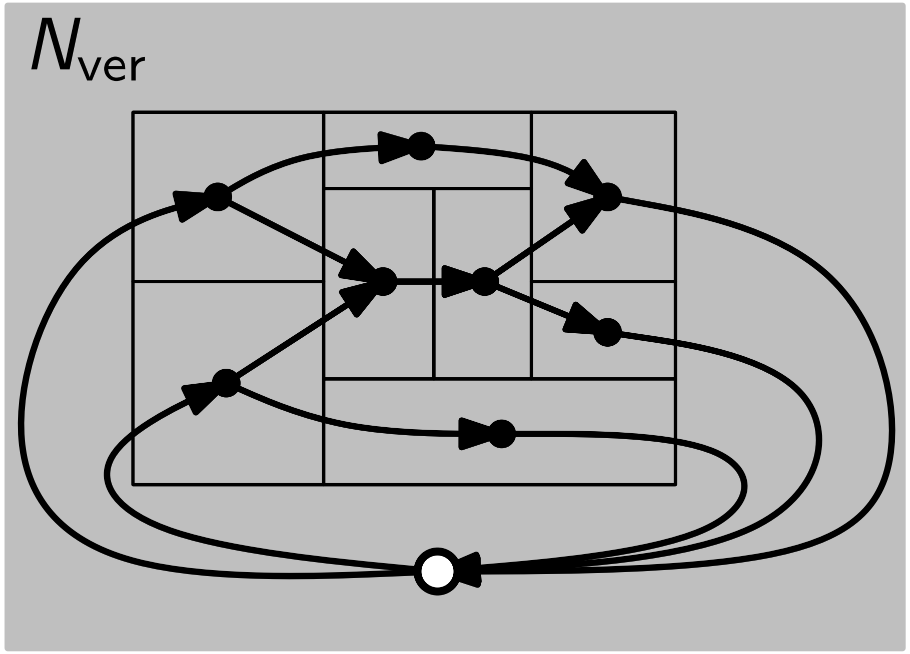
Optimal bei Rechtecken

Satz

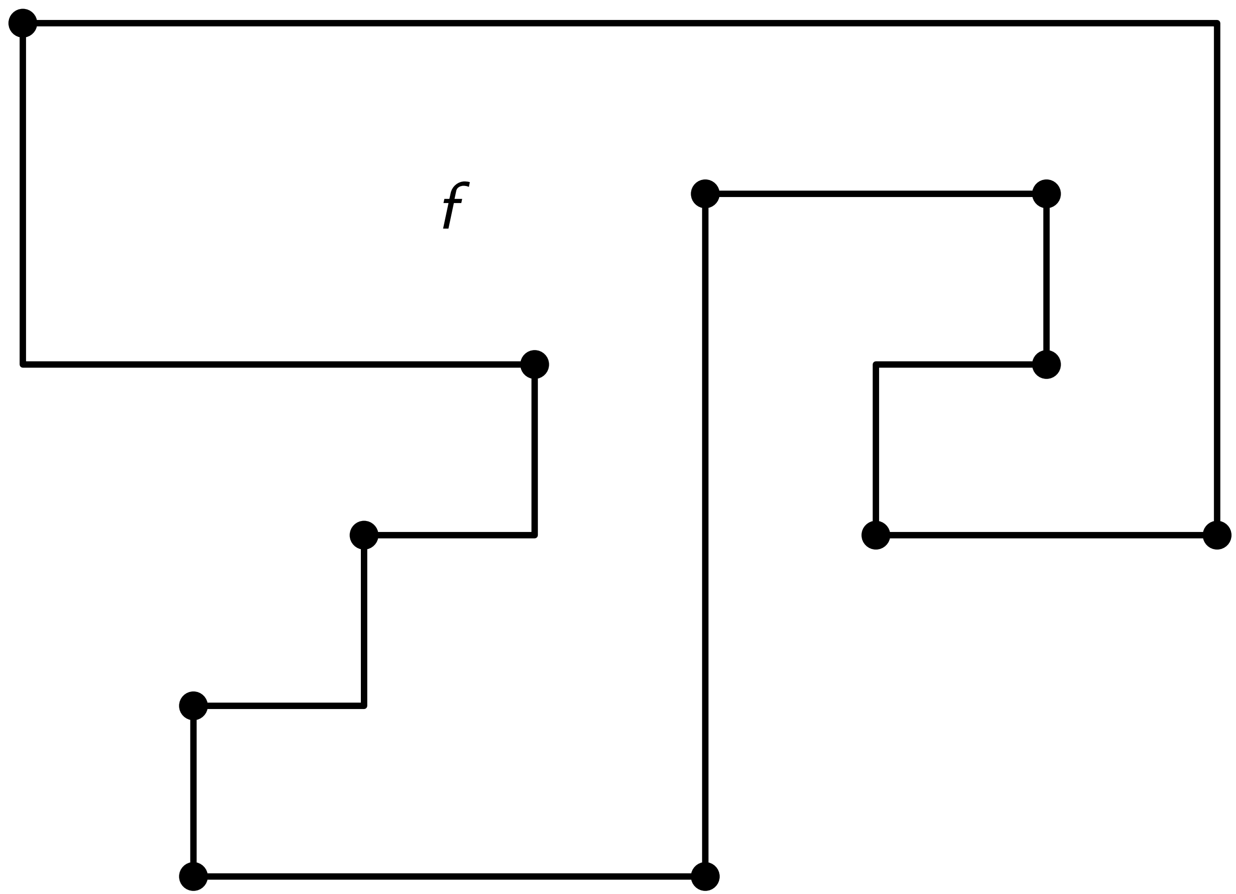
Min-Cost-Flüsse für N_{hor} und N_{ver} liefern:

1. X Fluss $\Leftrightarrow$ entspr. Kantenlängen induzieren orth. Zeichnung
2. $|X(N_{\text{hor}})| =$ Höhe, $|X(N_{\text{ver}})| =$ Breite
3. $\text{cost}(X(N_{\text{hor}})) + \text{cost}(X(N_{\text{ver}})) =$ Gesamtkantenlänge

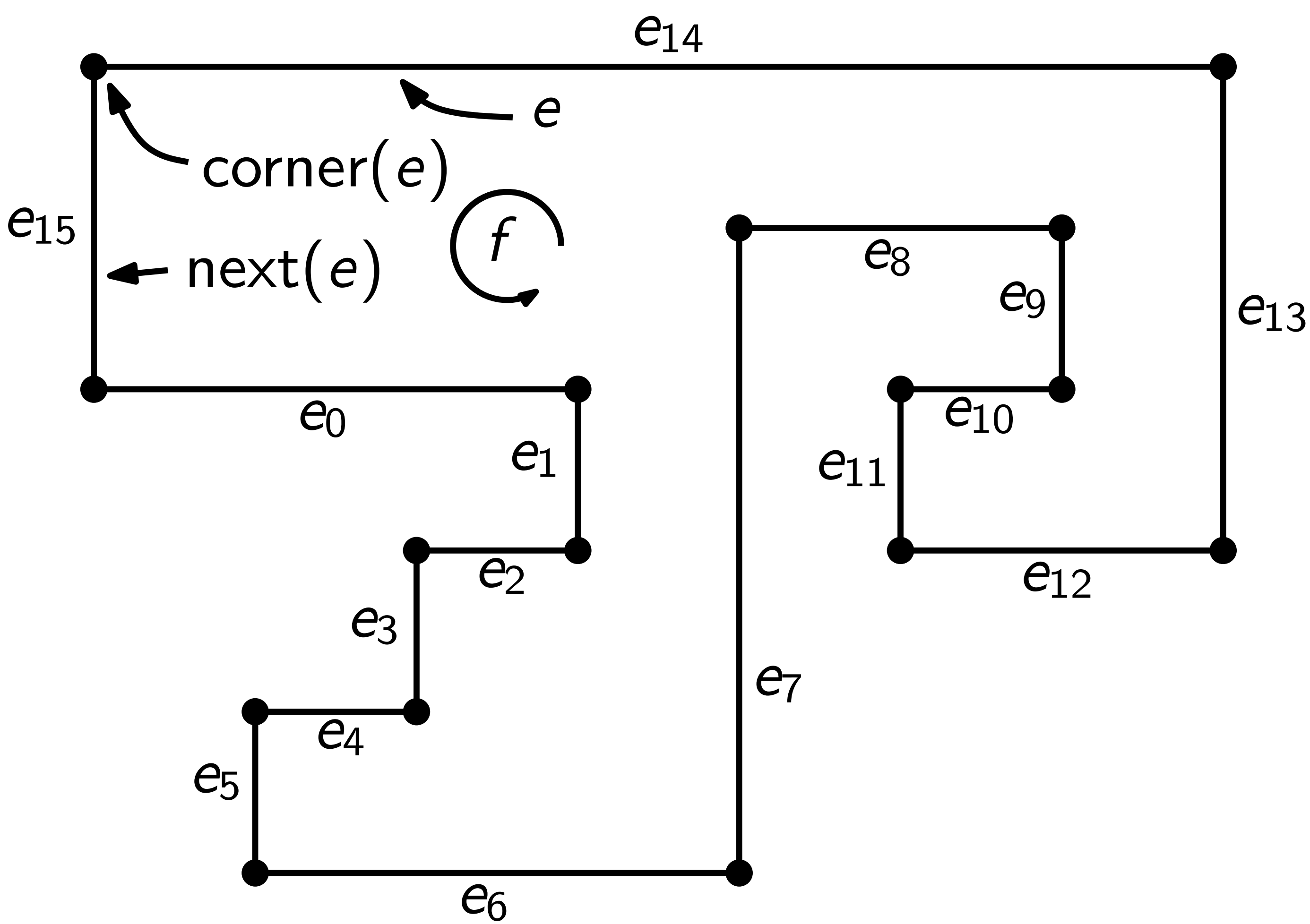




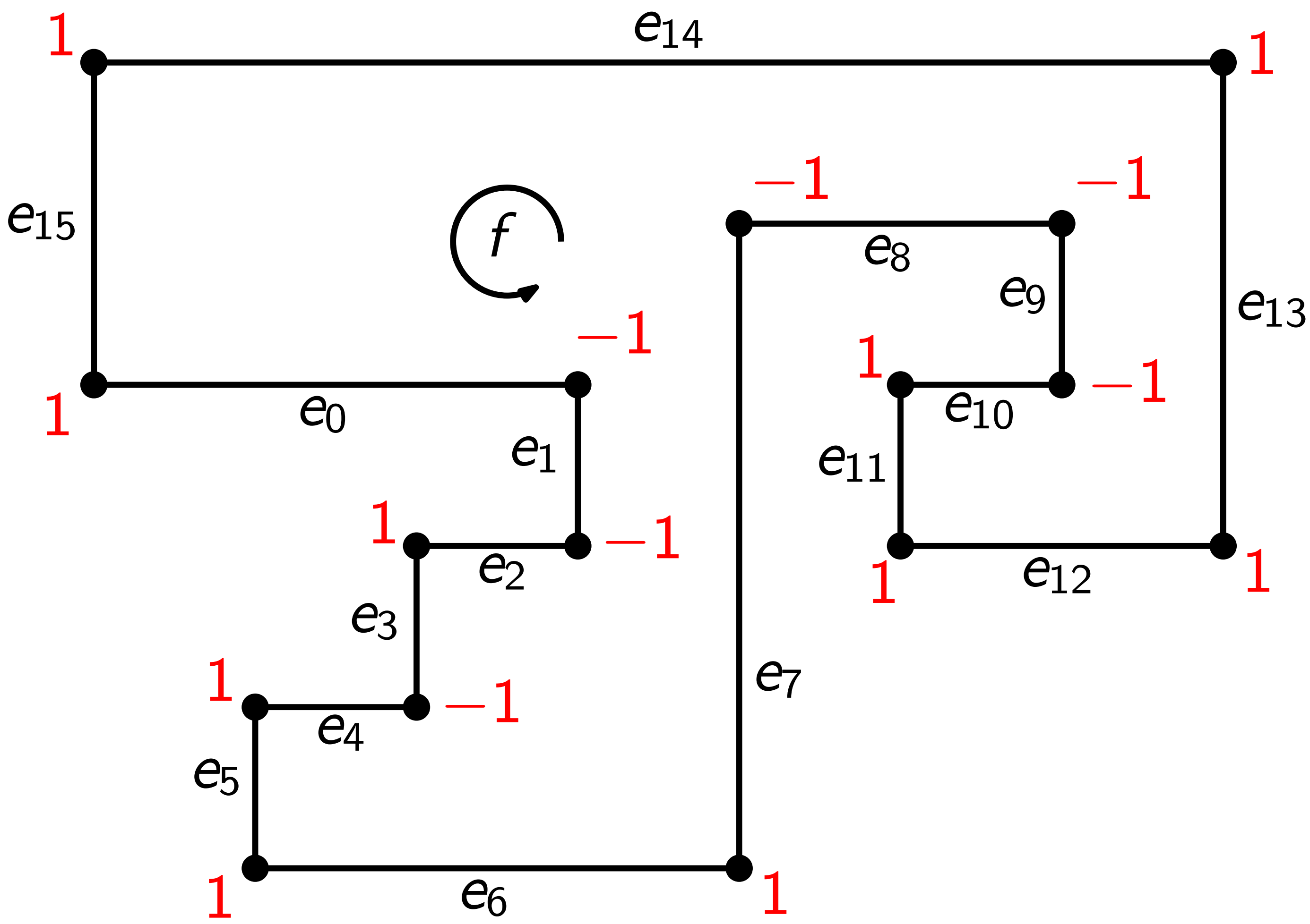
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



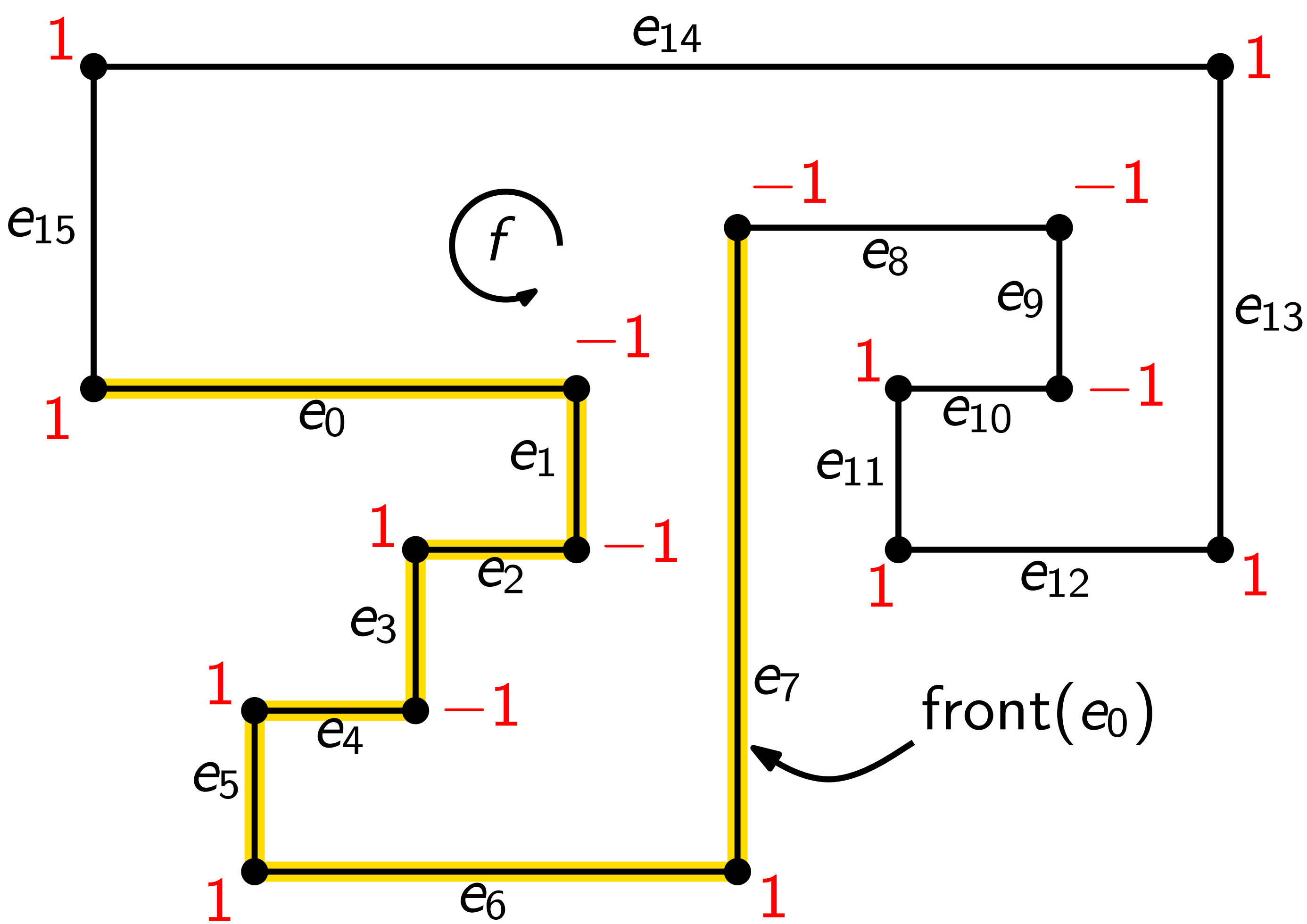
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



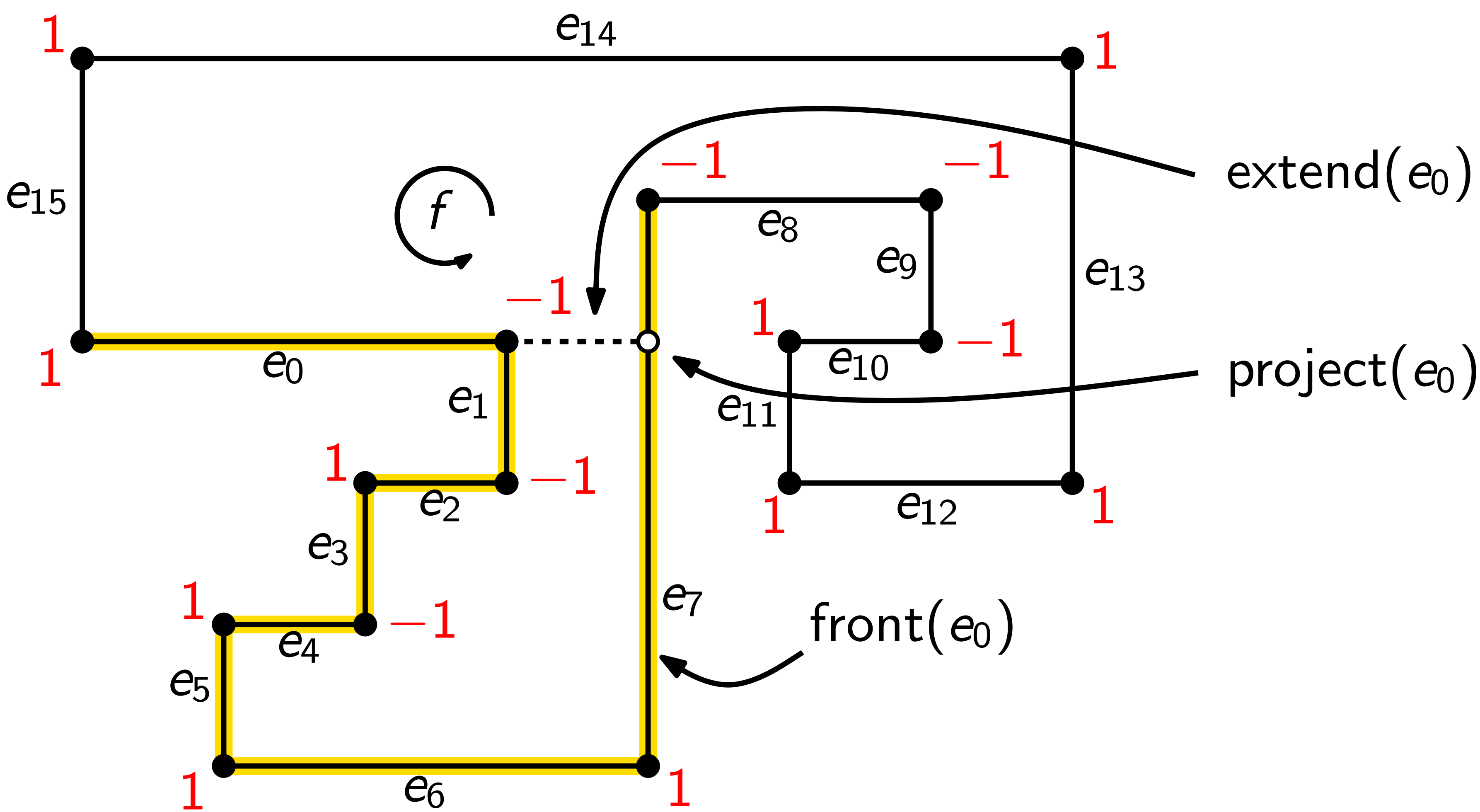
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



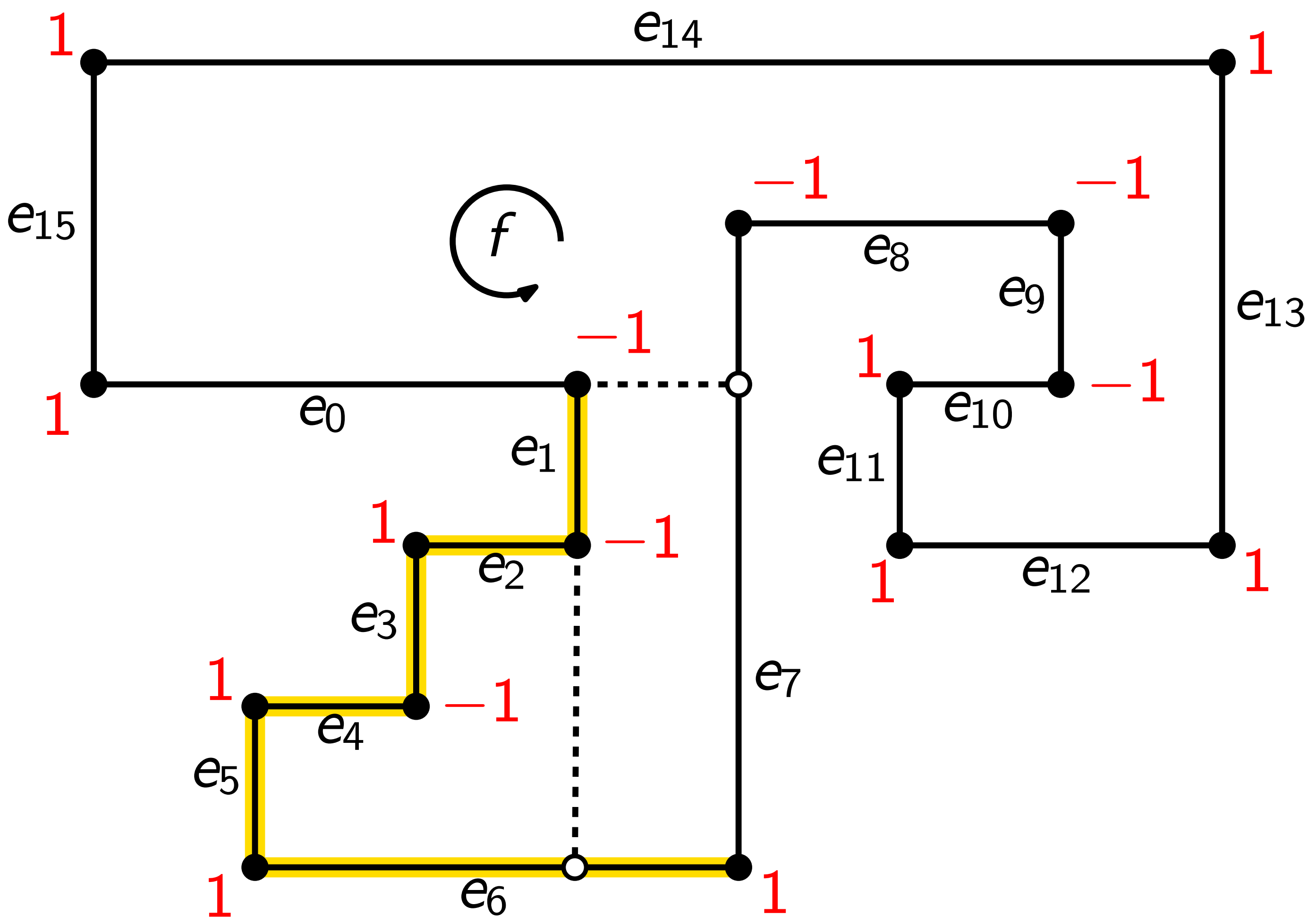
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



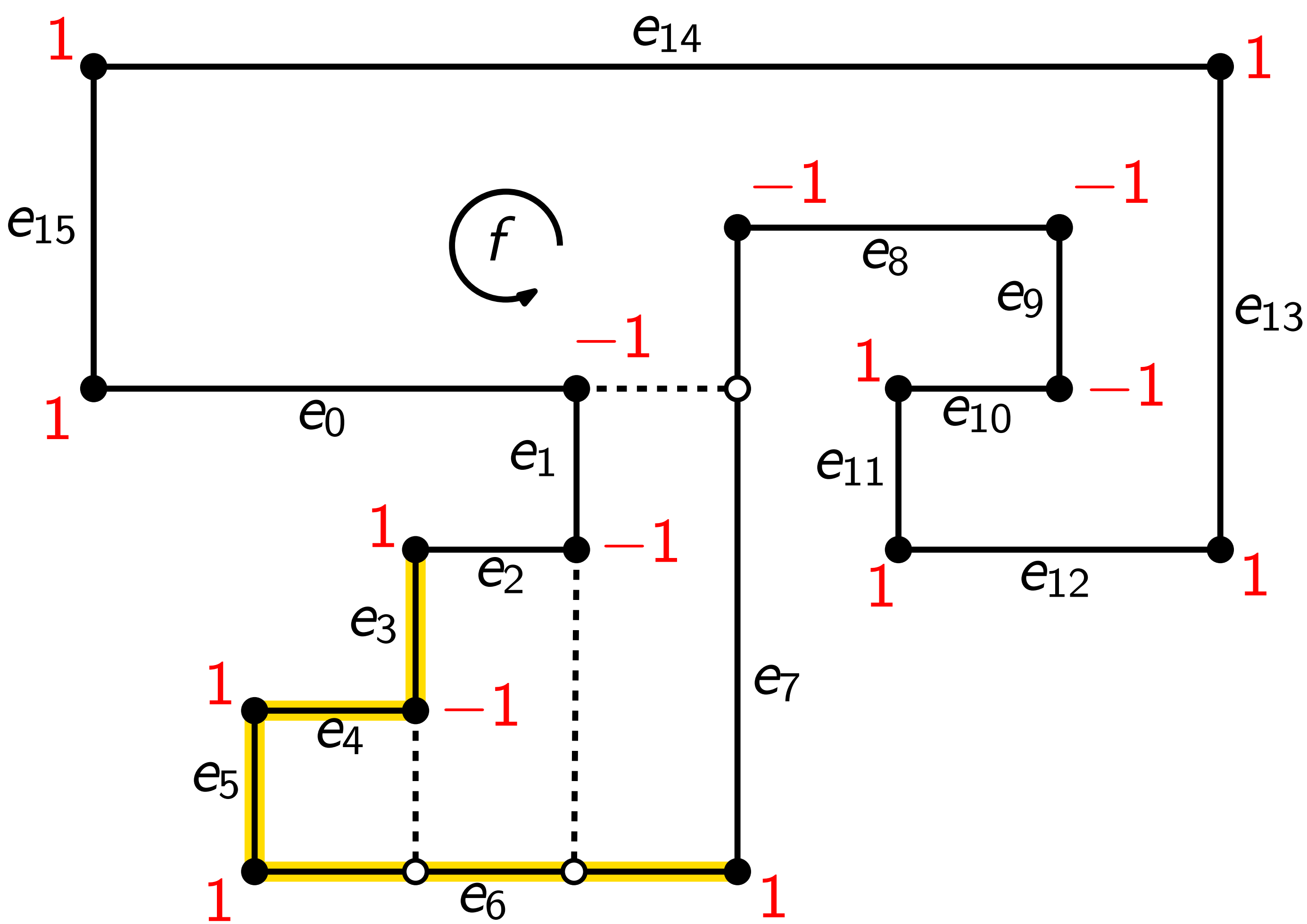
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



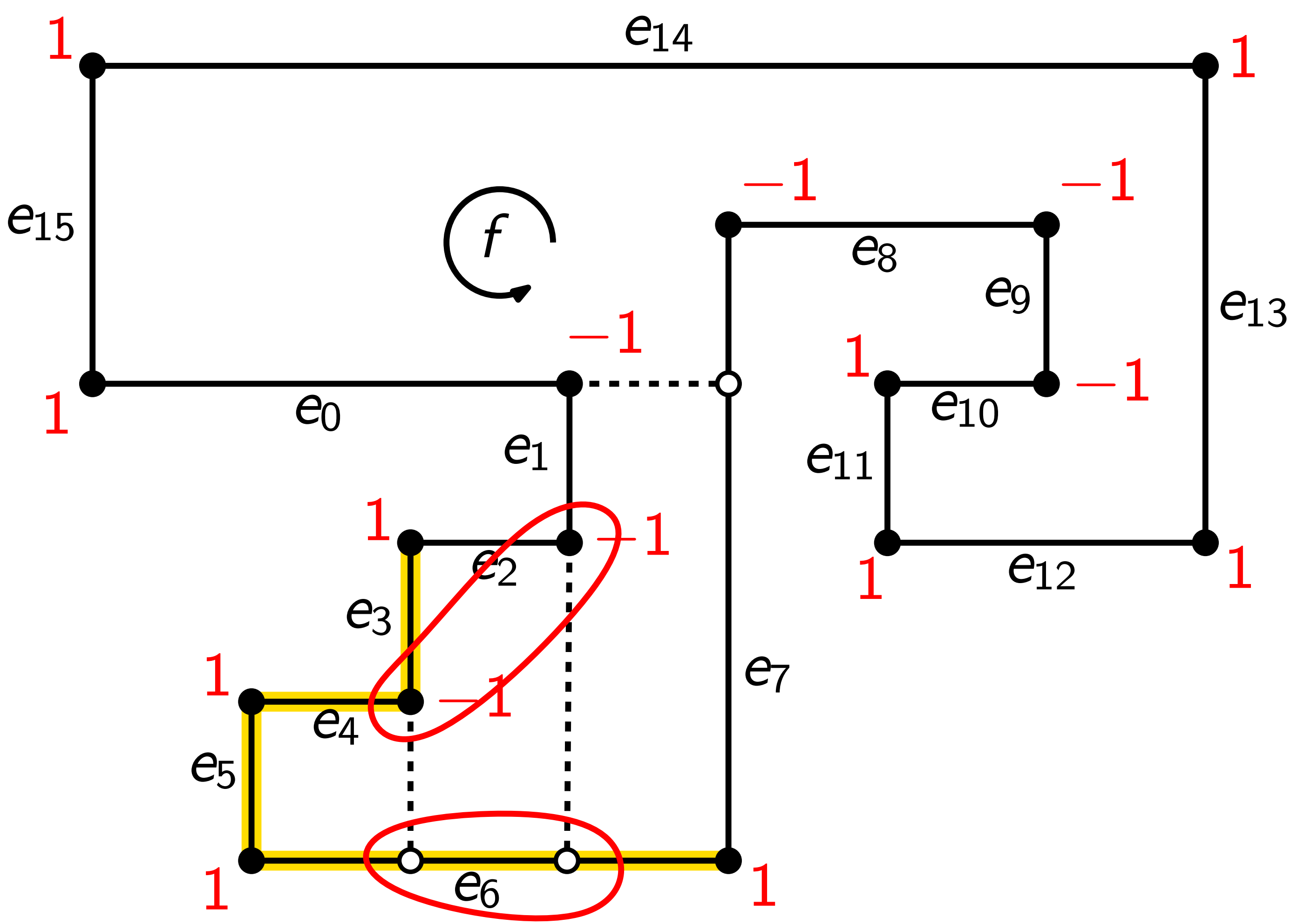
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



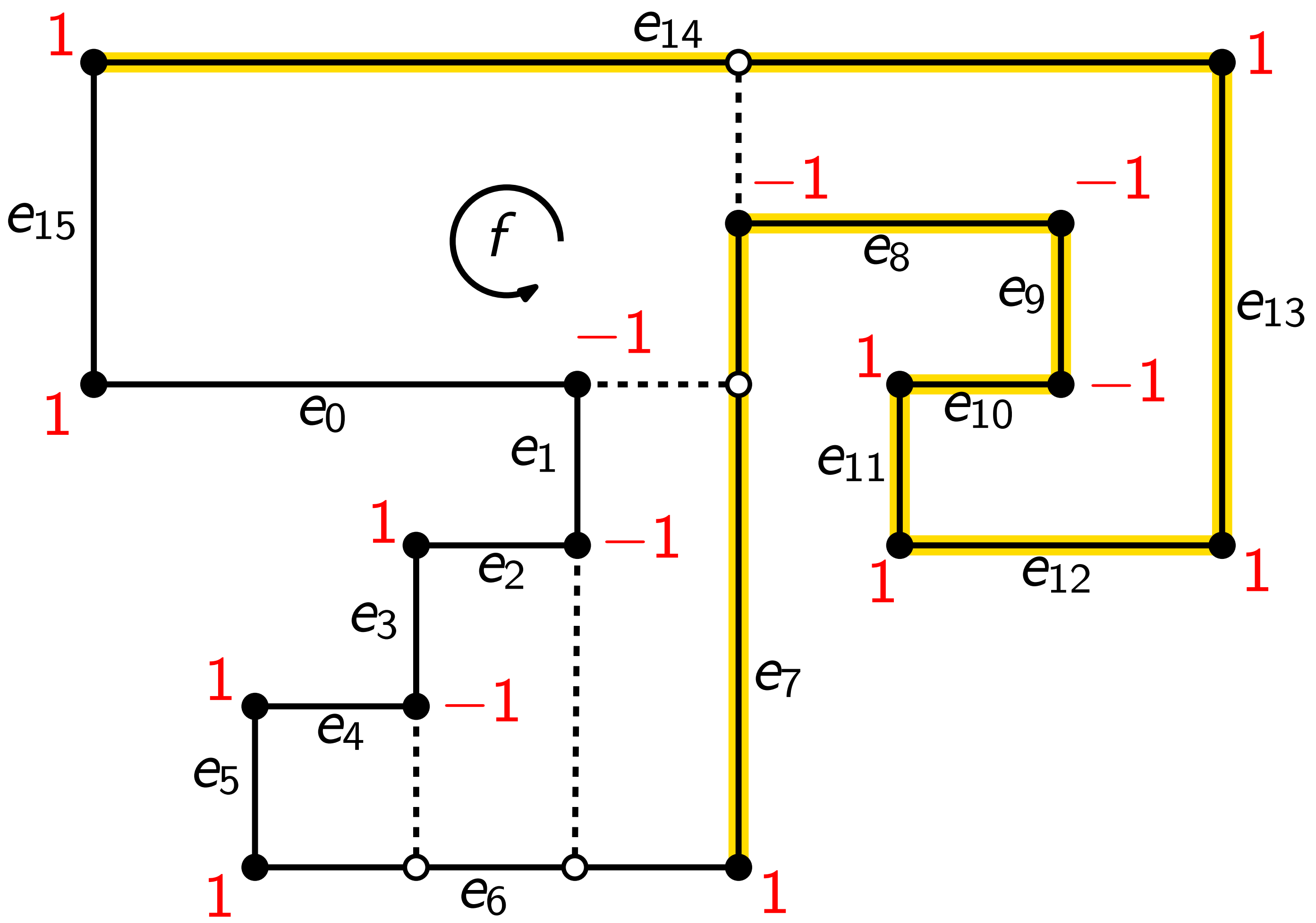
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



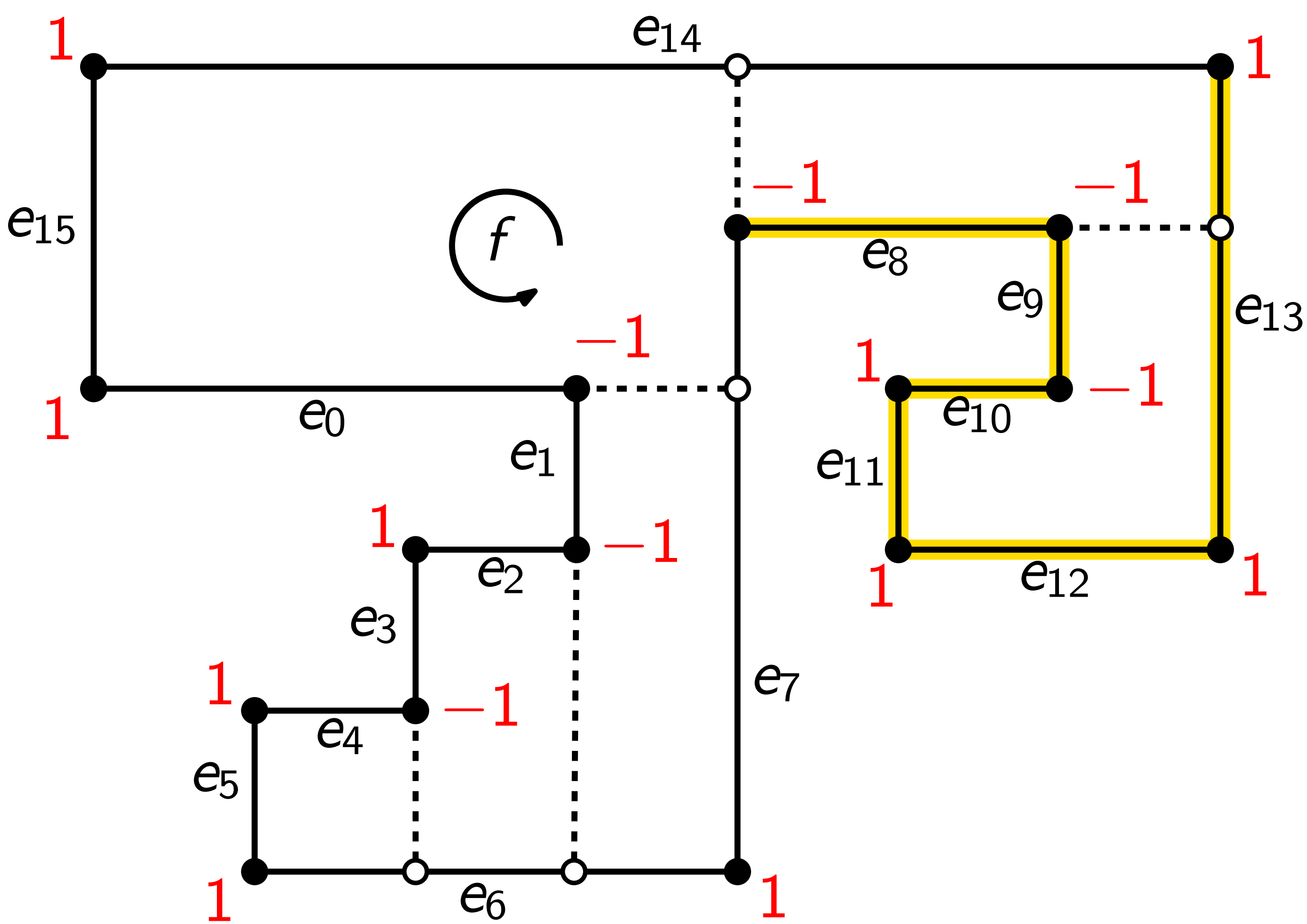
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



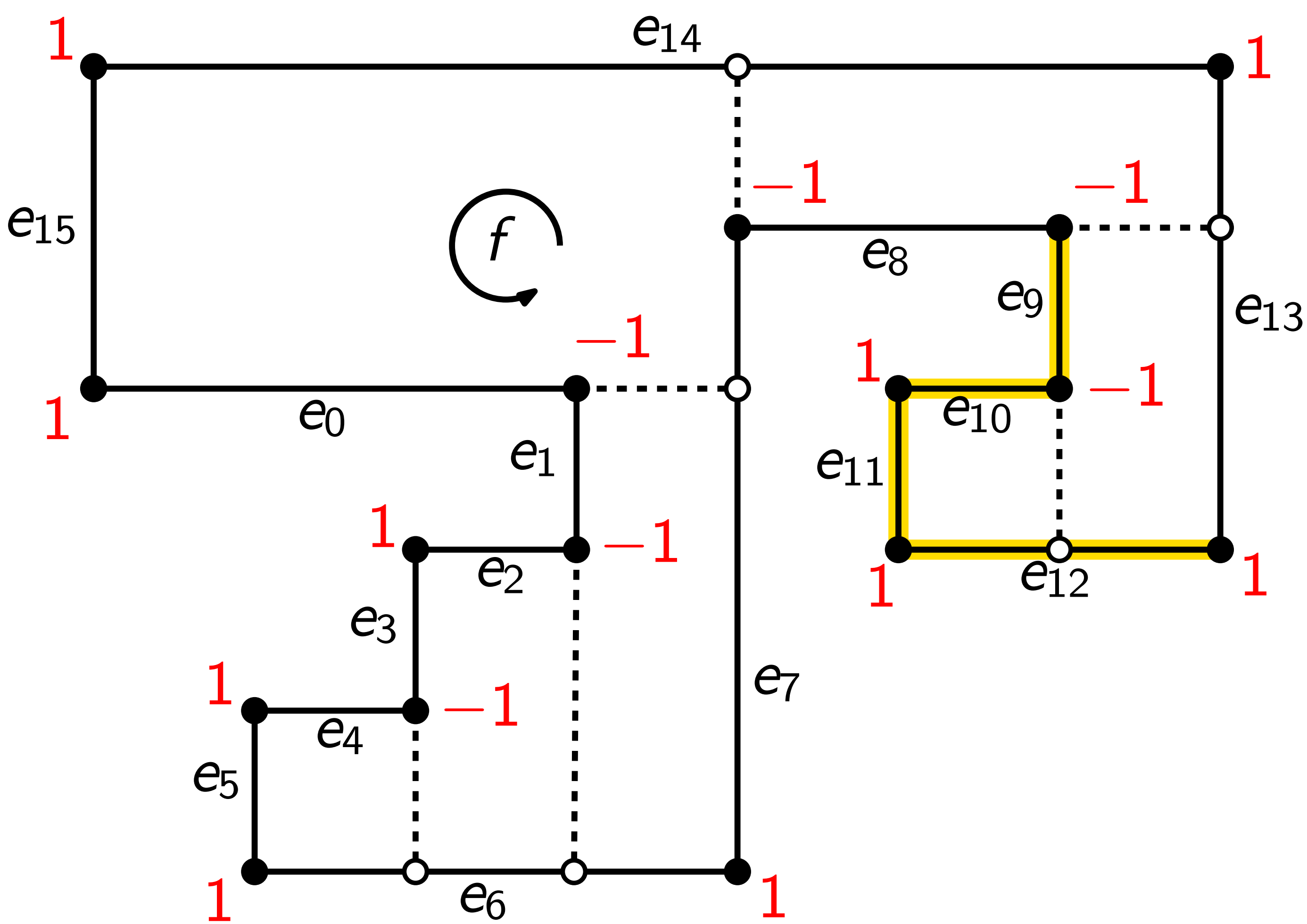
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



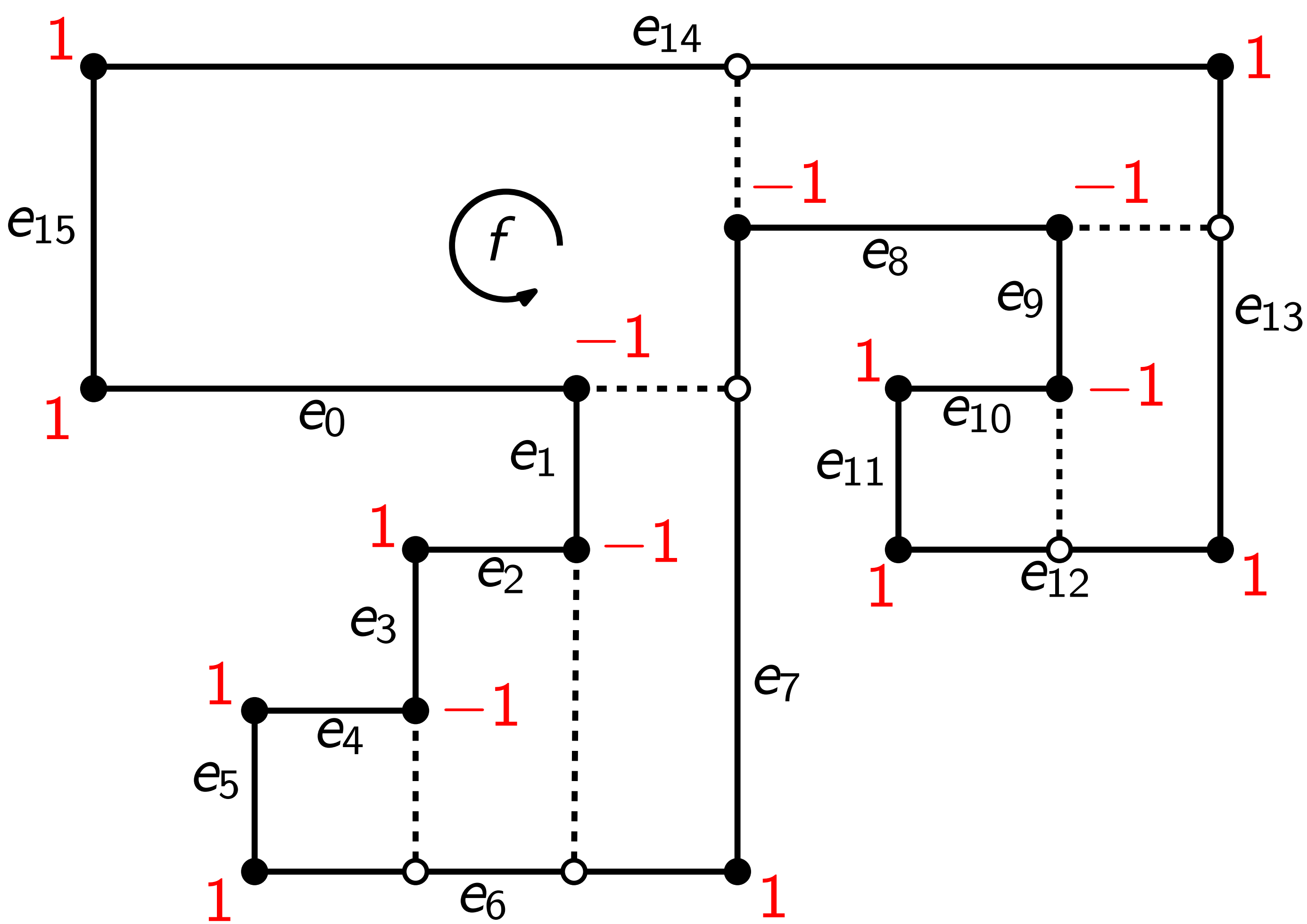
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



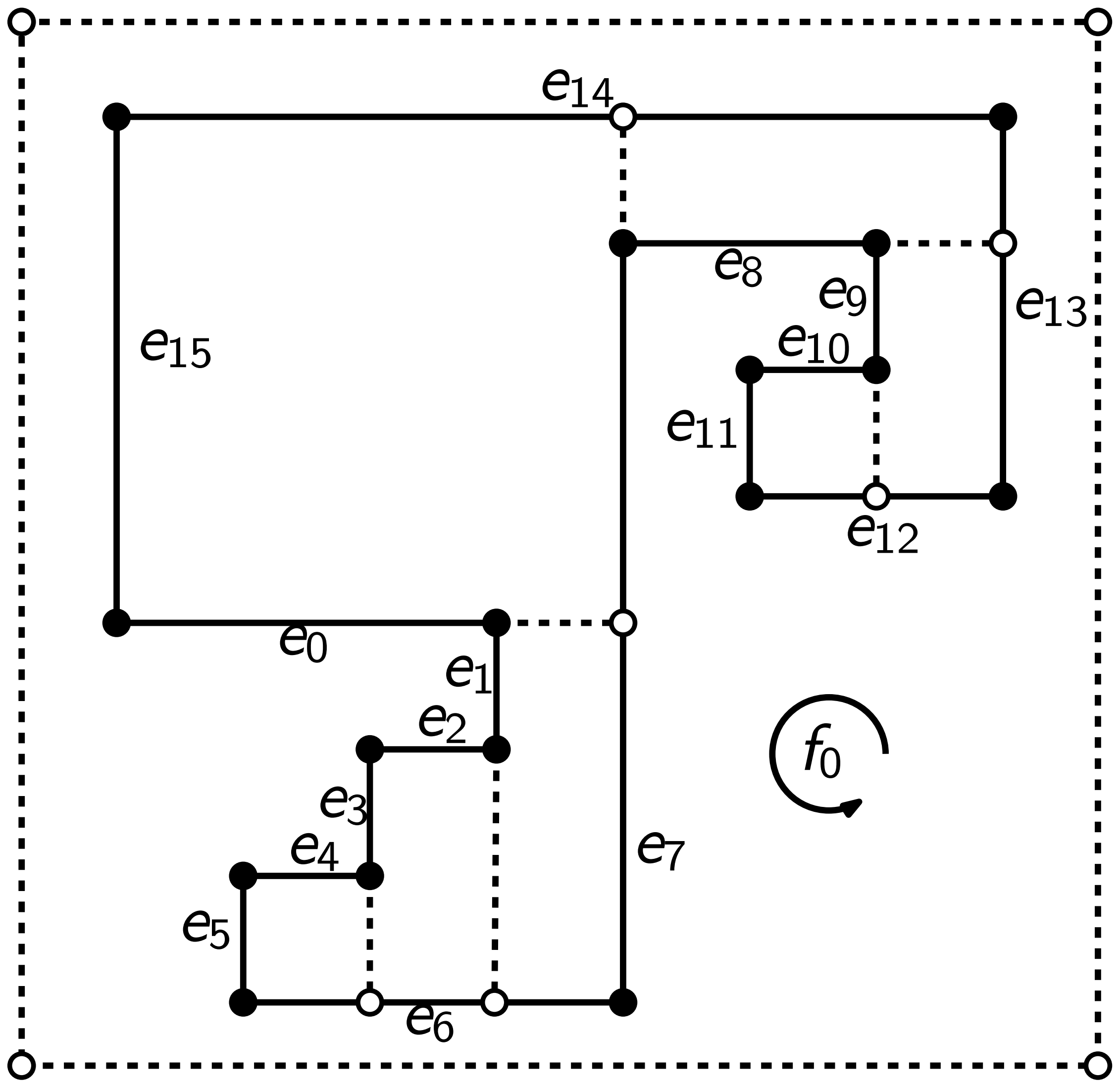
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



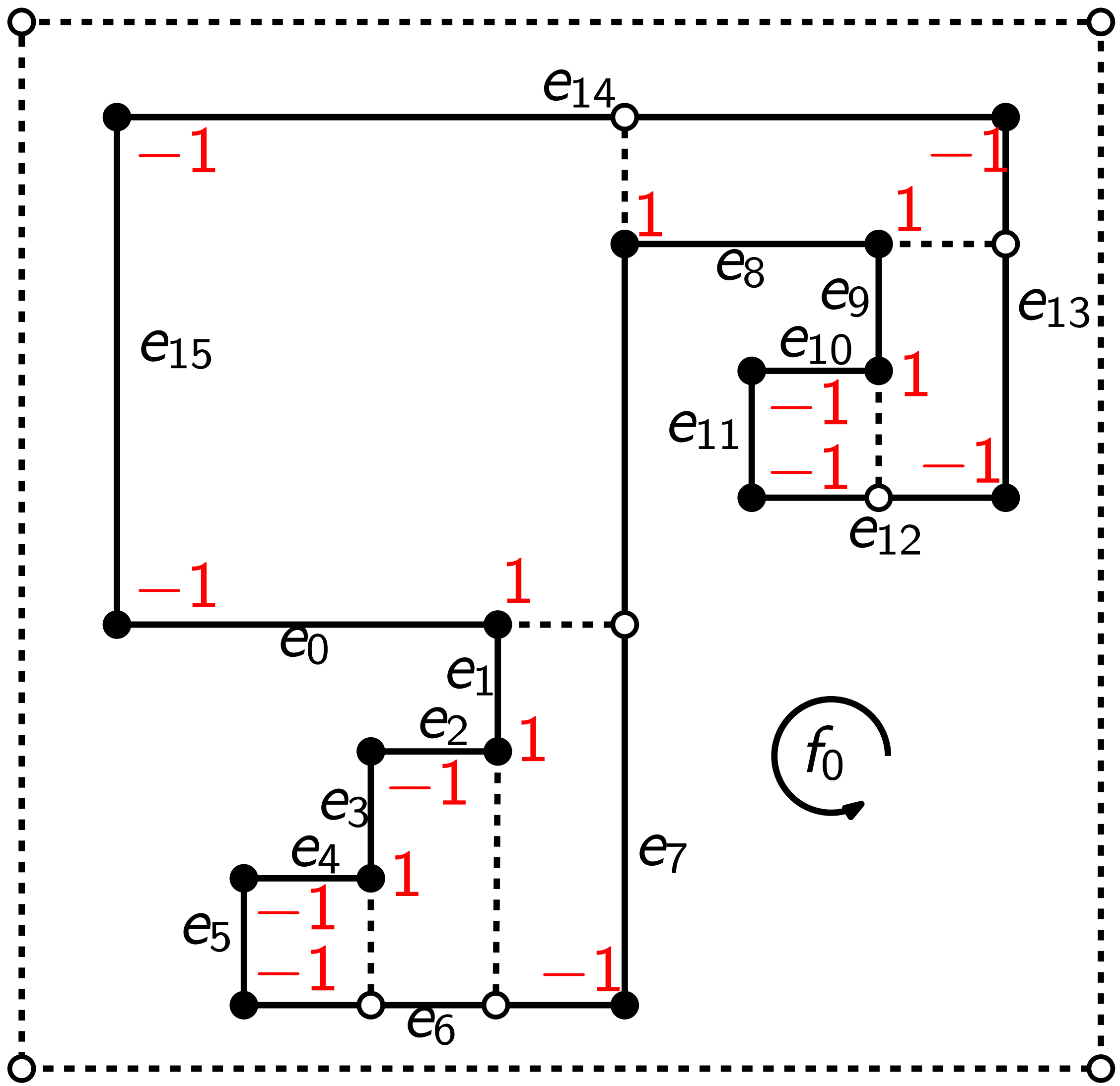
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



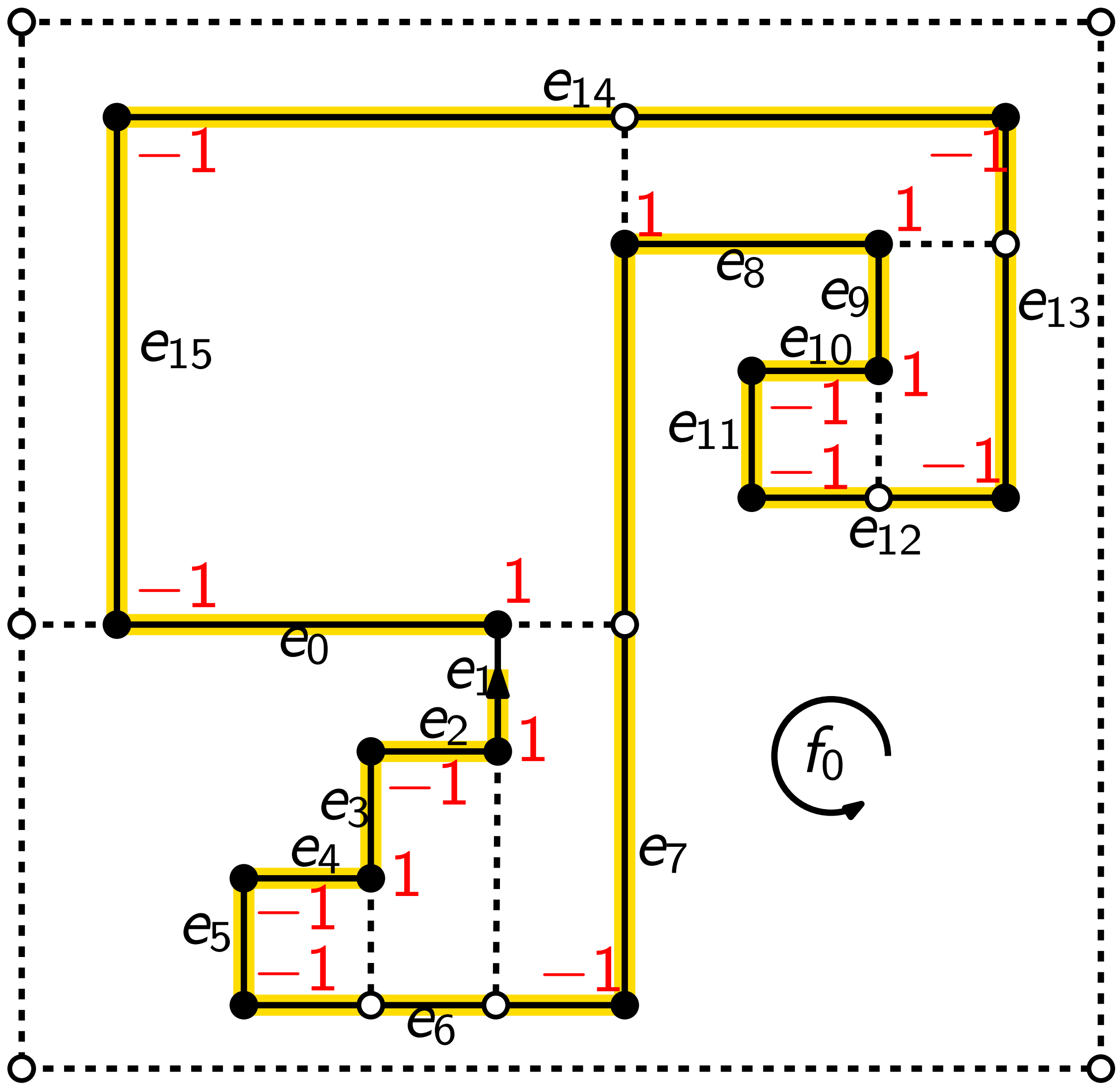
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



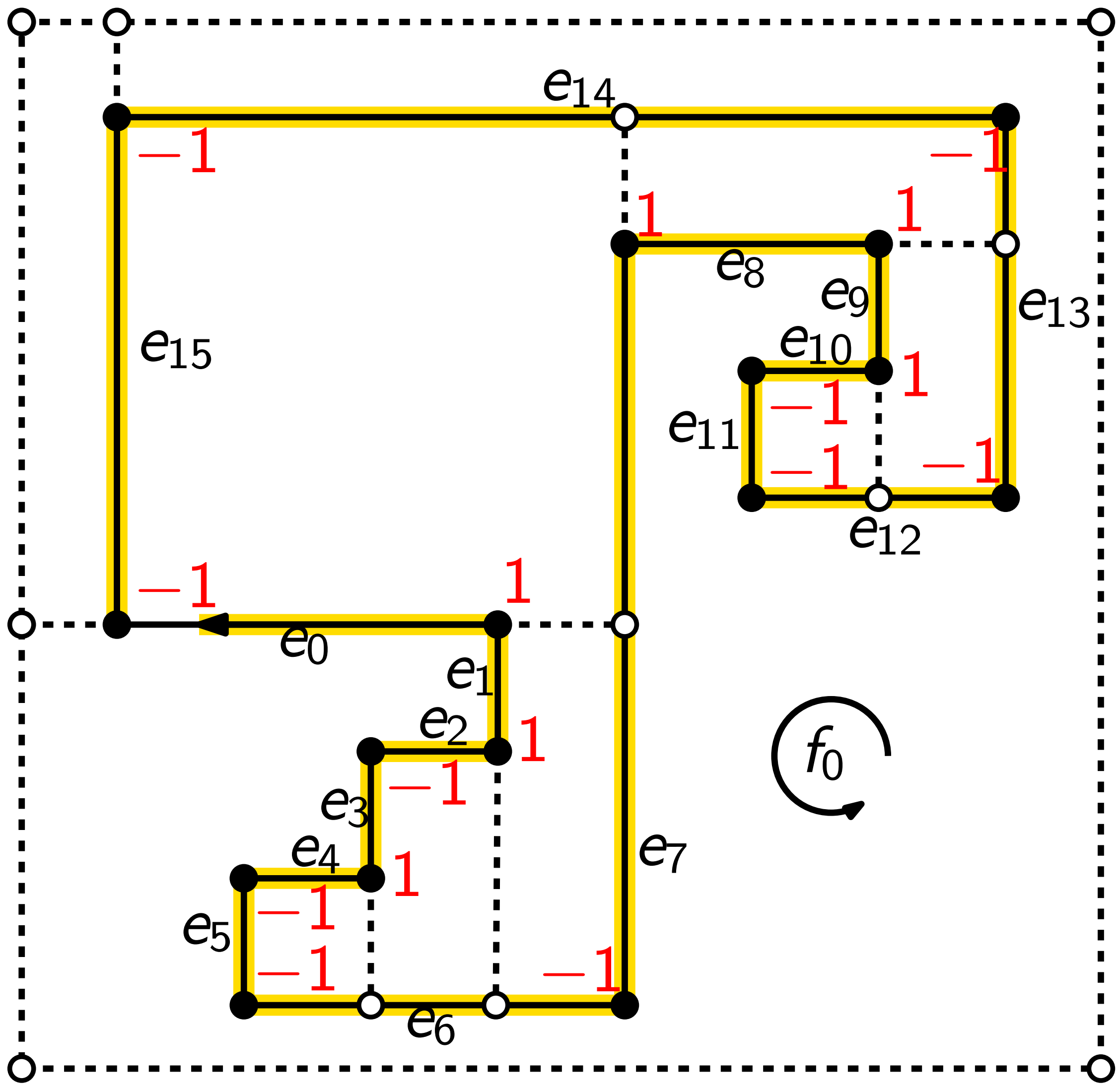
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



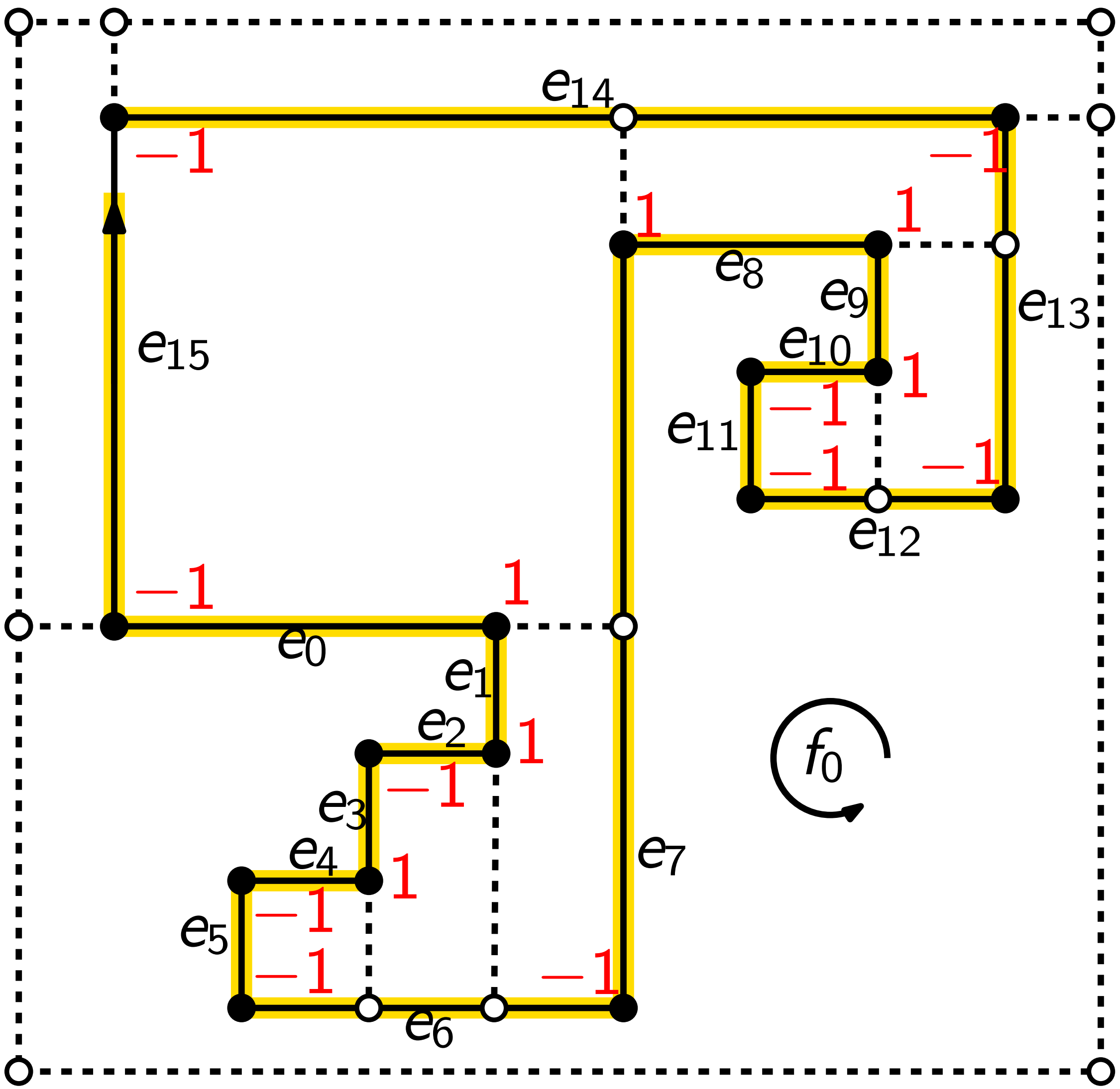
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



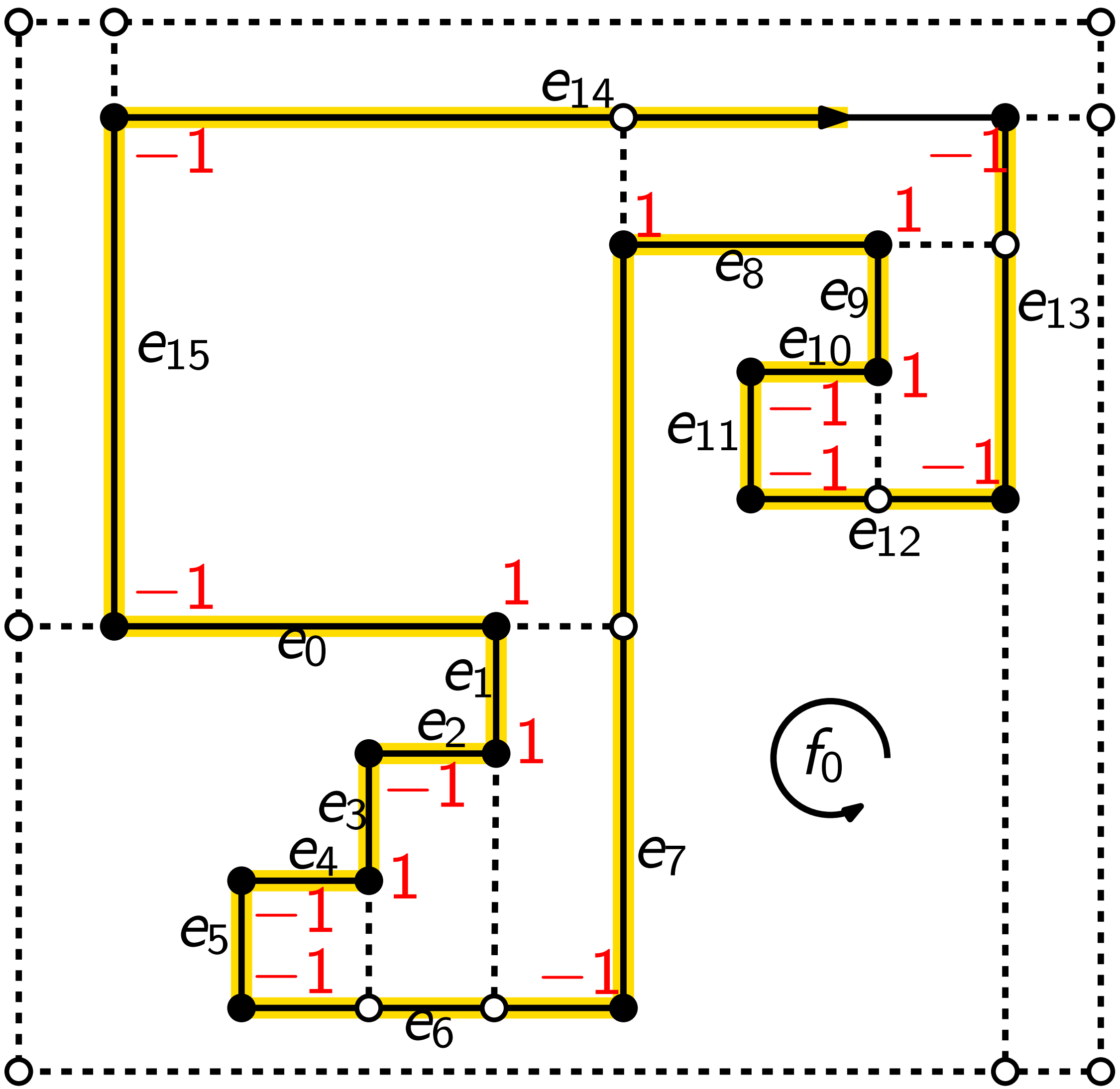
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



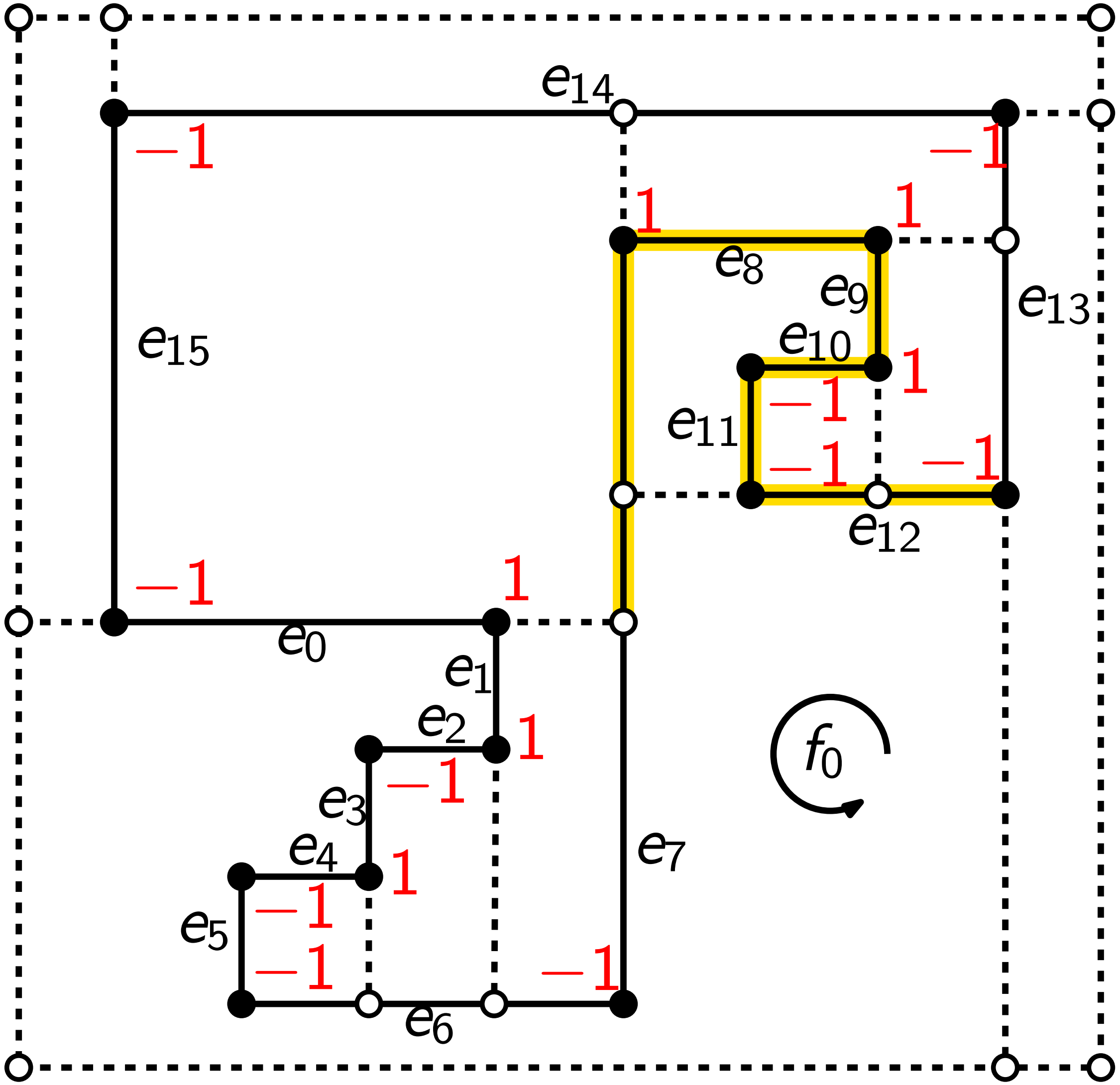
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



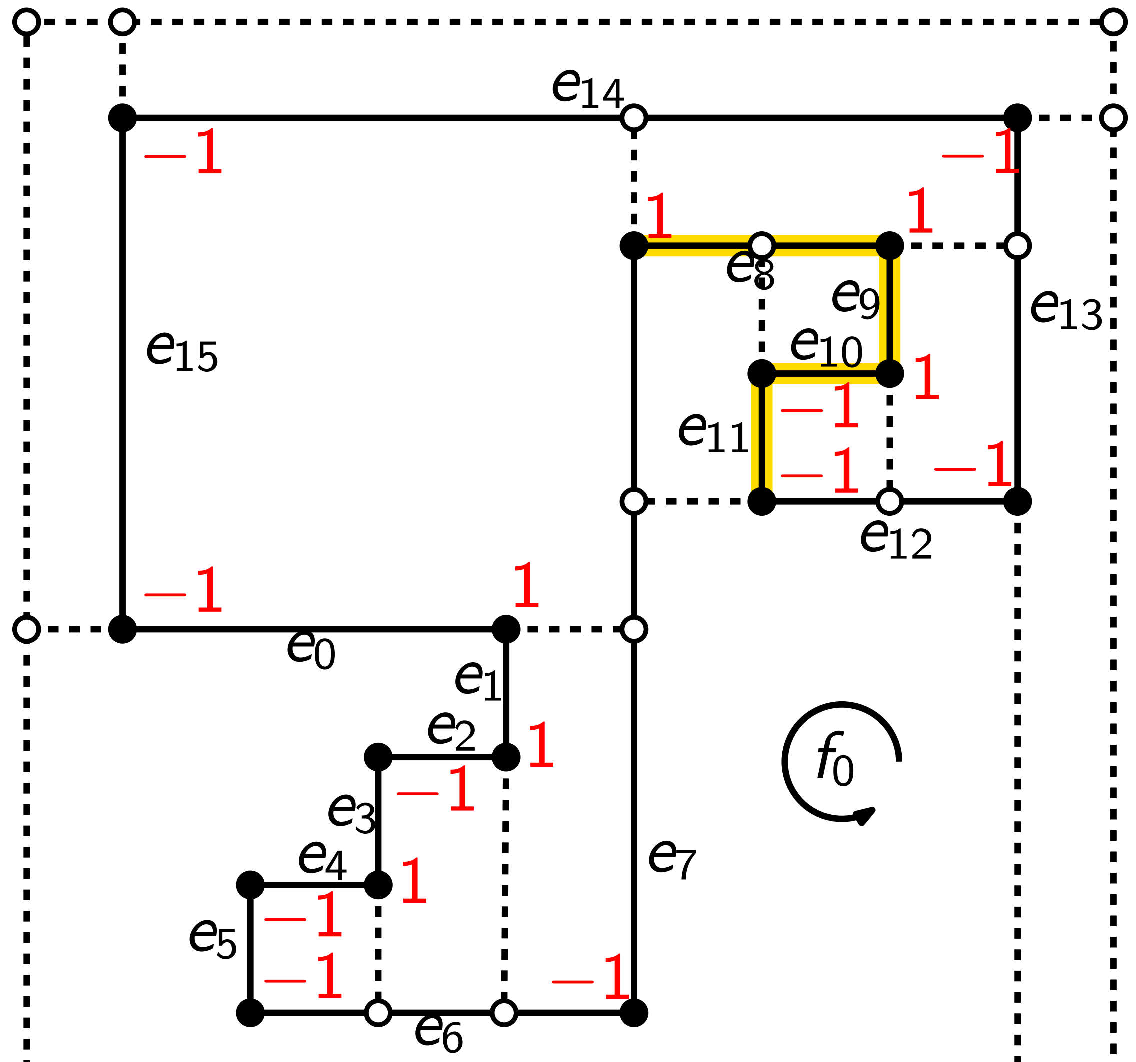
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



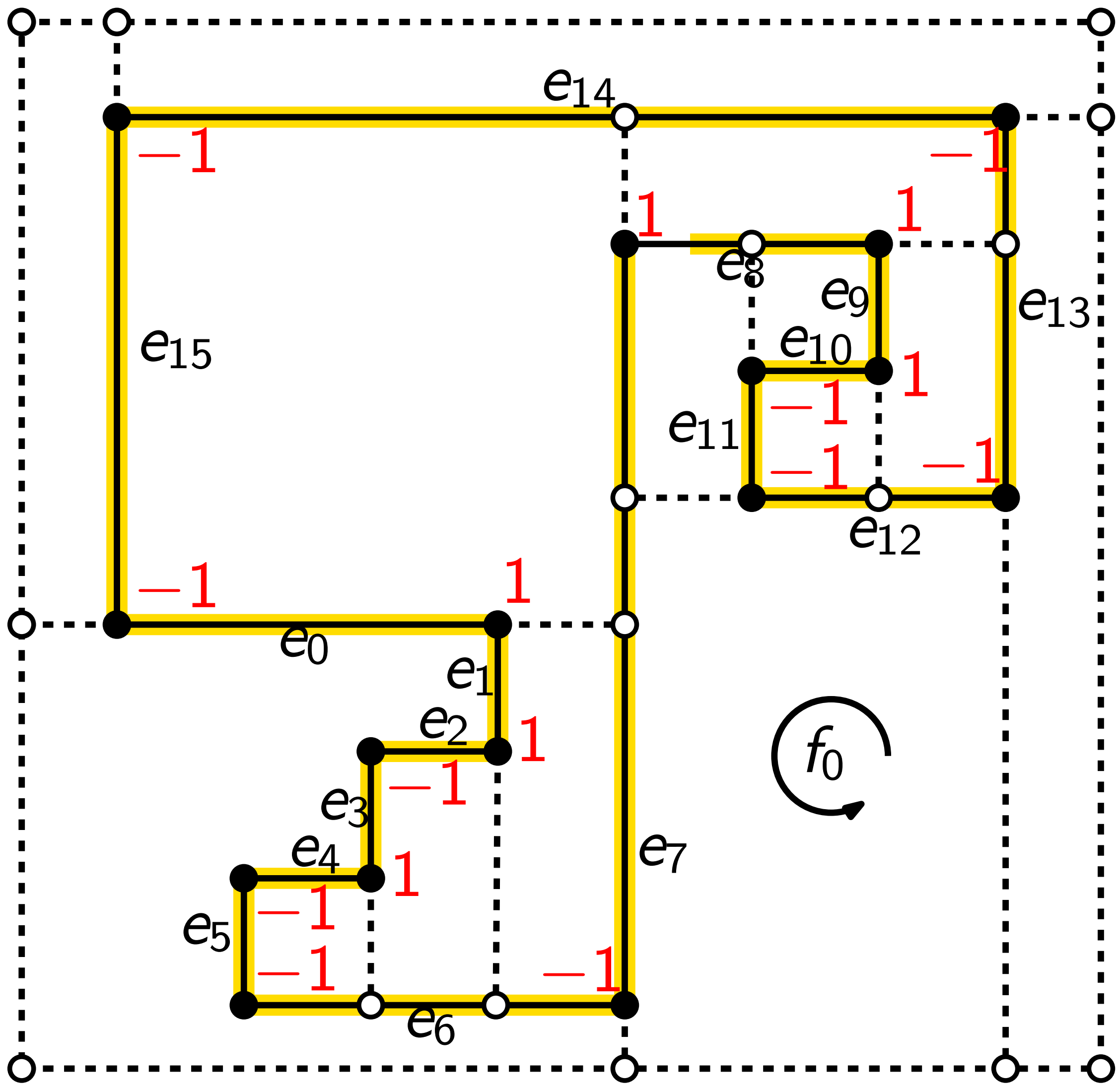
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



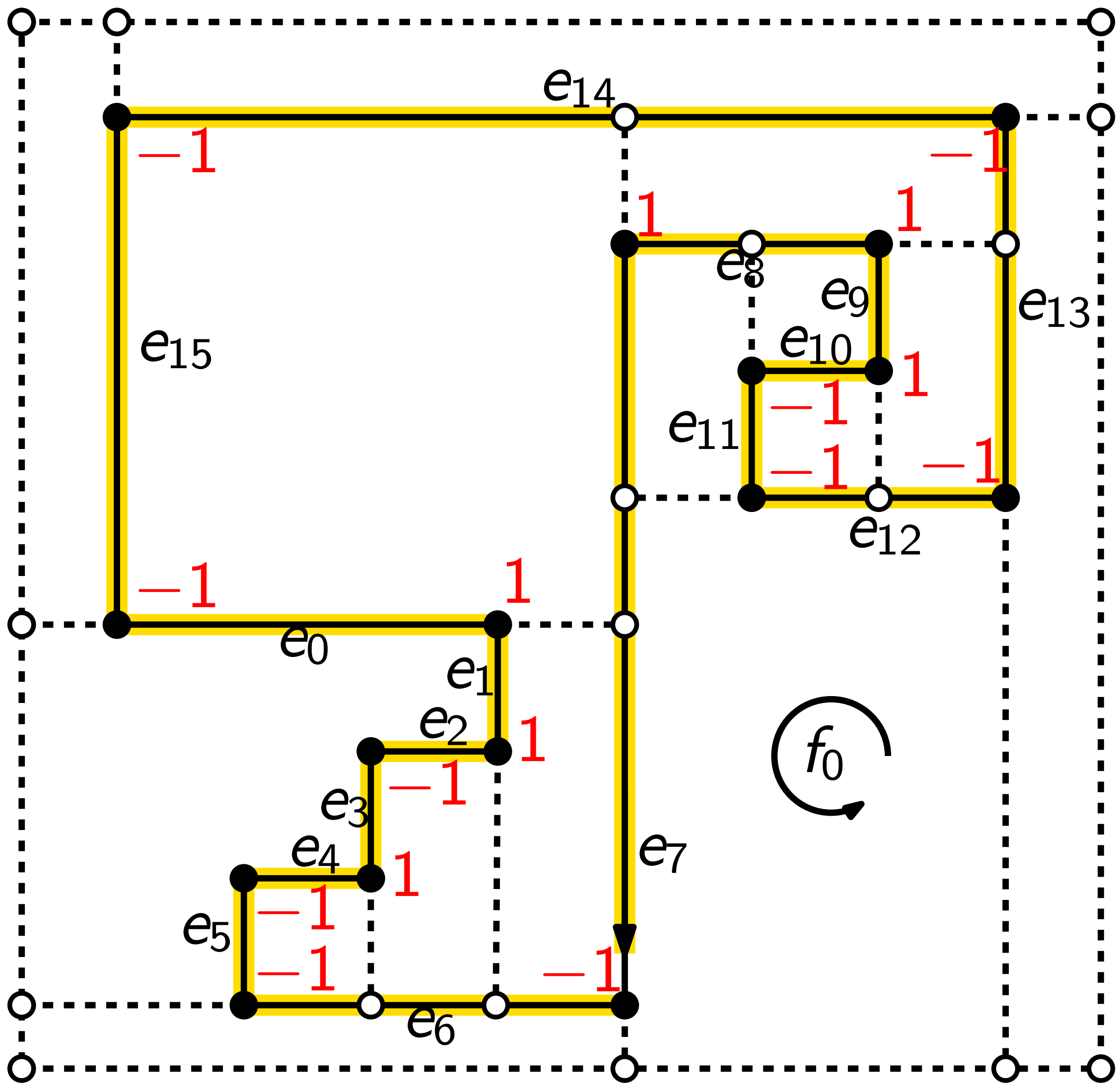
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



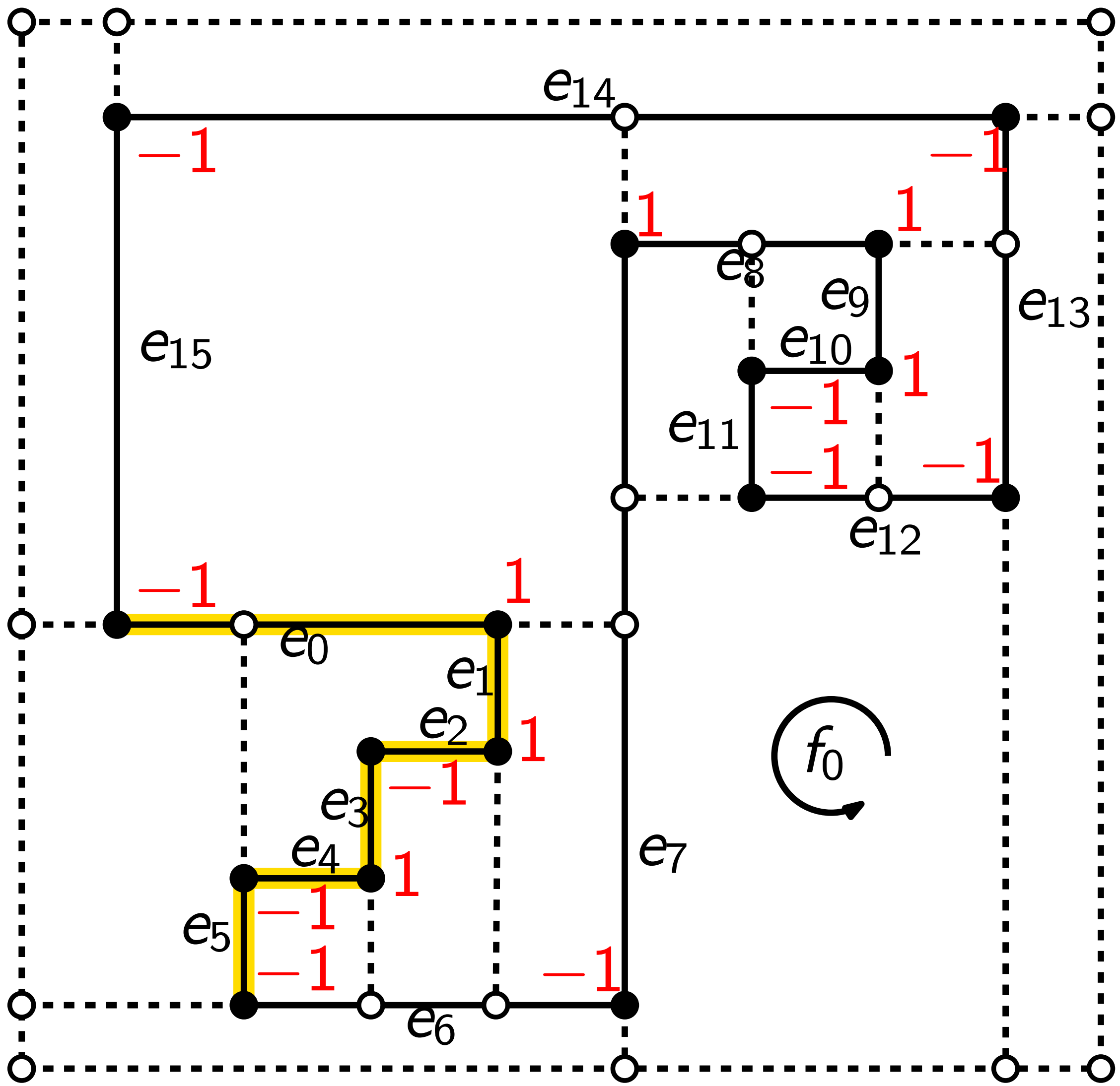
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



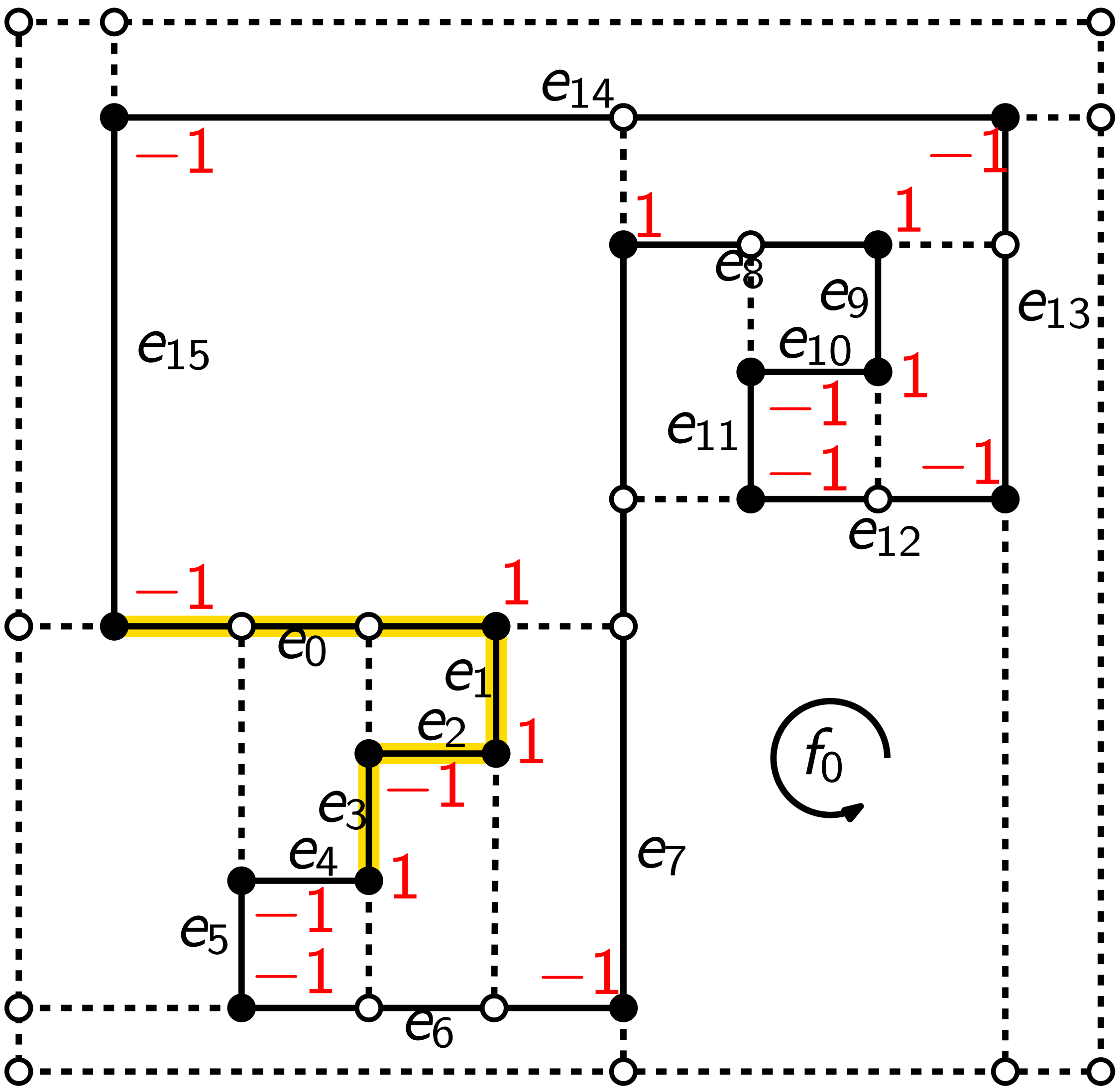
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



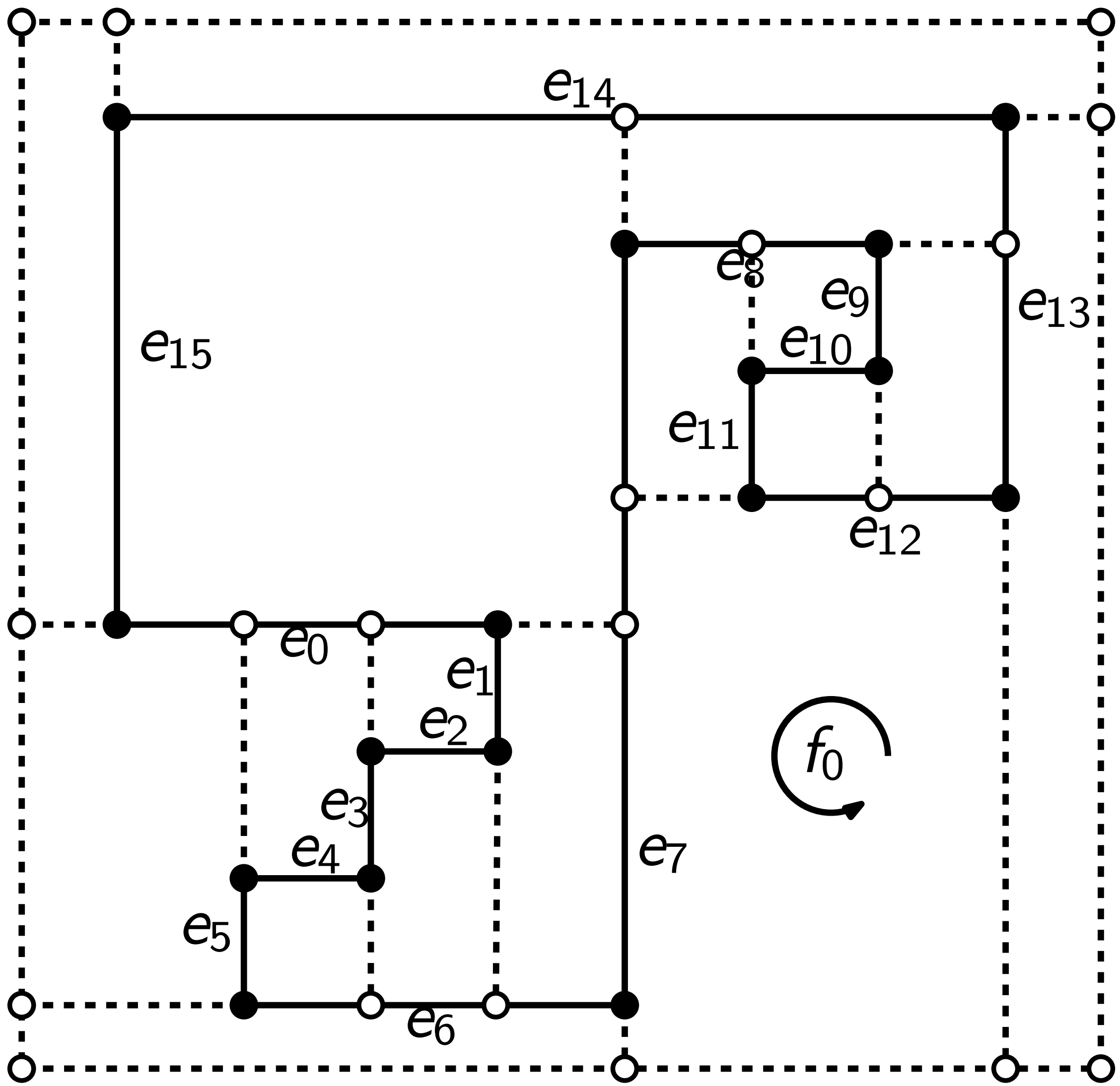
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



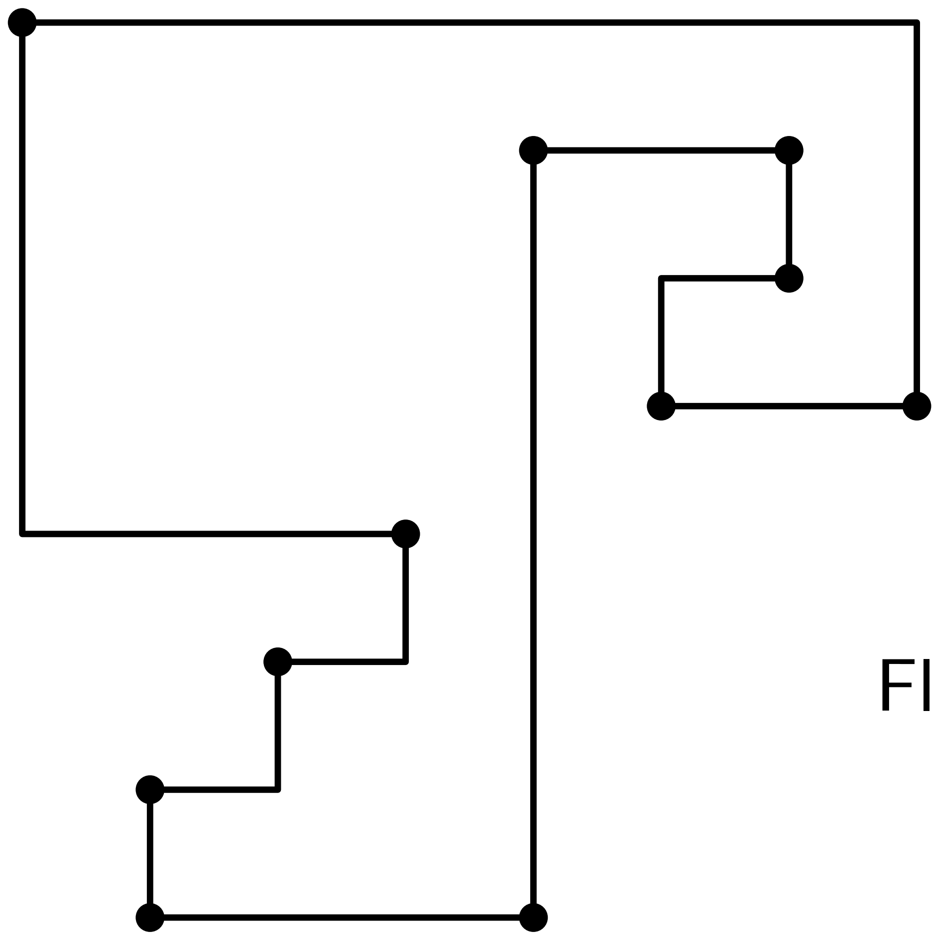
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette

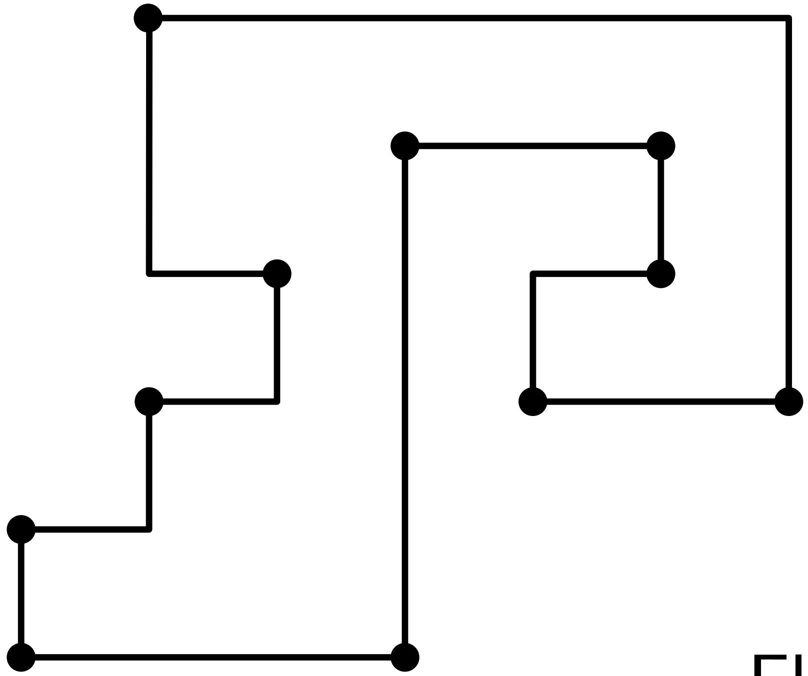


Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



Flächenminimal?

Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



Flächenminimal?

Nein!

Zusammenfassung Knickminimierung

- Knickminimierung bei fester Einbettung mittels Flussmodellierung
- optimale Kompaktierung für rechteckige Facetten
- Erweiterung auf allgemeinen Fall nicht mehr optimal
- Kompaktierung i.A. NP-schwer

Zusammenfassung Knickminimierung

- Knickminimierung bei fester Einbettung mittels Flussmodellierung
- optimale Kompaktierung für rechteckige Facetten
- Erweiterung auf allgemeinen Fall nicht mehr optimal
- Kompaktierung i.A. NP-schwer

Mögliche Erweiterungen

- Knotengrad ≥ 4
- nicht-planare Graphen

Übung

Zusammenfassung Knickminimierung

- Knickminimierung bei fester Einbettung mittels Flussmodellierung
- optimale Kompaktierung für rechteckige Facetten
- Erweiterung auf allgemeinen Fall nicht mehr optimal
- Kompaktierung i.A. NP-schwer

Mögliche Erweiterungen

- Knotengrad ≥ 4
- nicht-planare Graphen

Übung

Kompaktierung ist NP-schwer [Patrignani '01]

≫ Reduktion von **SAT**

Kompaktierung ist NP-schwer [Patrignani '01]

- Reduktion von **SAT**
  - n Variablen $x_1, \dots, x_n$
  - m Klauseln $C_1, \dots, C_m$;
  - Klausel: Disjunktion von Literalen $x_i / \overline{x_i}$
    z.B.: $C_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
  - Ist $\Phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ erfüllbar, d.h. gibt es eine Belegung der Variablen, die alle Klauseln erfüllt?

Kompaktierung ist NP-schwer [Patrignani '01]

- Reduktion von **SAT**
  - n Variablen $x_1, \ldots, x_n$
  - m Klauseln $C_1, \ldots, C_m$;
  - Klausel: Disjunktion von Literalen $x_i / \overline{x_i}$
    z.B.: $C_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
  - Ist $\Phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$ erfüllbar, d.h. gibt es eine Belegung der Variablen, die alle Klauseln erfüllt?

- Bestimme geeigneten Wert K.

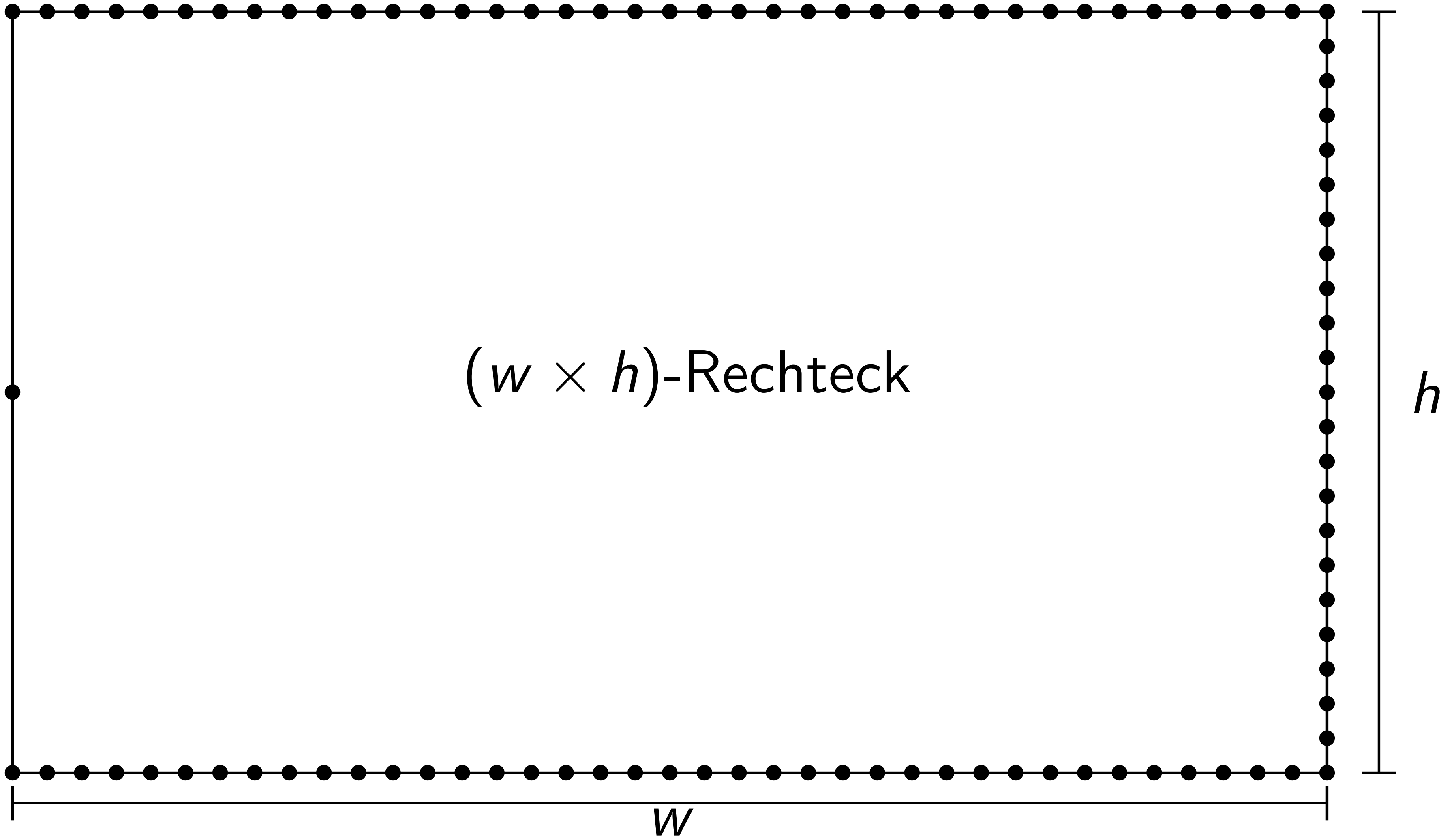
Kompaktierung ist NP-schwer [Patrignani '01]

- Reduktion von **SAT**
  - n Variablen $x_1, \dots, x_n$
  - m Klauseln $C_1, \dots, C_m$;
  - Klausel: Disjunktion von Literalen $x_i / \overline{x_i}$
    z.B.: $C_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
  - Ist $\Phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ erfüllbar, d.h. gibt es eine Belegung der Variablen, die alle Klauseln erfüllt?
- Bestimme geeigneten Wert K.
- (G, H) lässt sich in Fläche K zeichnen $\Leftrightarrow$ Φ erfüllbar.

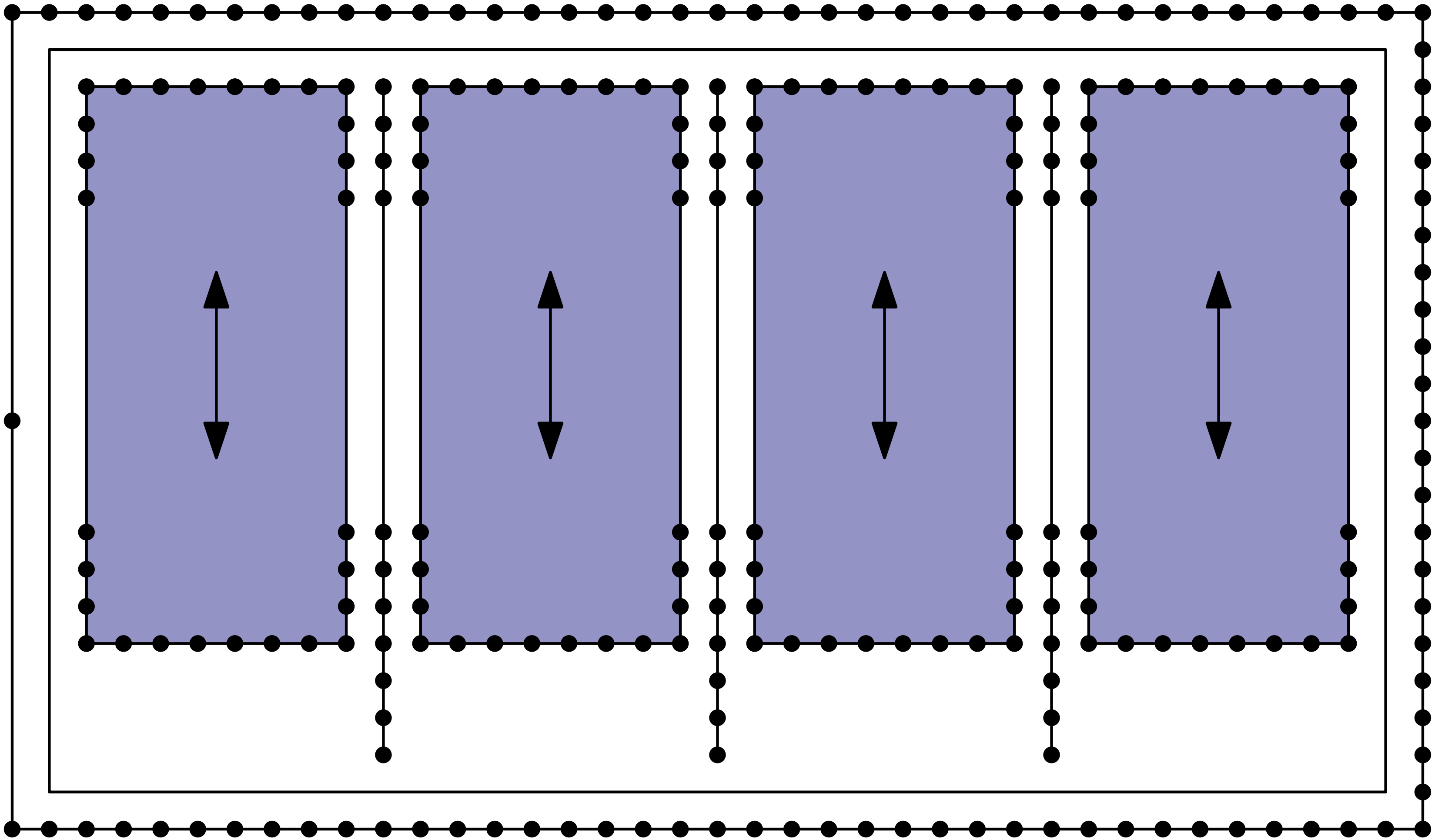
Kompaktierung ist NP-schwer [Patrignani '01]

- Grobstruktur von (G, H)
  - Begrenzung
  - Gürtel
  - Klauselgadgets
  - Variablengadgets

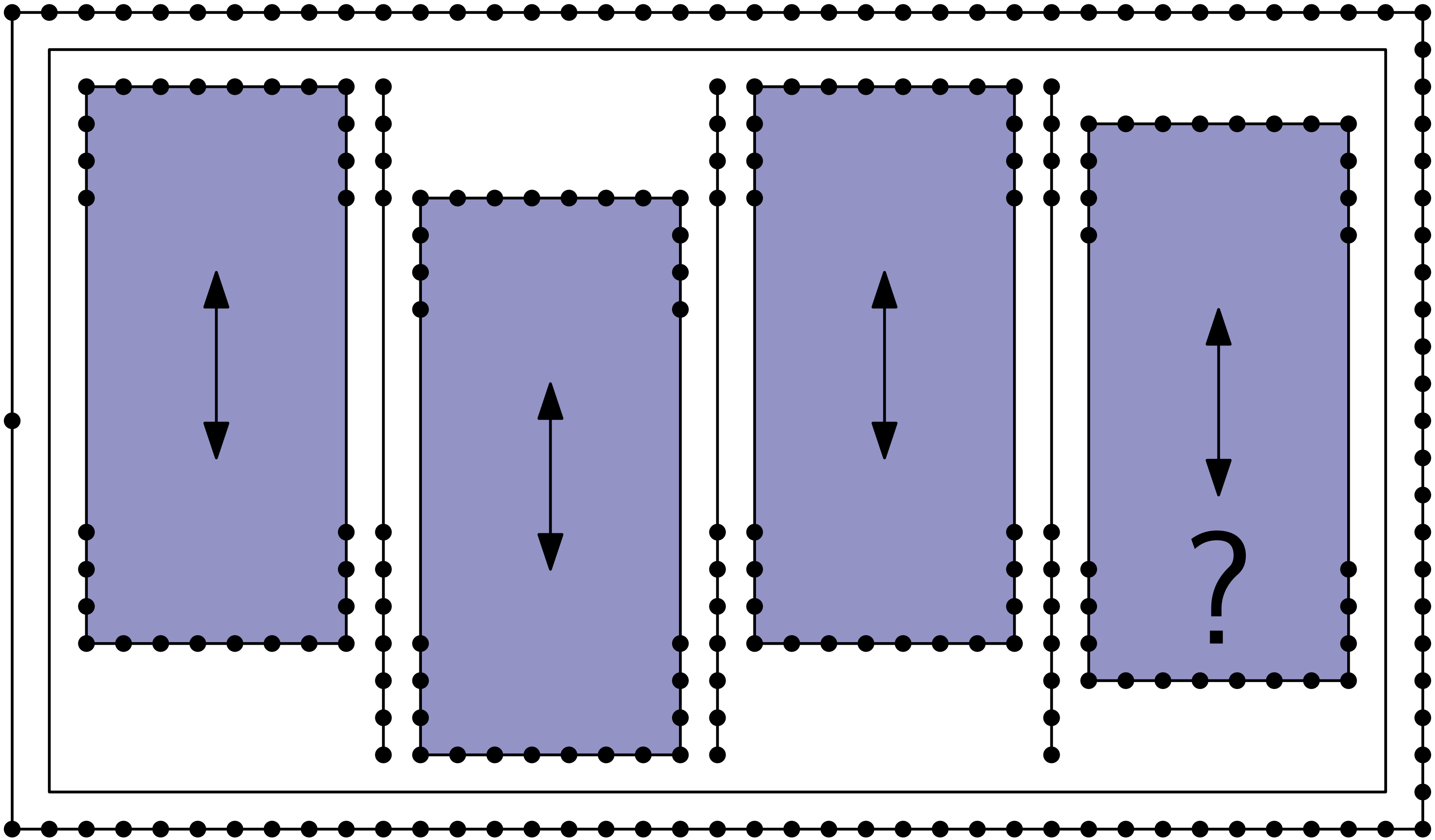
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



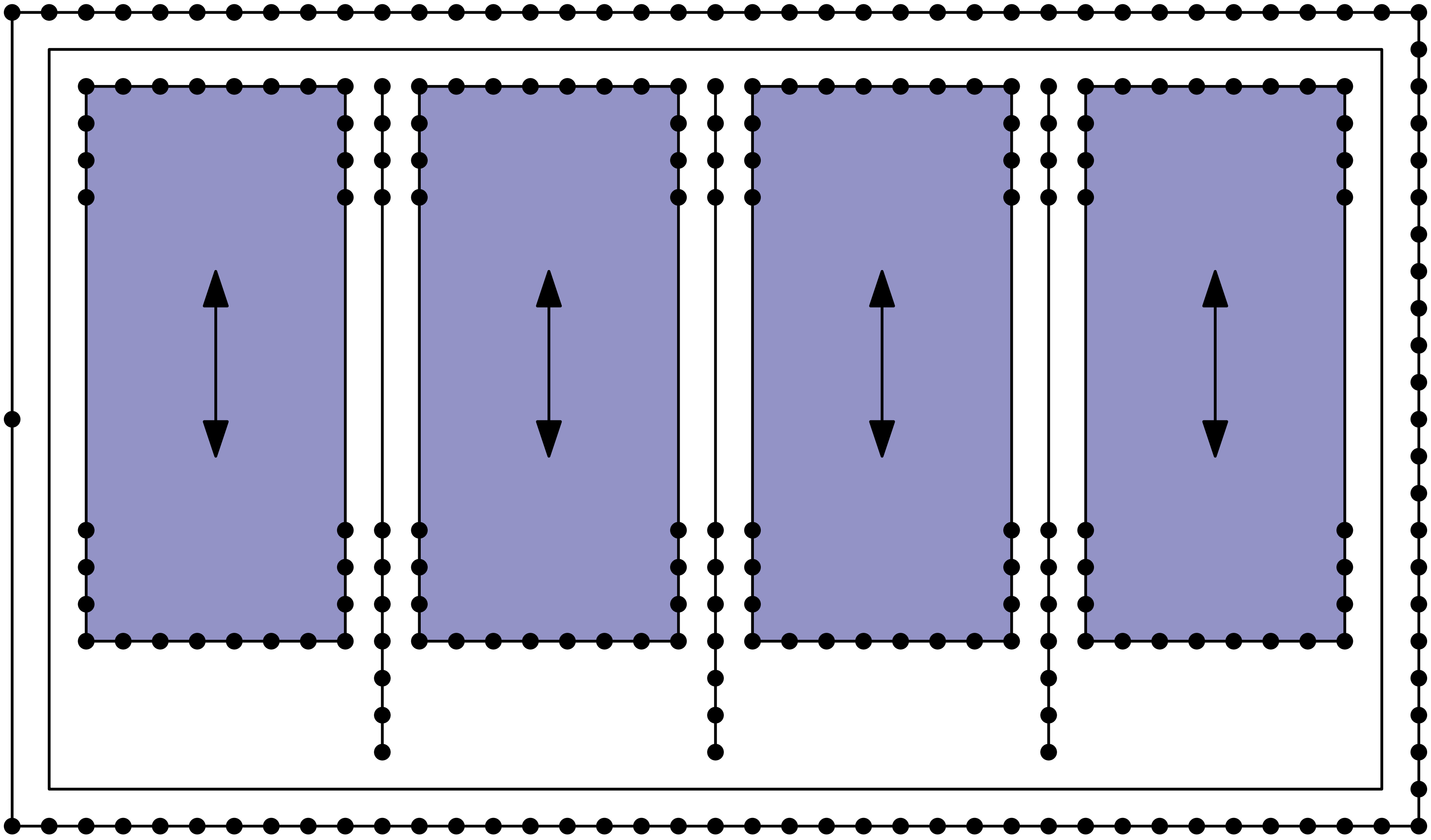
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



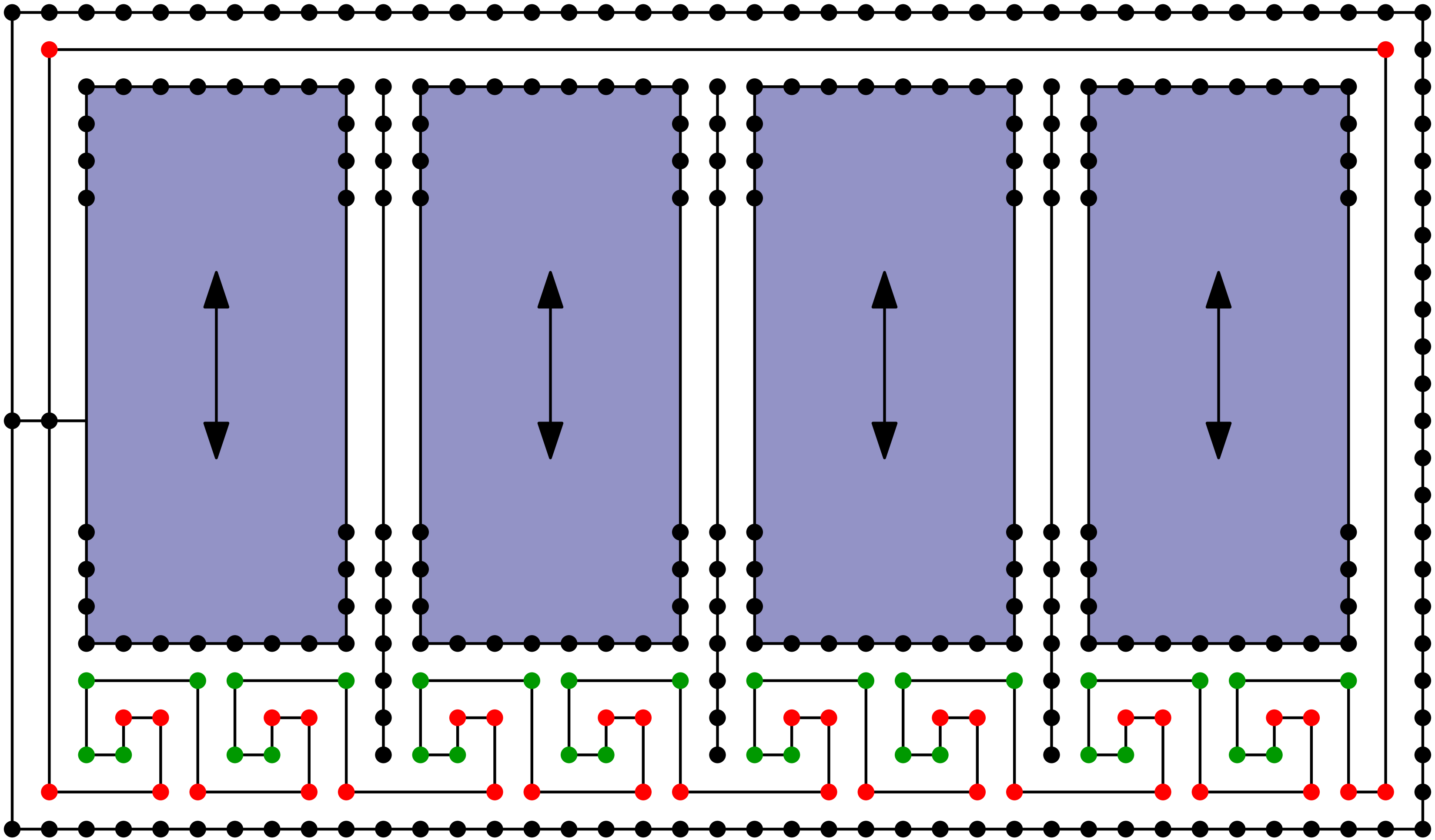
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



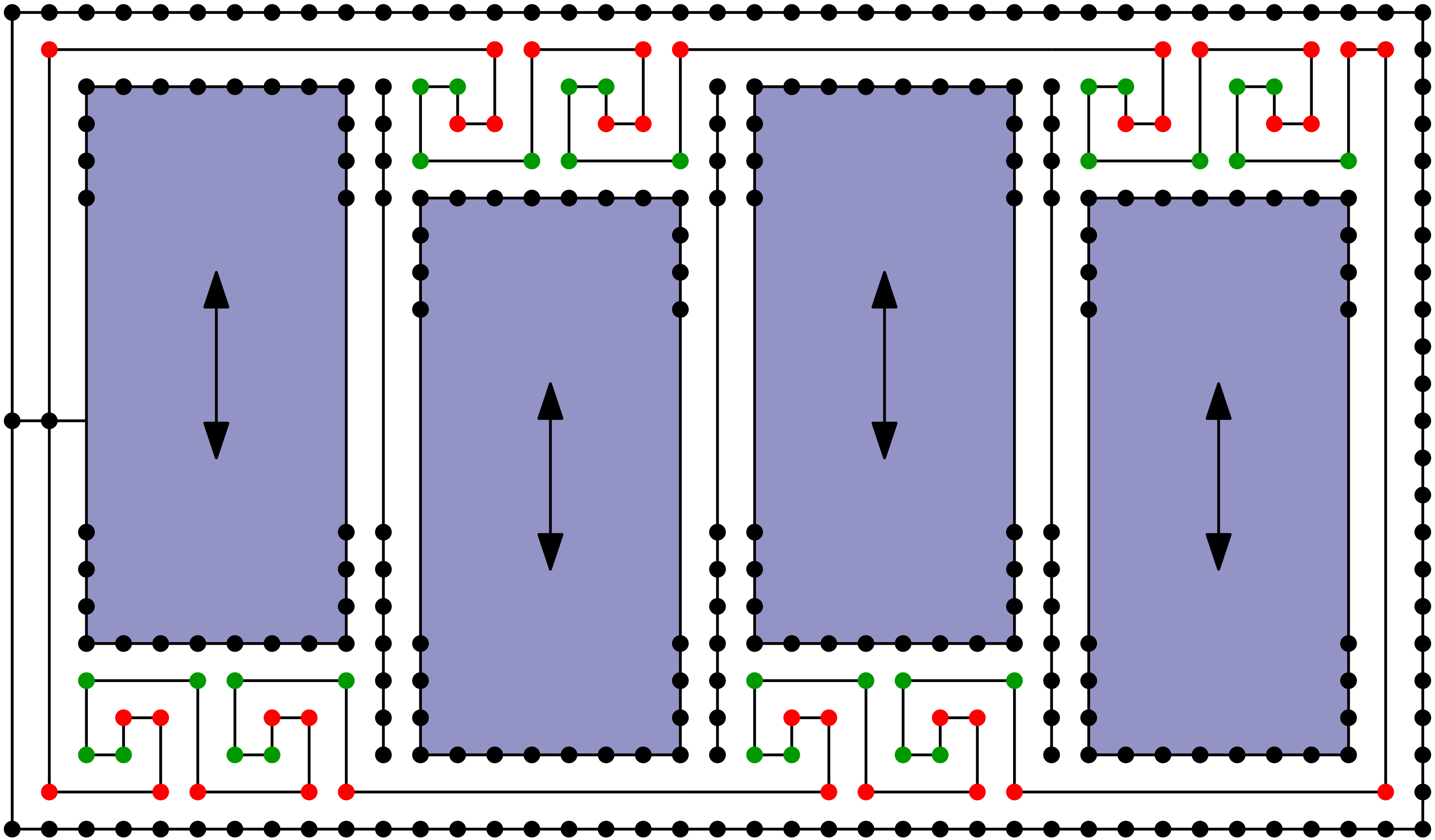
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



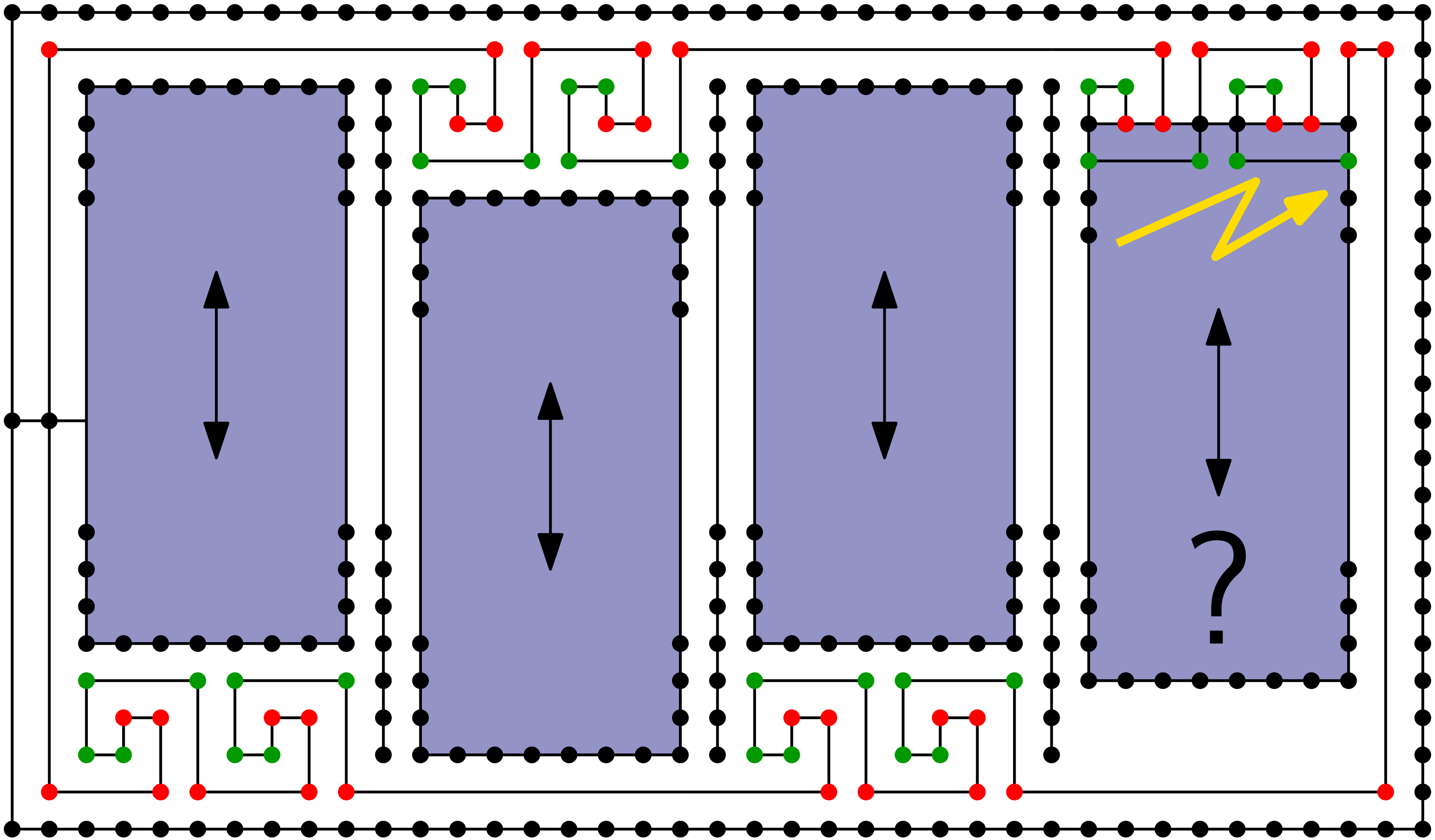
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



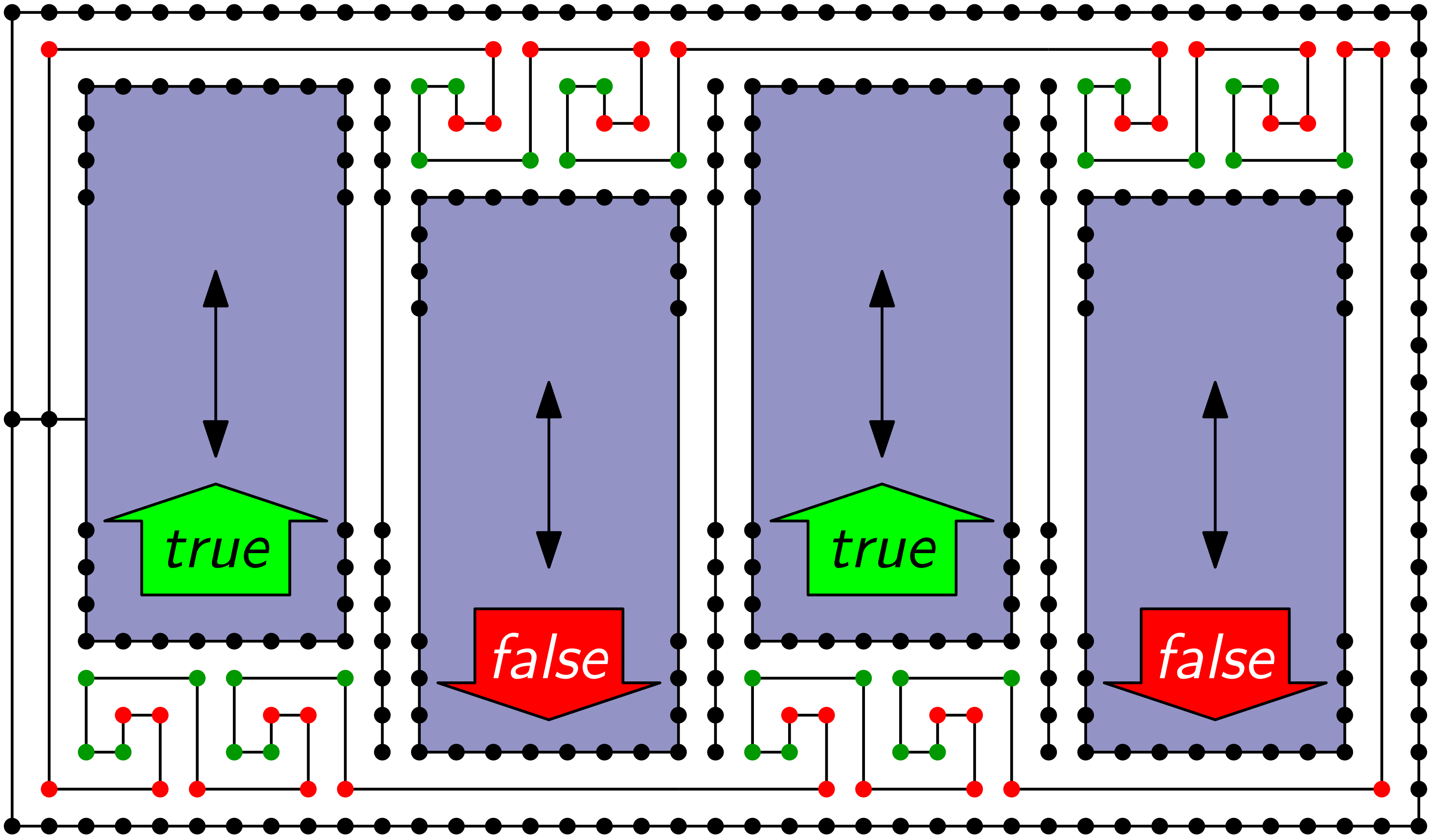
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



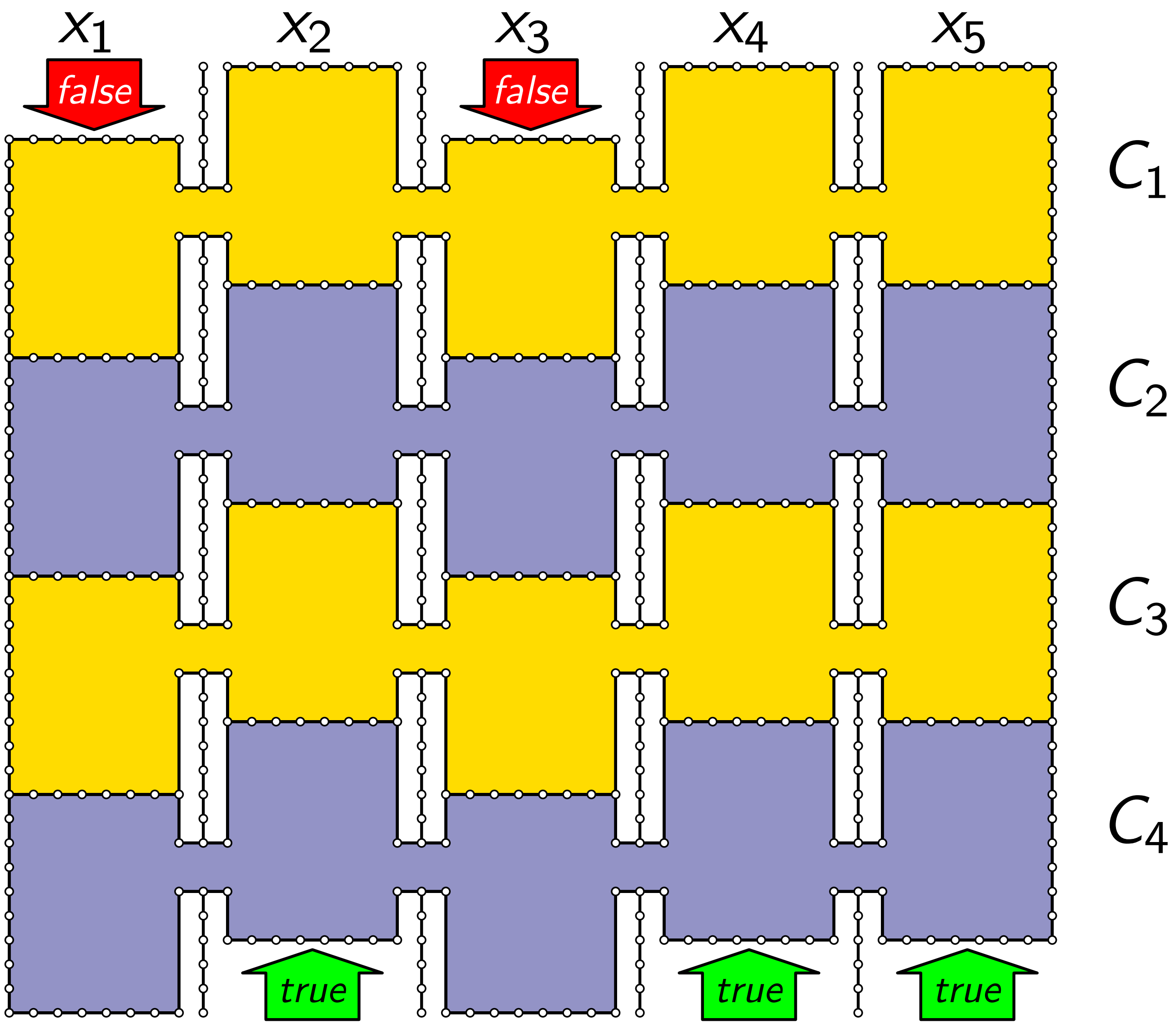
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



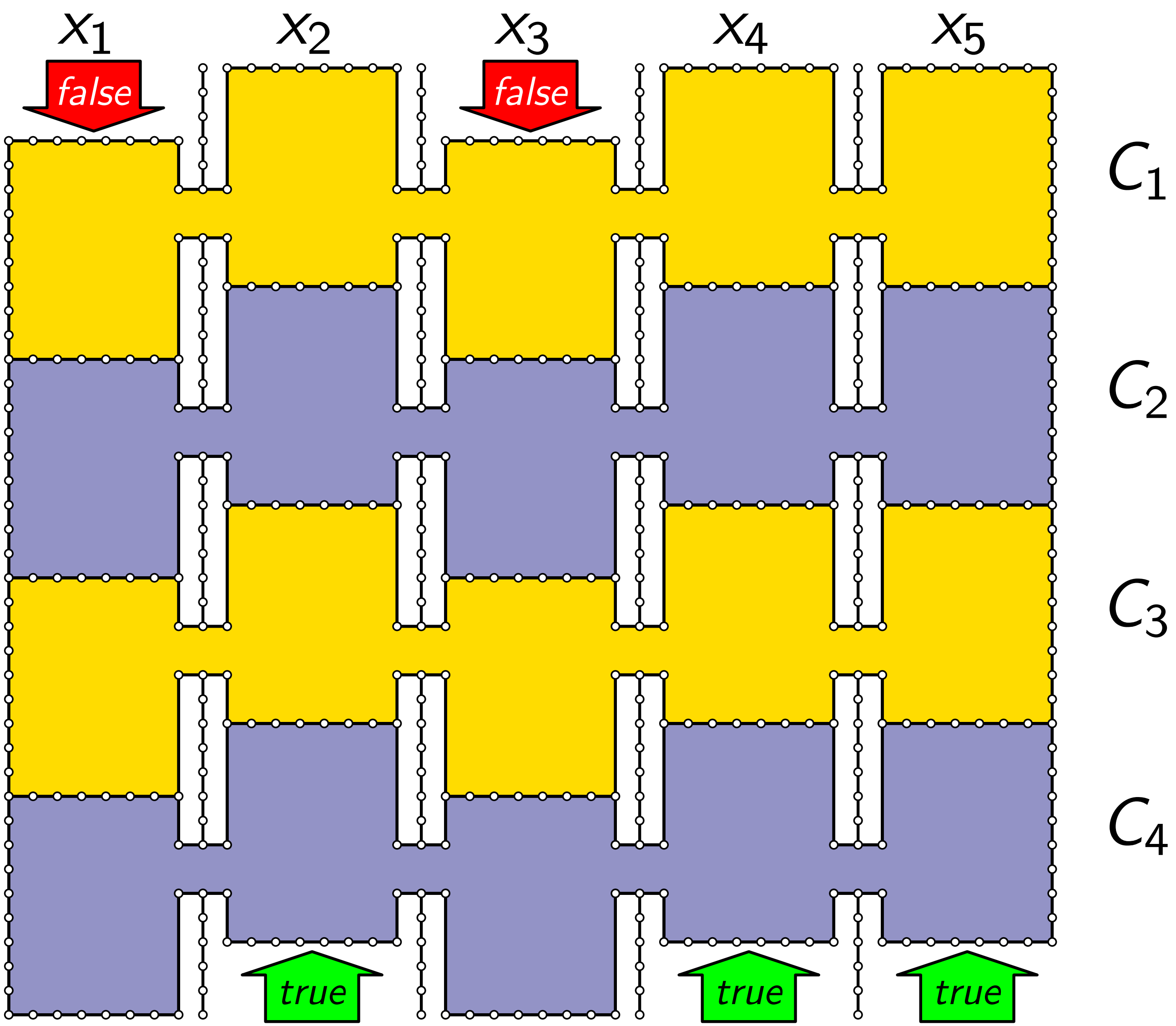
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



Klauselgadgets



Klauselgadgets



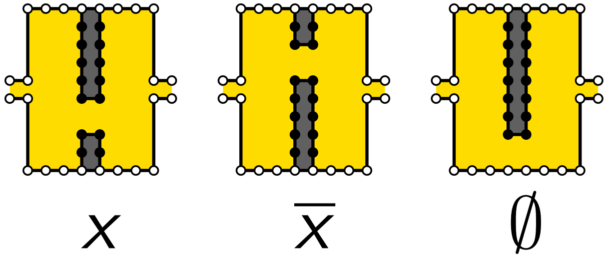
Beispiel:

$C_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

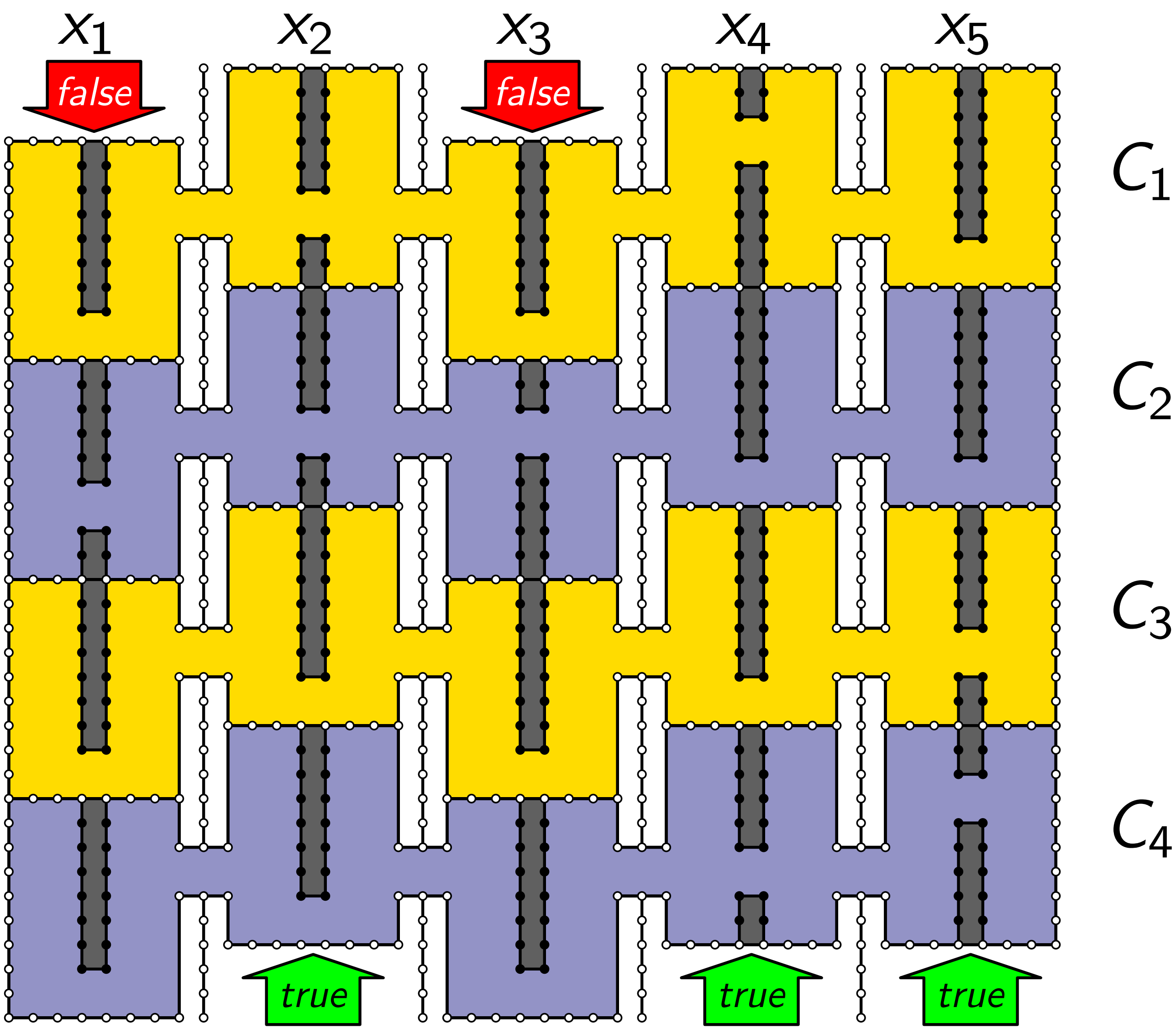
$C_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$C_3 = x_5$

$C_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$



Klauselgadgets



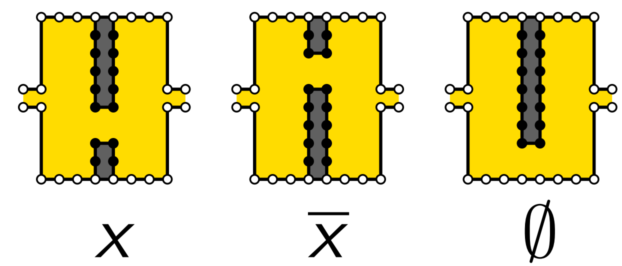
Beispiel:

$C_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

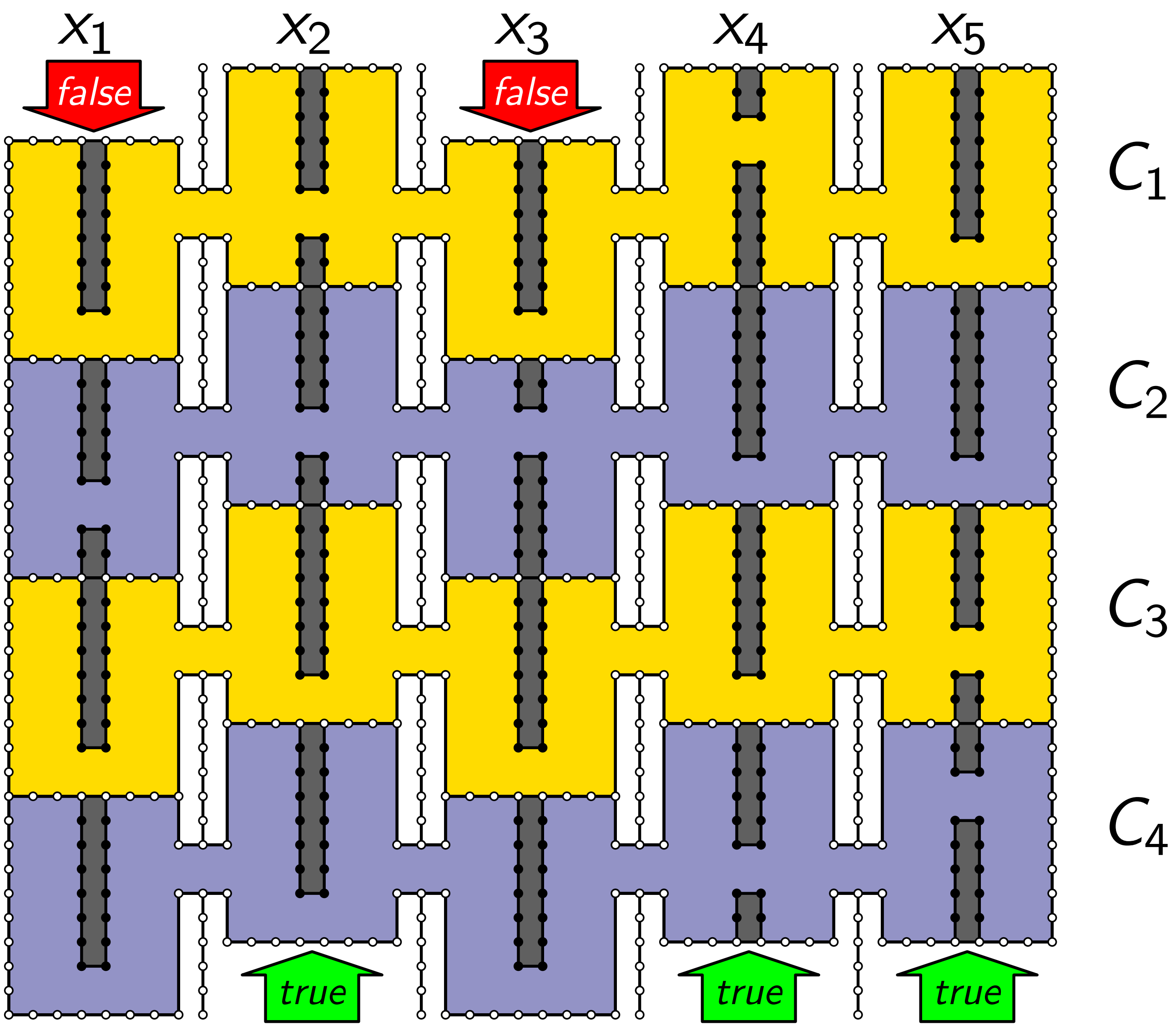
$C_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$C_3 = x_5$

$C_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$

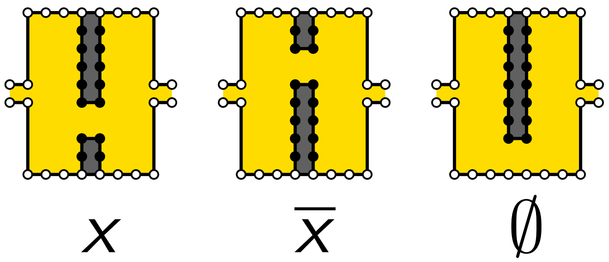


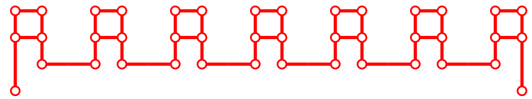
Klauselgadgets



Beispiel:

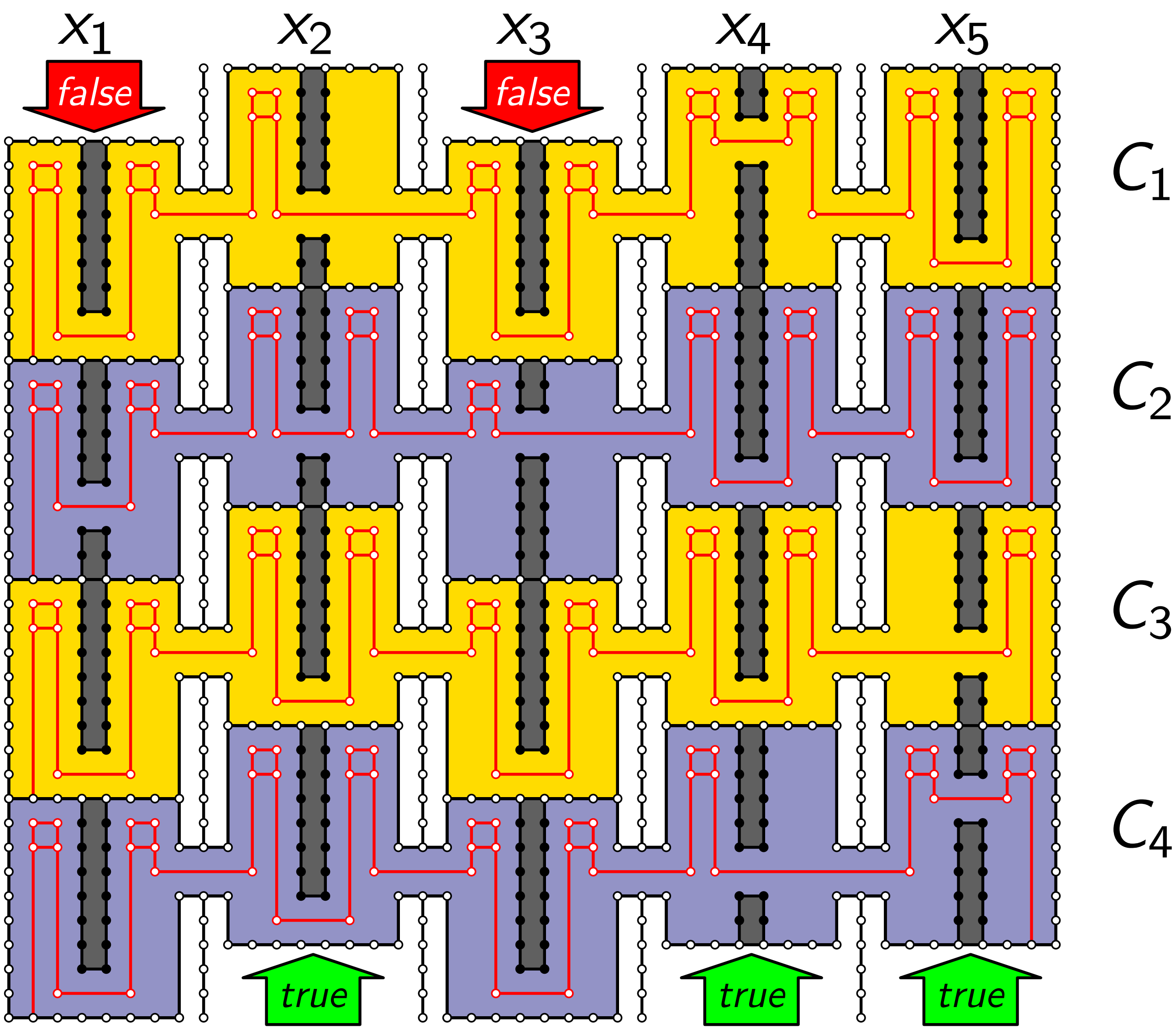
$C_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$
$C_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
$C_3 = x_5$
$C_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$





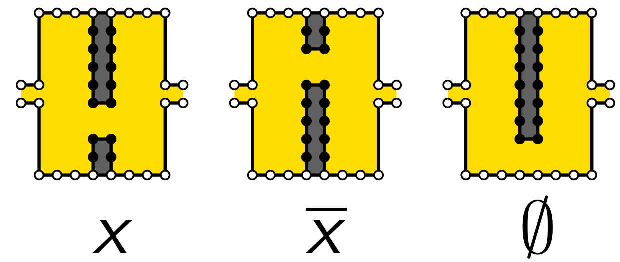
lege $(2n-1)$-A-Kette durch jede Klausel

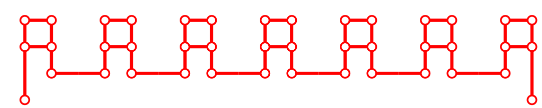
Klauselgadgets



Beispiel:

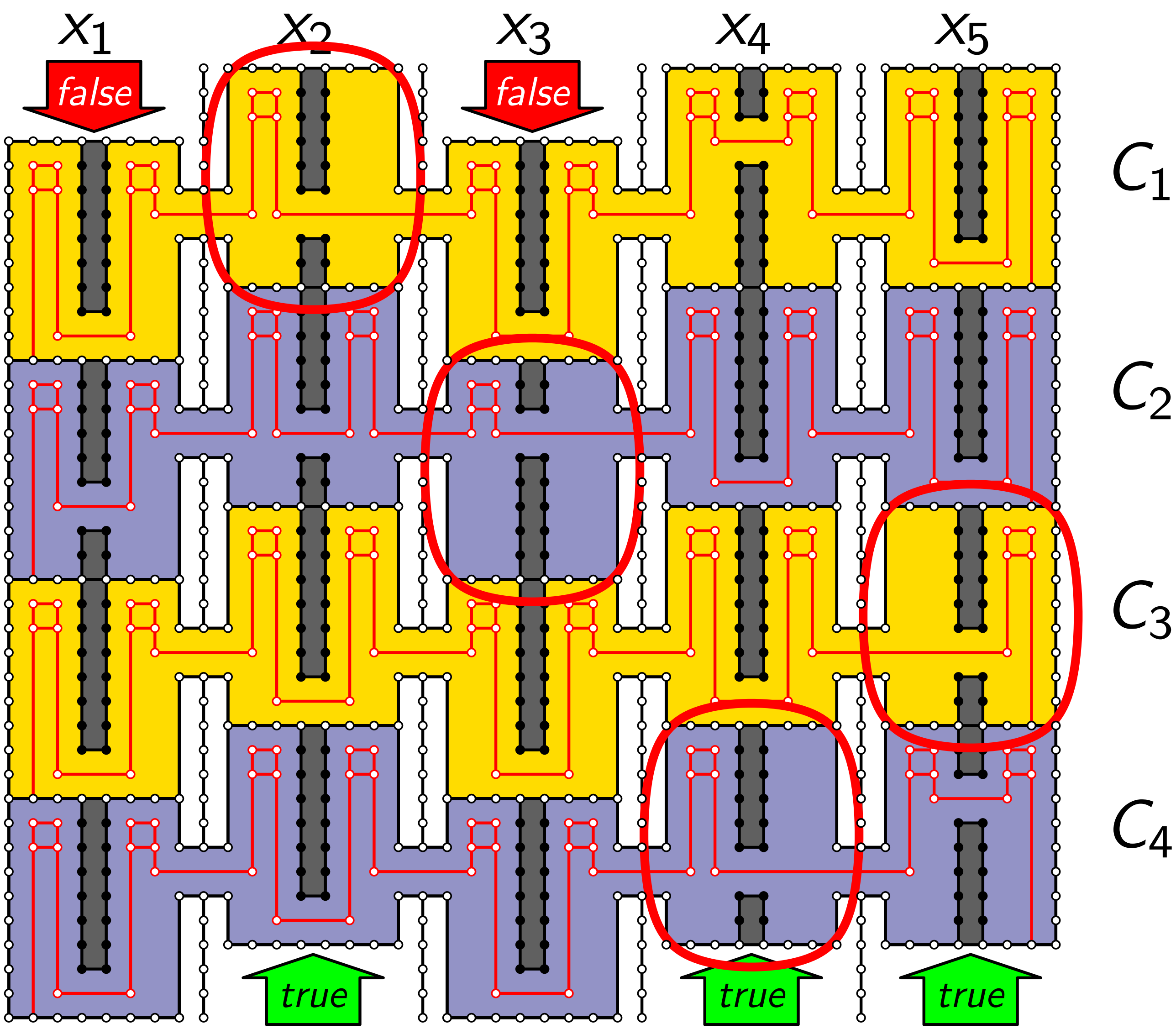
$C_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$
$C_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
$C_3 = x_5$
$C_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$





lege $(2n-1)$-A-Kette durch jede Klausel

Klauselgadgets



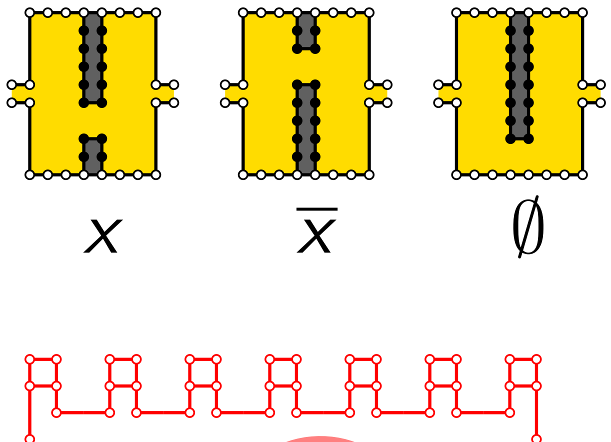
Beispiel:

$C_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

$C_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

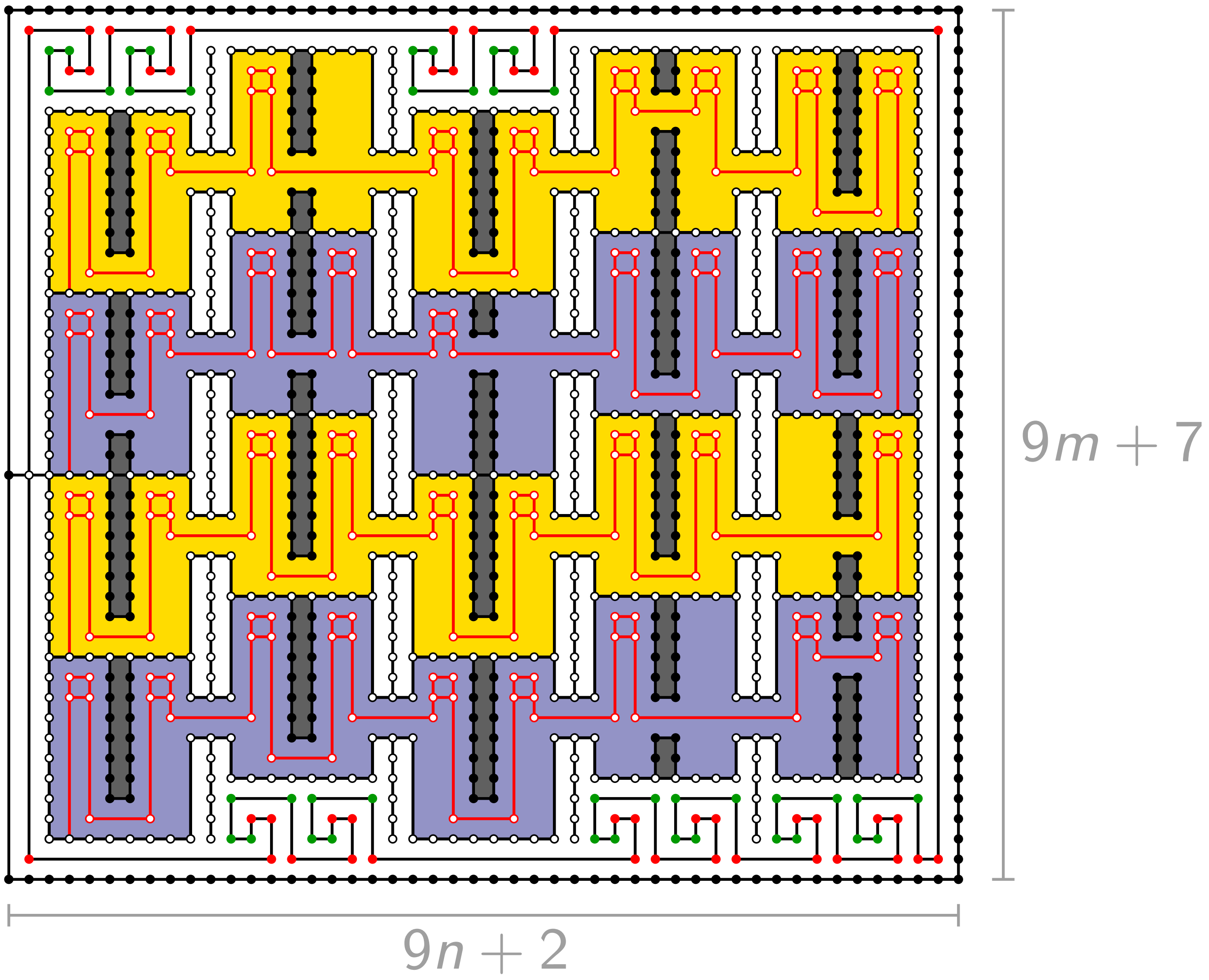
$C_3 = x_5$

$C_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$

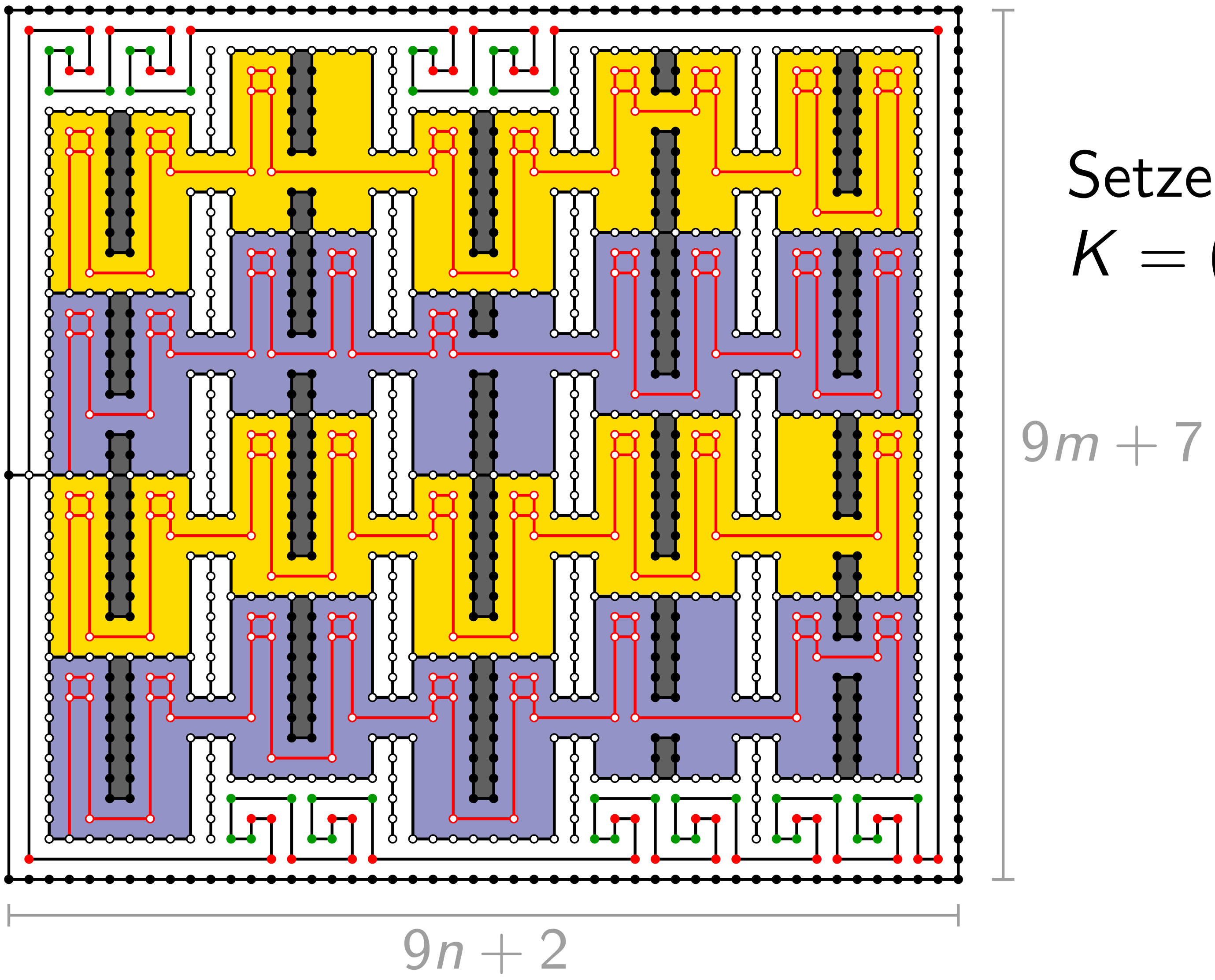


lege $(2n - 1)$-A-Kette durch jede Klausel

Komplette Reduktion

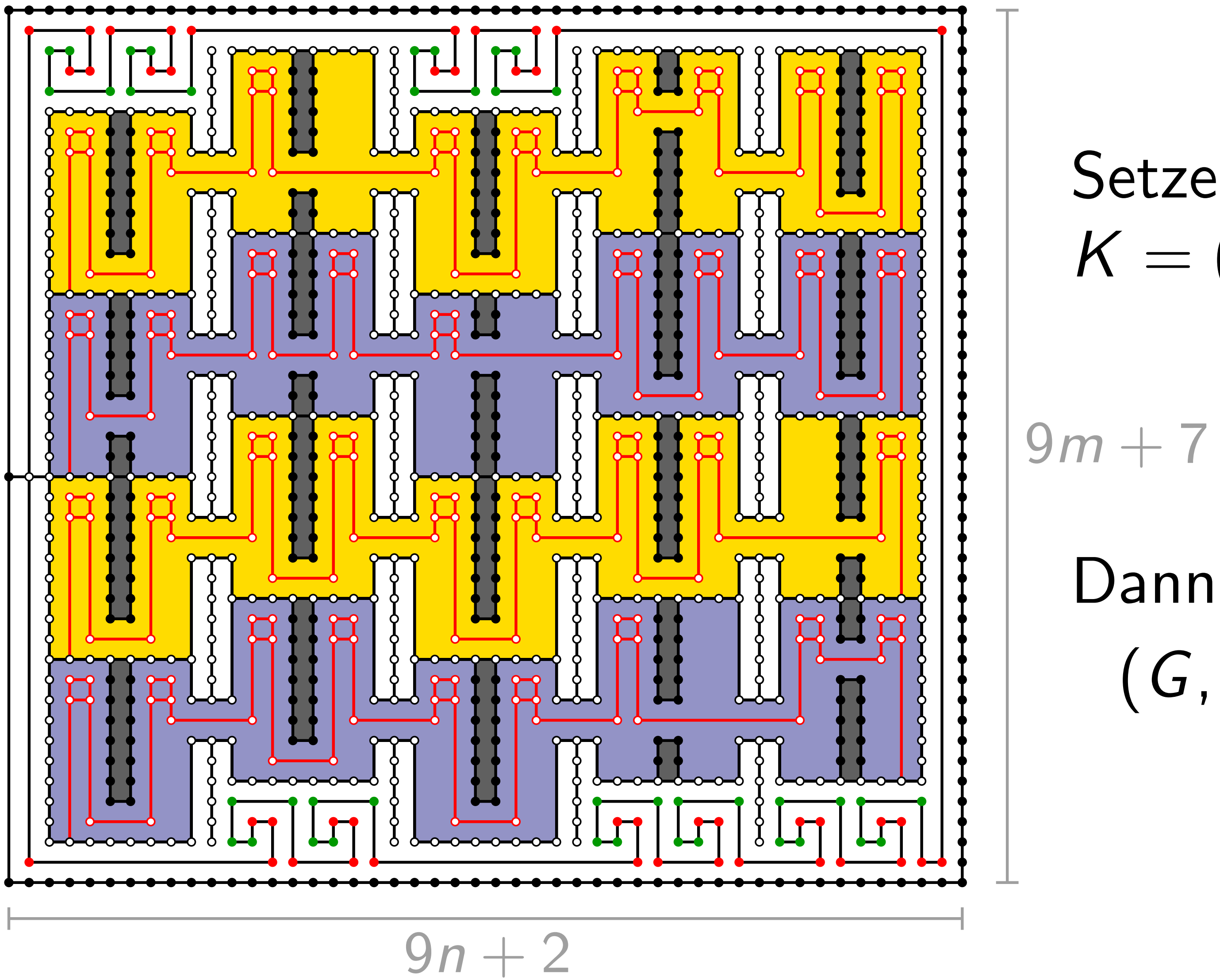


Komplette Reduktion



Setze
$K = (9n + 2) \cdot (9m + 7)$

Komplette Reduktion



Setze
$K = (9n+2)\cdot(9m+7)$

Dann gilt:
(G,H) auf Fläche K zeichenbar
$\Leftrightarrow$
Φ erfüllbar $\square$