Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2020

1. Vorlesung

Graphen: Eine Einführung

Lehrstuhl für Informatik I *Alexander Wolff*

Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Lehrstuhl für INFORMATIK I Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2020

1. Vorlesung

Graphen: Eine Einführung

Lehrstuhl für Informatik I

Alexander Wolff

Termine & das Kleingedruckte

Vorlesung per Video:

– Mittwochs, 10:15–11:45, Fragestunde zum Vorlesungsvideo (ifiChat)
Alexander Wolff (Büro 01.001, Gebäude M4, Sprechstunde: Mi, 13–14)

Termine & das Kleingedruckte

Vorlesung per Video: https://chat.informatik.uni-wuerzburg.de

– Mittwochs, 10:15–11:45, Fragestunde zum Vorlesungsvideo (ifiChat)
Alexander Wolff (Büro 01.001, Gebäude M4, Sprechstunde: Mi, 13–14)

Termine & das Kleingedruckte

Vorlesung per Video: https://chat.informatik.uni-wuerzburg.de

– Mittwochs, 10:15–11:45, Fragestunde zum Vorlesungsvideo (ifiChat)
Alexander Wolff (Büro 01.001, Gebäude M4, Sprechstunde: Mi, 13–14)
(Termin bitte per Email abmachen, dann Skype o.ä.)

Termine & das Kleingedruckte

Vorlesung per Video:

https://chat.informatik.uni-wuerzburg.de

- Mittwochs, 10:15–11:45, Fragestunde zum Vorlesungsvideo (ifiChat)
  Alexander Wolff (Büro 01.001, Gebäude M4, Sprechstunde: Mi, 13–14)
  (Termin bitte per Email abmachen, dann Skype o.ä.)

Übungen:

- TutorInnen: Vasil Alistarov, Annika Förster, Lukas Schreiner, Diana Sieper
- Freitags, 8:30 (SE I), 10:15 (SE II), 12:15 (SE I) – **ab 24.4.!**

Termine & das Kleingedruckte

Vorlesung per Video: https://chat.informatik.uni-wuerzburg.de

– Mittwochs, 10:15–11:45, Fragestunde zum Vorlesungsvideo (ifiChat)
Alexander Wolff (Büro 01.001, Gebäude M4, Sprechstunde: Mi, 13–14)
(Termin bitte per Email abmachen, dann Skype o.ä.)

Übungen:

– TutorInnen: Vasil Alistarov, Annika Förster, Lukas Schreiner, Diana Sieper
– Freitags, 8:30 (SE I), 10:15 (SE II), 12:15 (SE I) – **ab 24.4.!**

Übungsaufgaben:

– Bearbeitung in Gruppen von max. je zwei Teilnehmern
– Ausgabe: dienstags via WueCampus
– Abgabe: dienstags, 12:00 Uhr, auf WueCampus (nur pdf)
Bitte möglichst mit LaTeX o.ä. schreiben!

Termine & das Kleingedruckte

Vorlesung per Video:

https://chat.informatik.uni-wuerzburg.de

– Mittwochs, 10:15–11:45, Fragestunde zum Vorlesungsvideo (ifiChat)
  Alexander Wolff (Büro 01.001, Gebäude M4, Sprechstunde: Mi, 13–14)
  (Termin bitte per Email abmachen, dann Skype o.ä.)

Übungen:

– TutorInnen: Vasil Alistarov, Annika Förster, Lukas Schreiner, Diana Sieper
– Freitags, 8:30 (SE I), 10:15 (SE II), 12:15 (SE I) – **ab 24.4.!**

Übungsaufgaben:

– Bearbeitung in Gruppen von max. je zwei Teilnehmern
– Ausgabe: dienstags via WueCampus
– Abgabe: dienstags, 12:00 Uhr, auf WueCampus (nur pdf)
  Bitte möglichst mit LaTeX o.ä. schreiben!

Klausuren (voraussichtlich):

– 1. Termin: 27.07.2018, 12:00–14:00 Uhr, Turing-, Zuse-HS, HS 2
– 2. Termin: 08.10.2018, 10:00–12:00 Uhr, Zuse-HS

2x Anmelden!

Bitte melden Sie sich *sofort*
– bei WueStudy und
– bei WueCampus an

2x Anmelden!

Bitte melden Sie sich *sofort*
– bei WueStudy und
– bei WueCampus an

- Übungseinteilung erfolgt über WueStudy
  (Die Übungszeiten sind wichtig, falls Übungen irgendwann wieder offline stattfinden.)

2x Anmelden!

Bitte melden Sie sich *sofort*
– bei WueStudy und
– bei WueCampus an

- Übungseinteilung erfolgt über WueStudy
  (Die Übungszeiten sind wichtig, falls Übungen irgendwann wieder offline stattfinden.)

- WueCampus für Kommunikation, z.B. falls eine Übungsaufgabe fehlerhaft oder missverständlich ist.
  (Zum Einschreiben klicken Sie auf das kleine Zahnrad oben links und wählen dann “Mich in diesen Kurs einschreiben”.)

2x Anmelden!

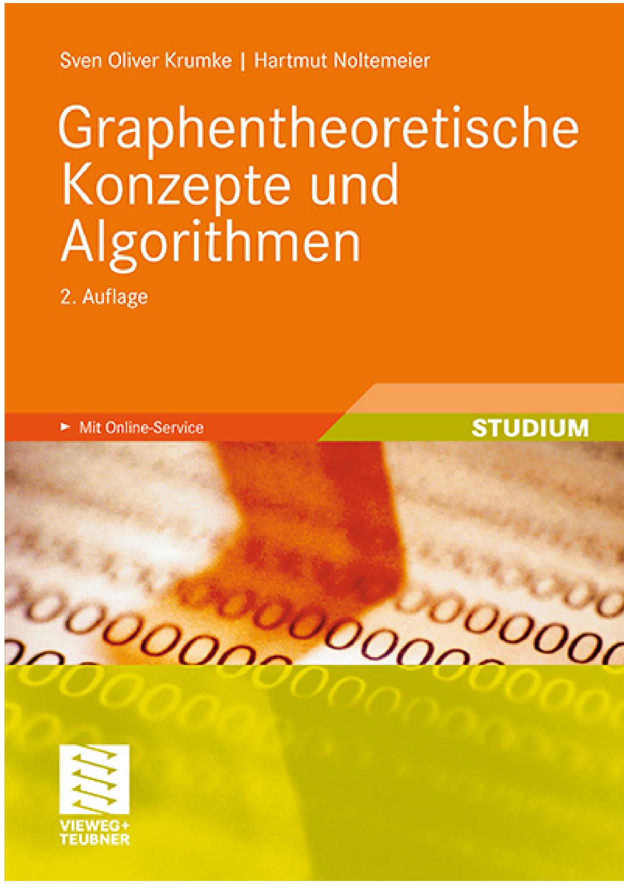
Bitte melden Sie sich ***sofort***
– bei WueStudy und
– bei WueCampus an

- Übungseinteilung erfolgt über WueStudy
  (Die Übungszeiten sind wichtig, falls Übungen irgendwann wieder offline stattfinden.)

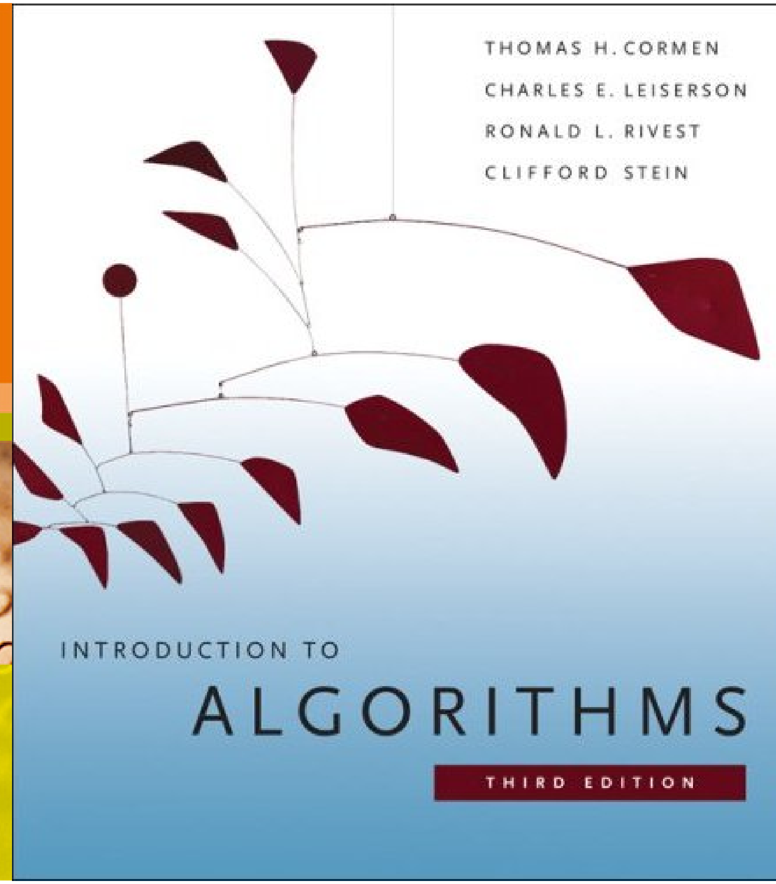
- WueCampus für Kommunikation, z.B. falls eine Übungsaufgabe fehlerhaft oder missverständlich ist.
  (Zum Einschreiben klicken Sie auf das kleine Zahnrad oben links und wählen dann "Mich in diesen Kurs einschreiben".)

- Wenn Sie sich nicht fristgerecht bei WueStudy anmelden, ist es für uns **unmöglich** Ihre Note zu verbuchen.

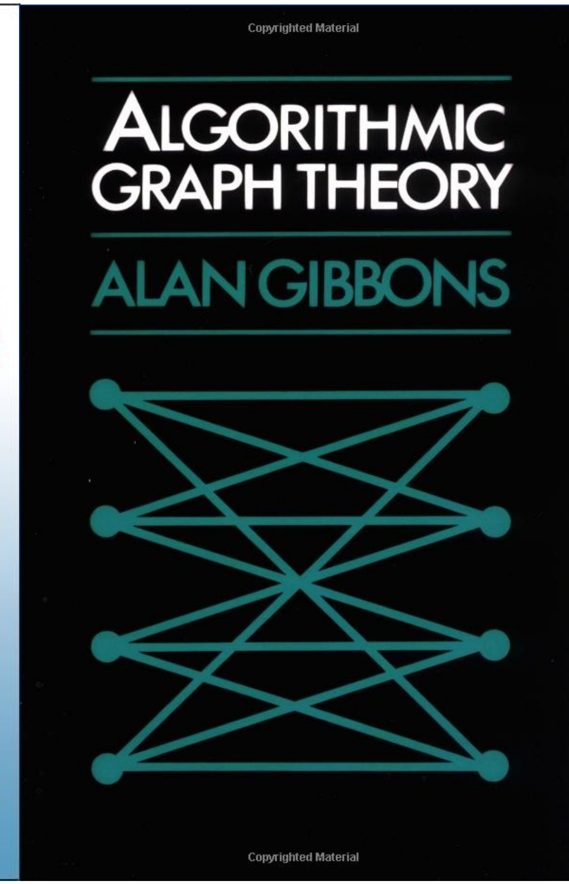
Bücher zur Vorlesung



[KN]

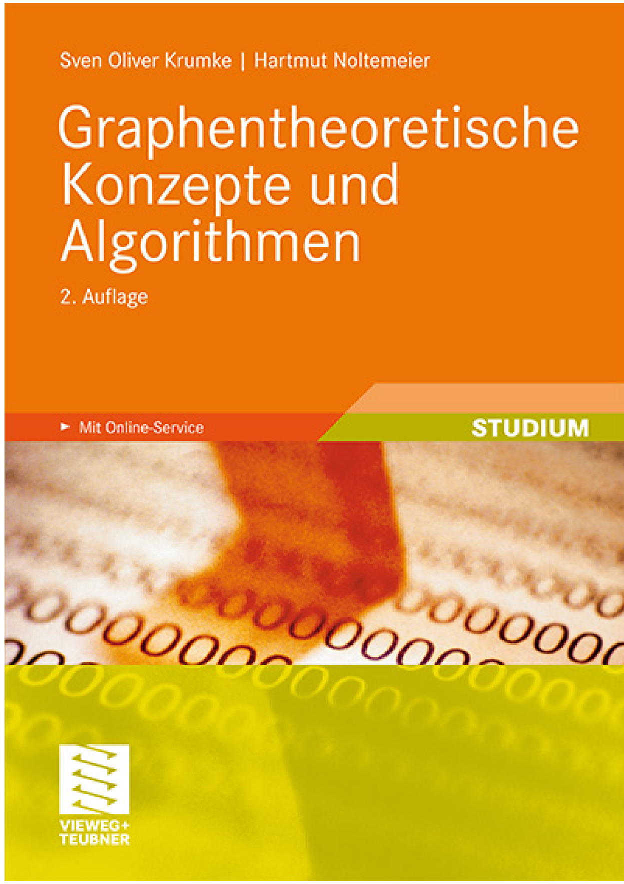


[CLRS]

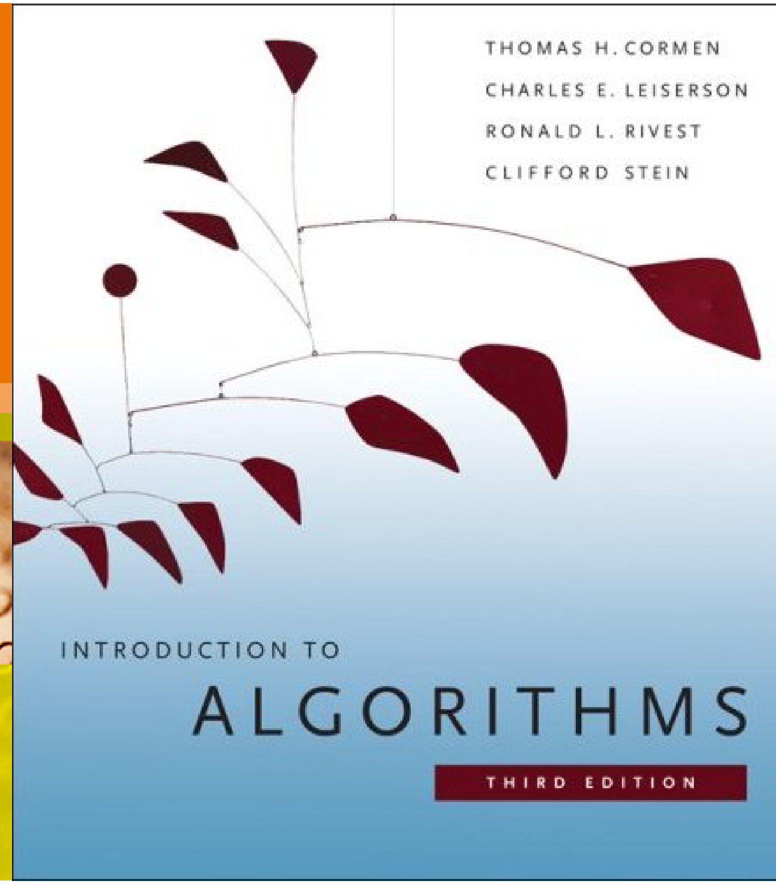


[G]

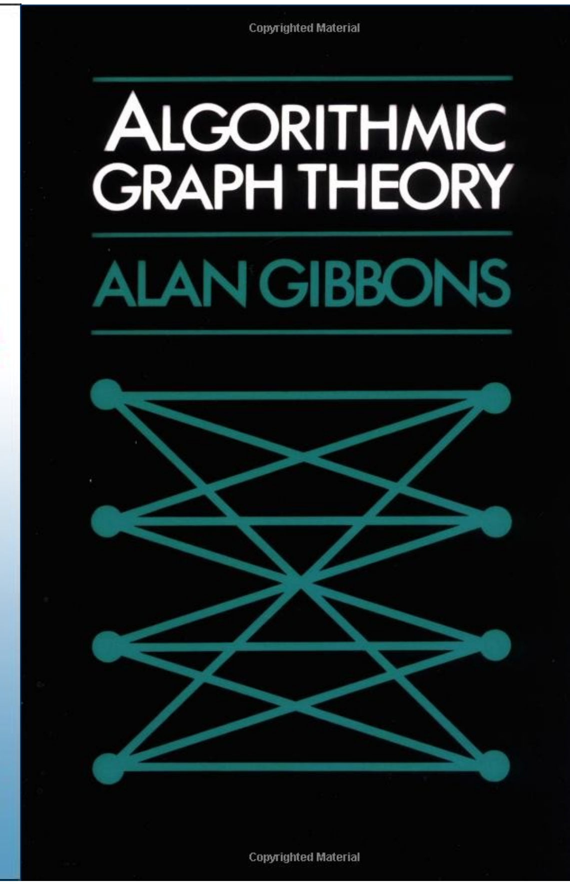
Bücher zur Vorlesung



[KN]



[CLRS]



[G]

Hauptreferenz; elektronische Kopie über die Unibib erhältlich

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

- Graphdurchlauf-Strategien

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche
  - Tiefensuche

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche
  - Tiefensuche
- Berechnung kürzester Wege

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche
  - Tiefensuche
- Berechnung kürzester Wege
  - Breitensuche
  - Algorithmus von Dijkstra

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche
  - Tiefensuche
- Berechnung kürzester Wege
  - Breitensuche
  - Algorithmus von Dijkstra
- Minimale Spannbäume

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche
  - Tiefensuche
- Berechnung kürzester Wege
  - Breitensuche
  - Algorithmus von Dijkstra
- Minimale Spannbäume
  - Algorithmus von Kruskal
  - Algorithmus von Jarník–Prim

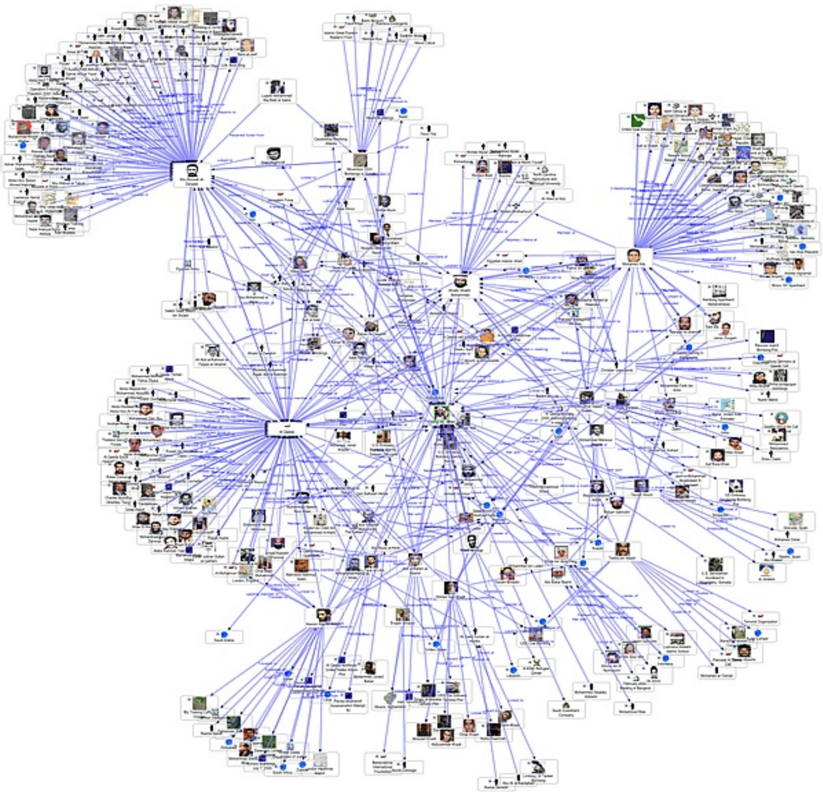
Voraussetzungen

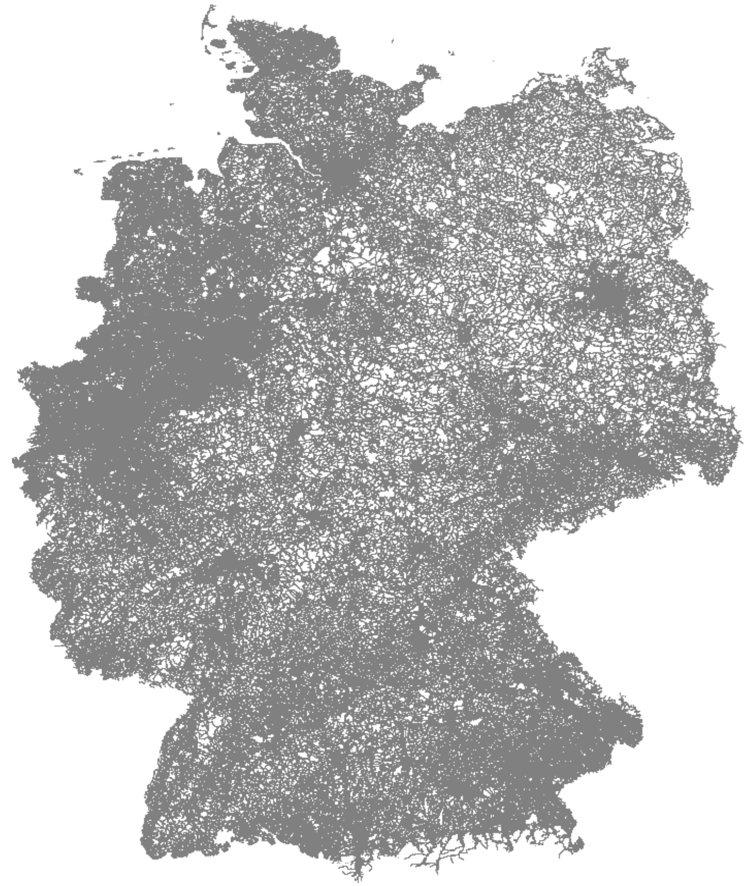
Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

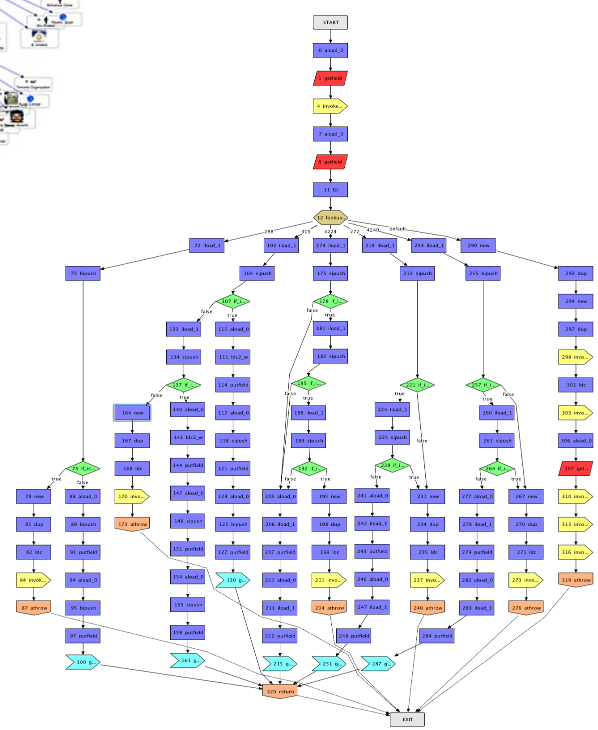
- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche
  - Tiefensuche
- Berechnung kürzester Wege
  - Breitensuche
  - Algorithmus von Dijkstra
- Minimale Spannbäume
  - Algorithmus von Kruskal
  - Algorithmus von Jarník–Prim

Repetitorium in der allerersten Übung

Graphen







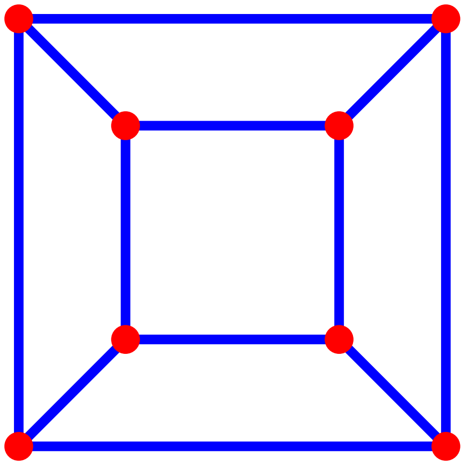
F: Was ist ein Graph?

F: Was ist ein Graph?

A$_1$: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Tupel (V, E), wobei

F: Was ist ein Graph?

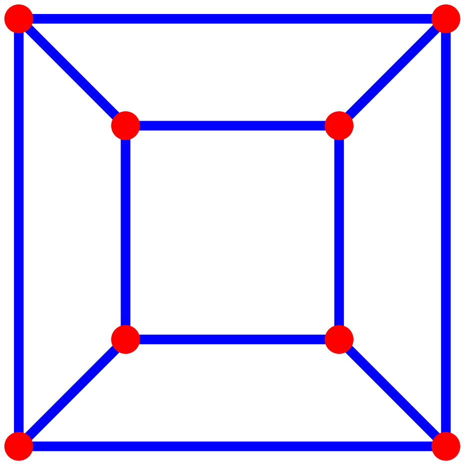
A_1: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Tupel (V, E), wobei



F: Was ist ein Graph?

A$_1$: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Tupel (V, E), wobei

- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

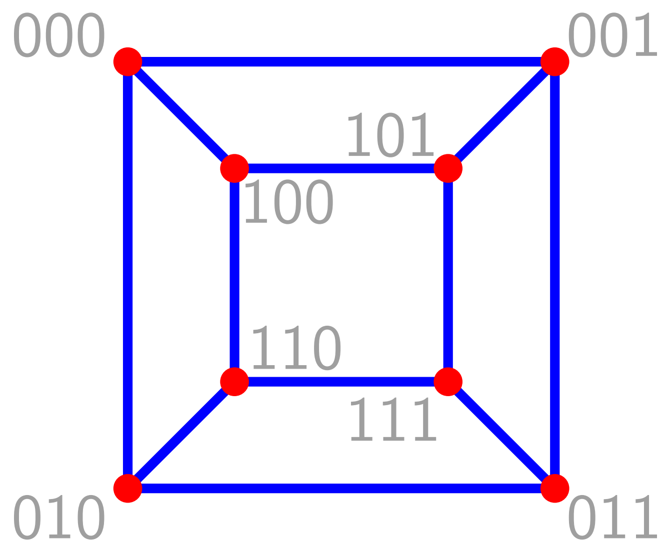


F: Was ist ein Graph?

A_1: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Tupel (V, E), wobei

- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

$V = \{000, 001, \ldots, 111\}$
$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad ?$



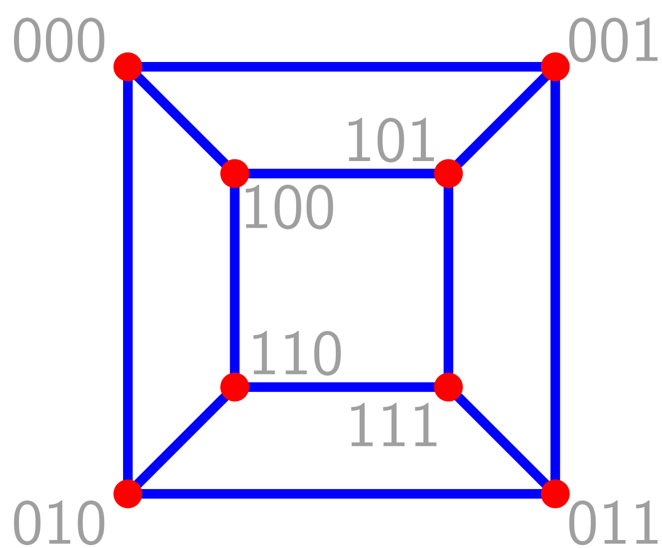
F: Was ist ein Graph?

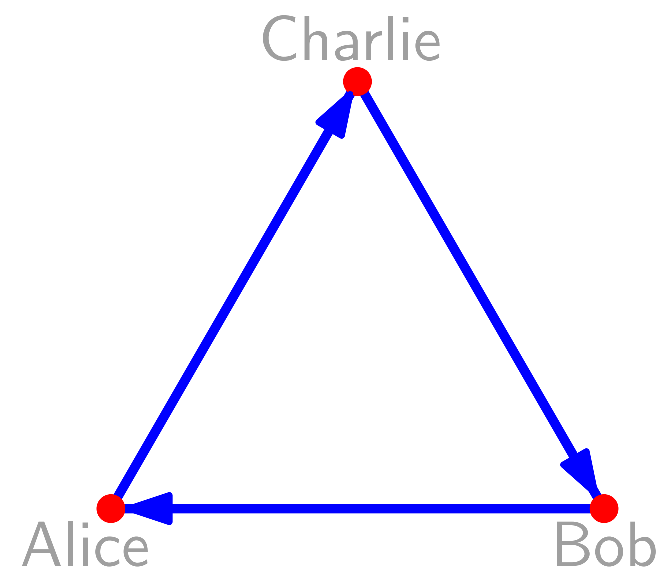
A_1: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Tupel (V, E), wobei

- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

$V = \{000, 001, \ldots, 111\}$

$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad ?$



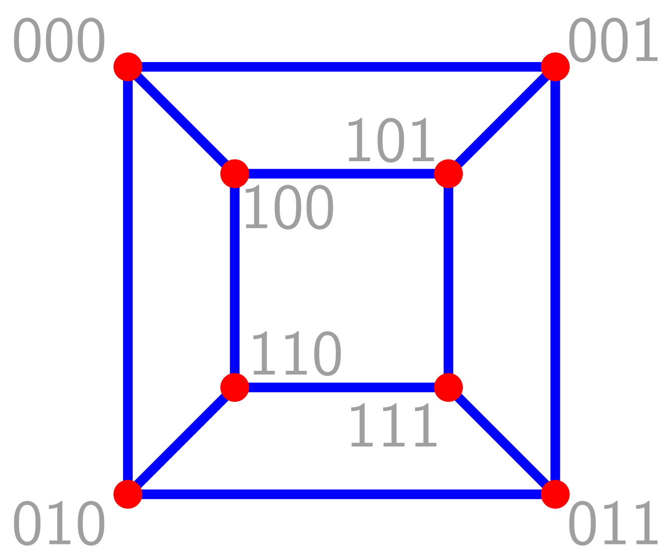


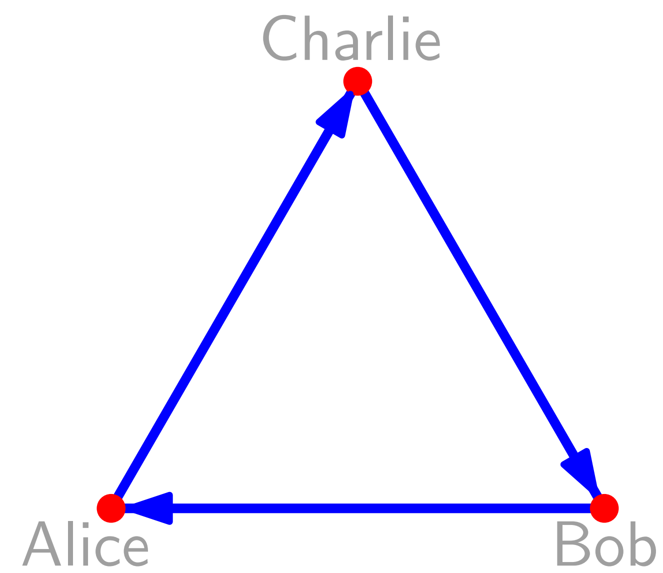
F: Was ist ein Graph?

A_1: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Tupel (V, E), wobei

- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

$V = \{000, 001, \ldots, 111\}$
$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow$?

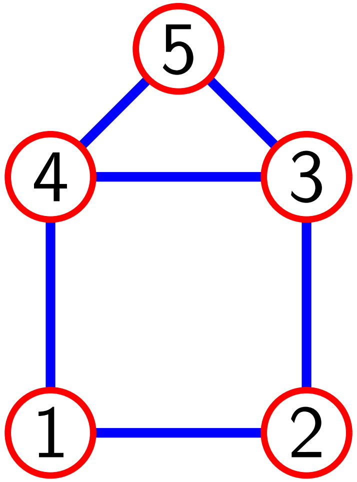




A_2: Ein *gerichteter* Graph ist ein Tupel (V, E), wobei

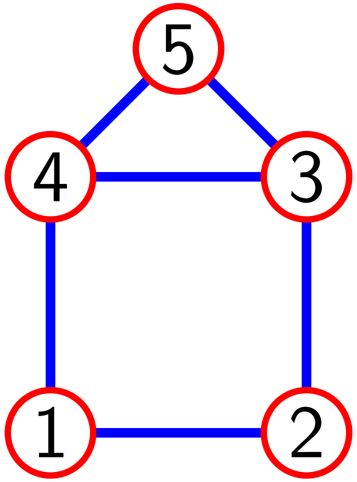
- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq V \times V = \{(u, v) \in V^2 \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

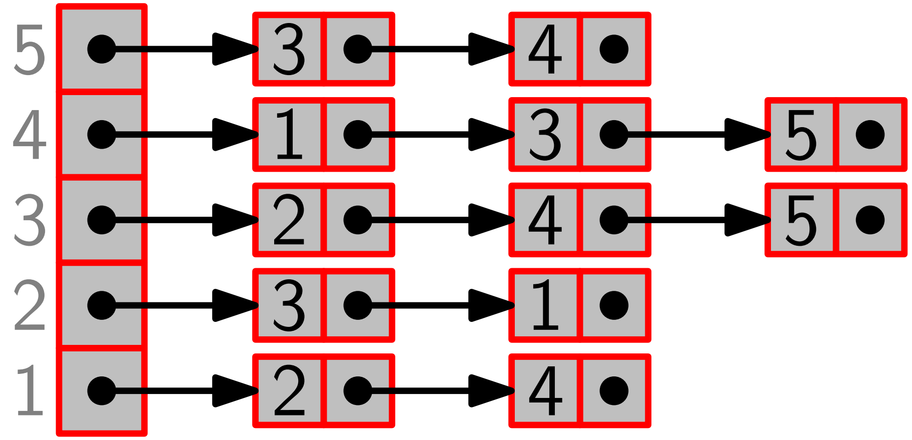


ungerichteter
Graph

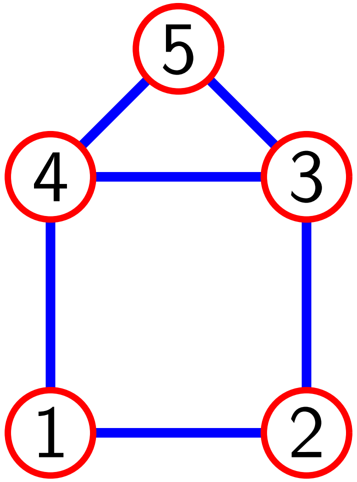
F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



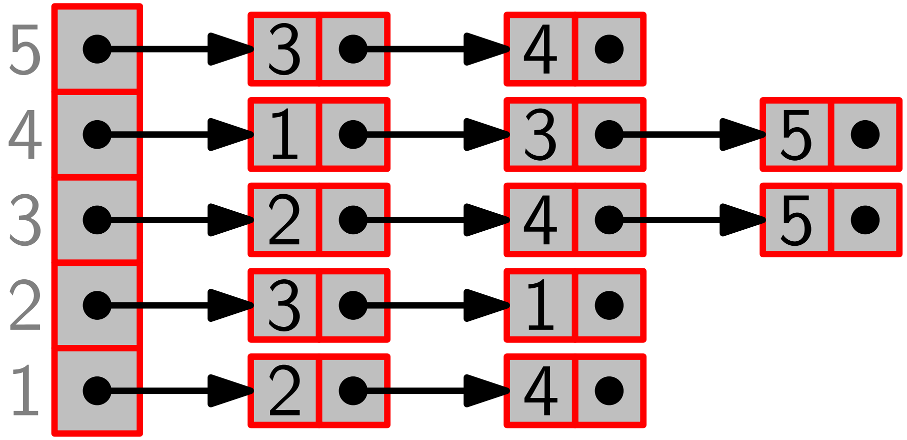
ungerichteter Graph



F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



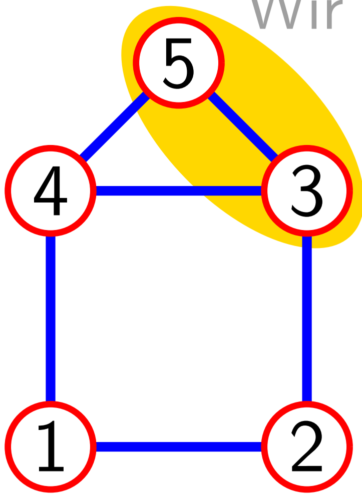
ungerichteter Graph



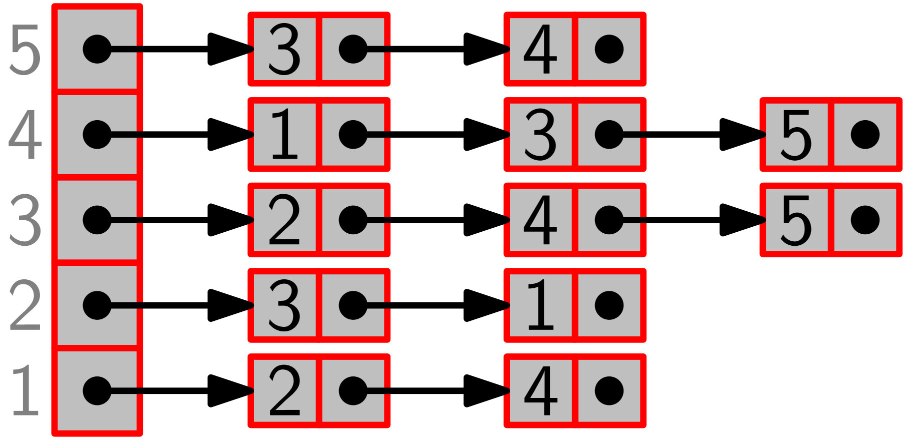
Adjazenzlisten

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



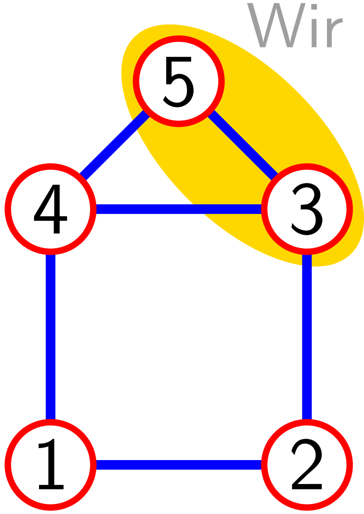
ungerichteter Graph



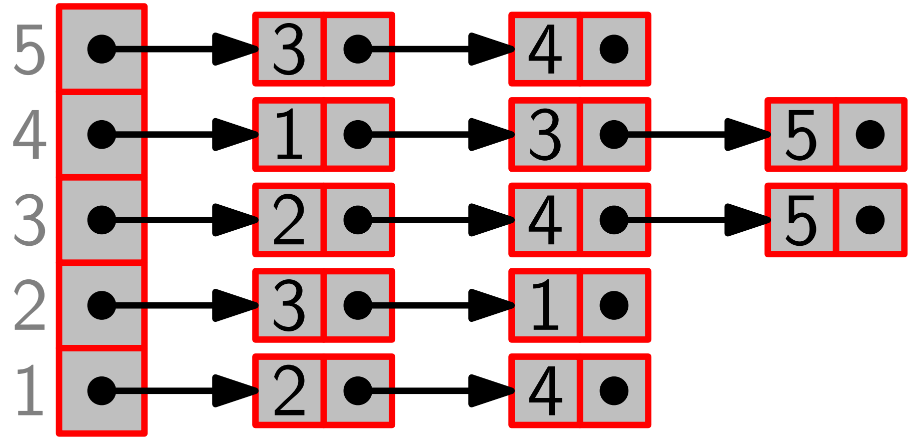
Adjazenzlisten

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

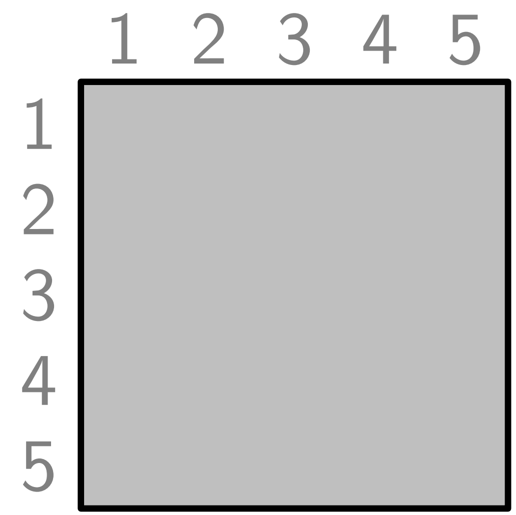
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



ungerichteter Graph

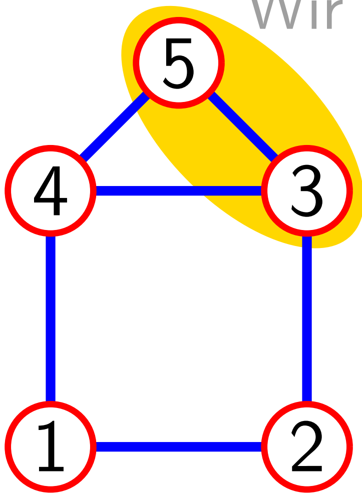


Adjazenzlisten

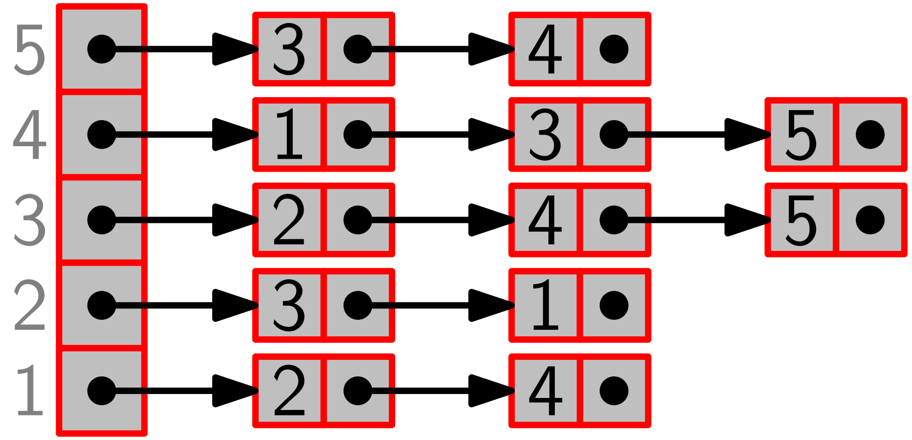


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



ungerichteter Graph

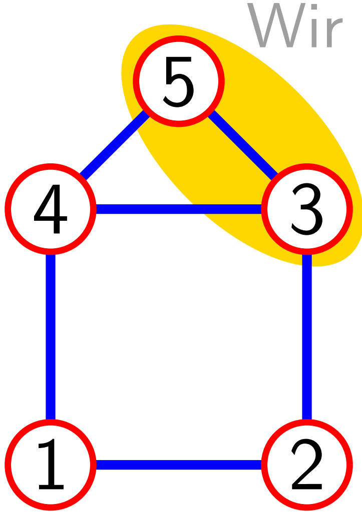


Adjazenzlisten

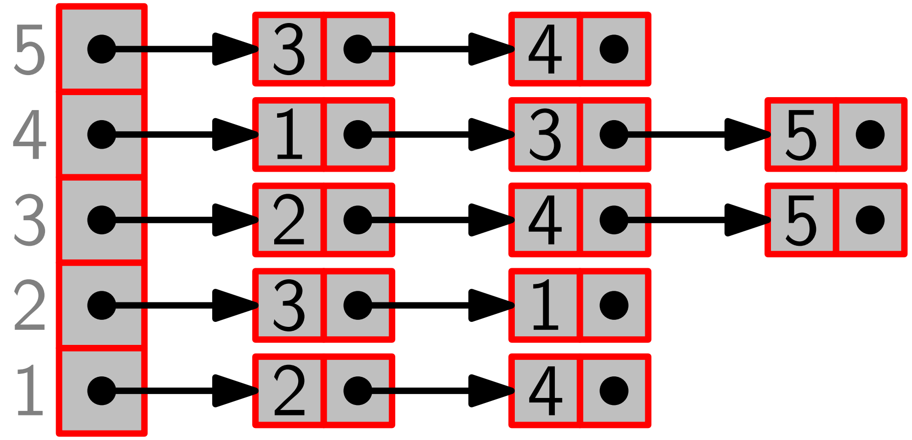
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



ungerichteter Graph



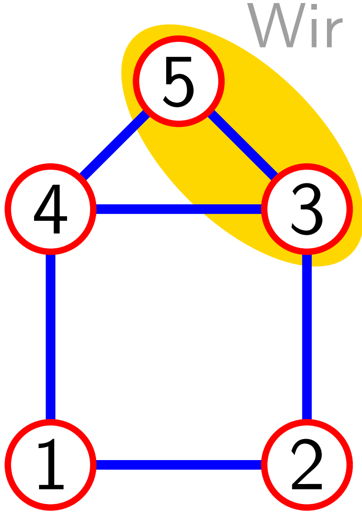
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

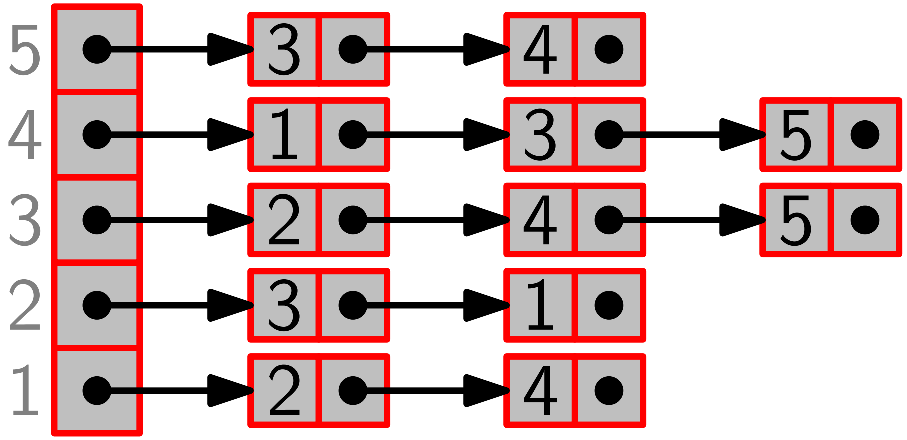
Adjazenzmatrix

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



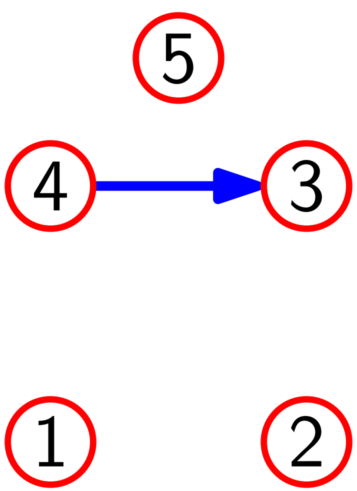
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

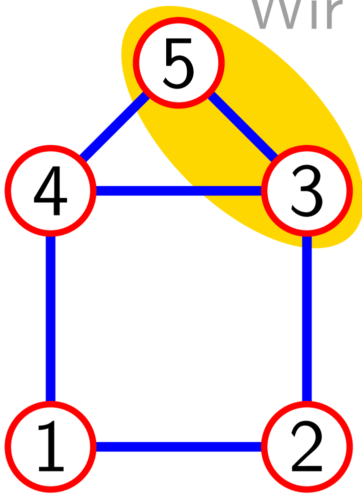
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

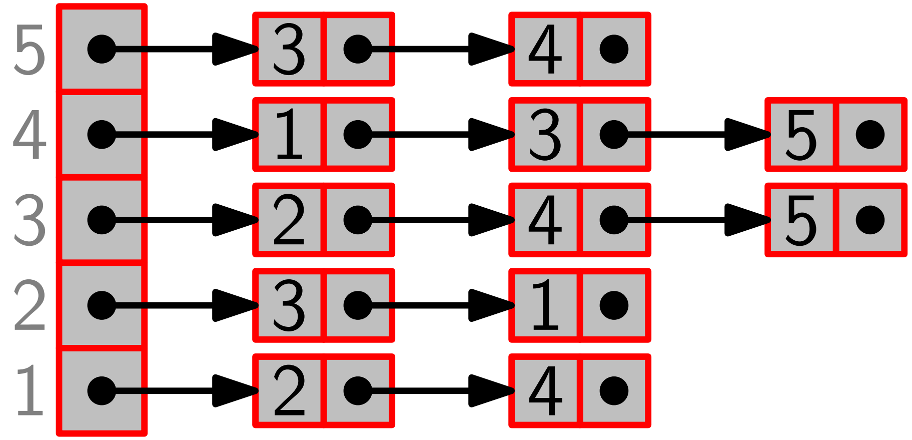


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



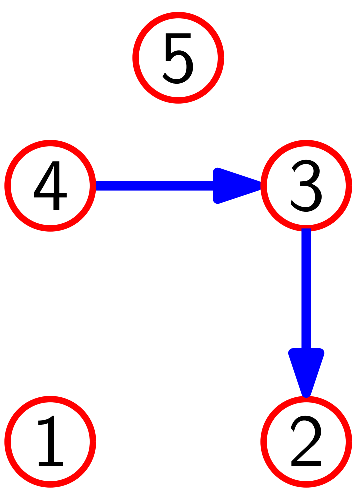
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

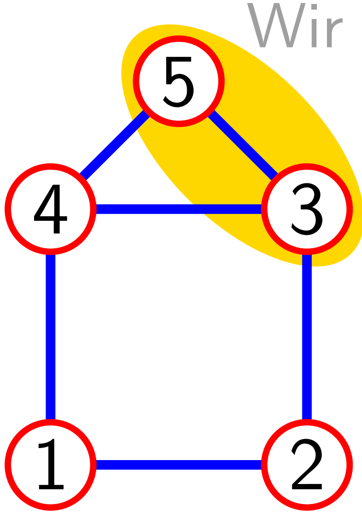
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

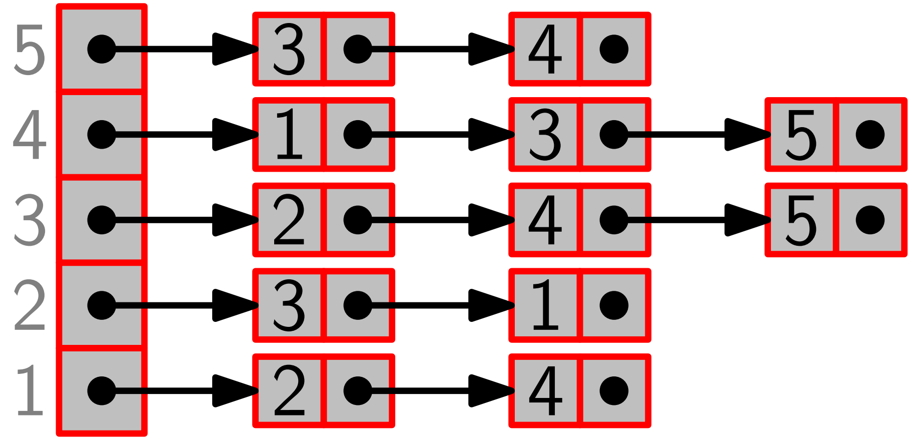


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



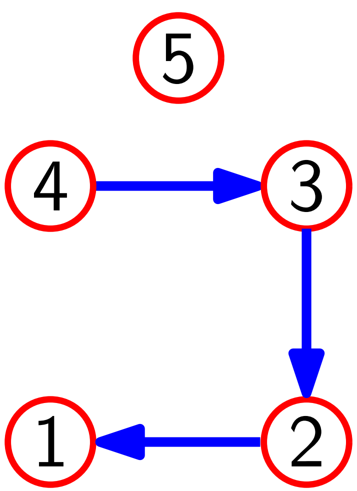
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

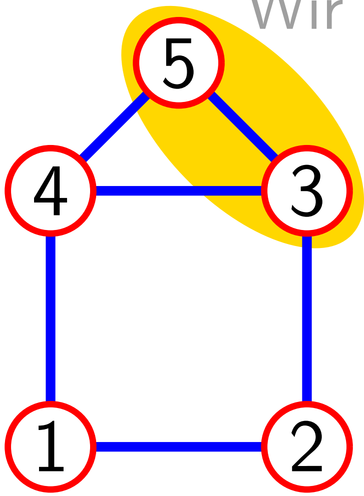
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

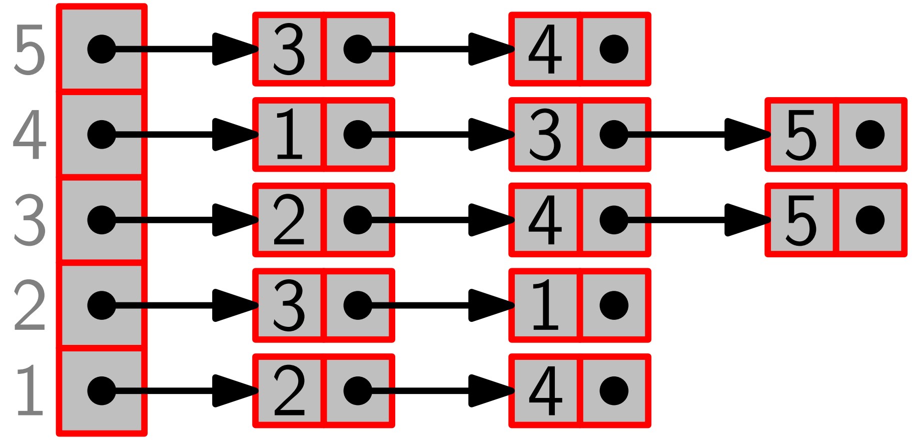


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



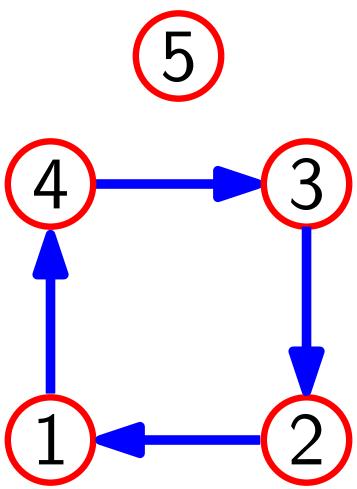
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

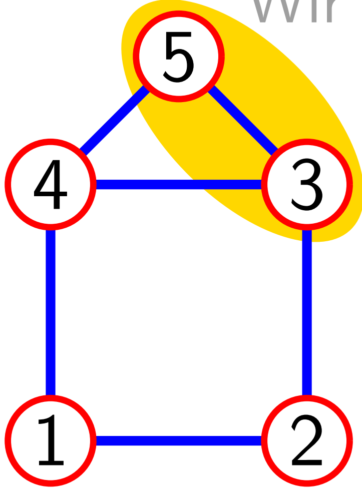
$$\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Adjazenzmatrix

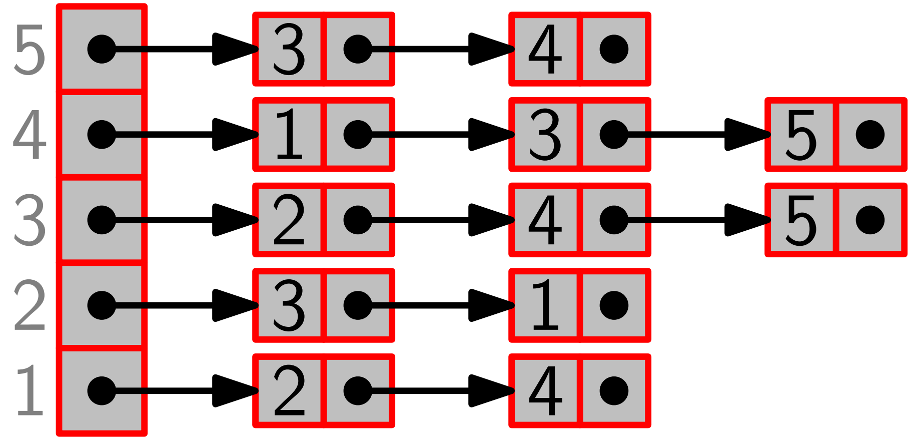


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



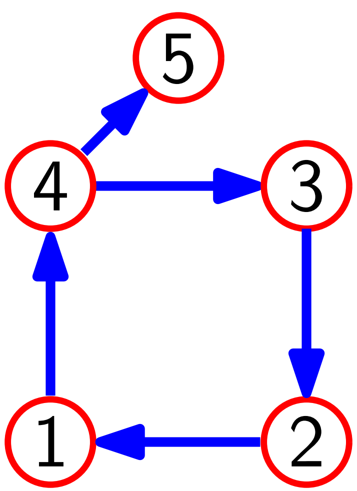
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

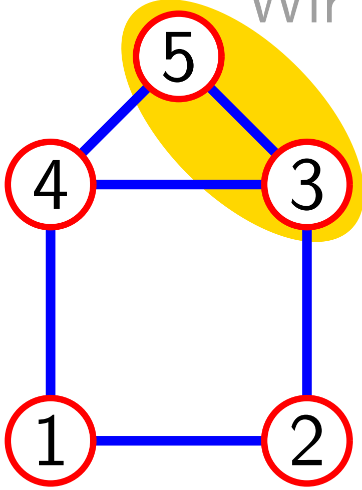
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

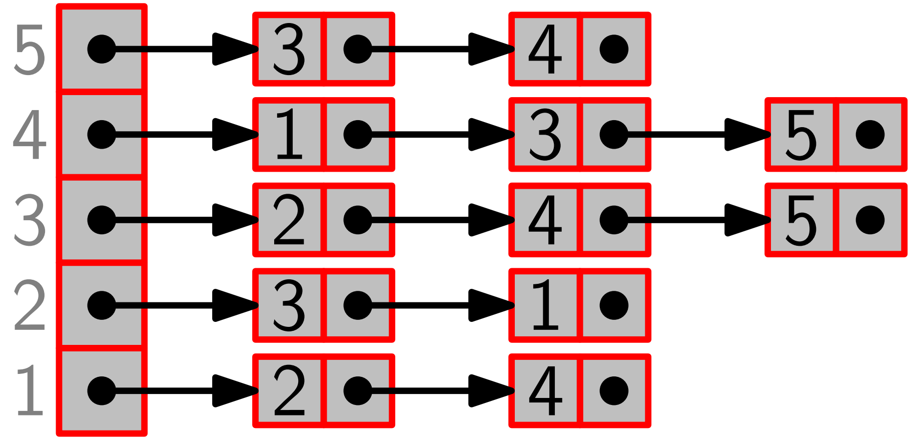


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



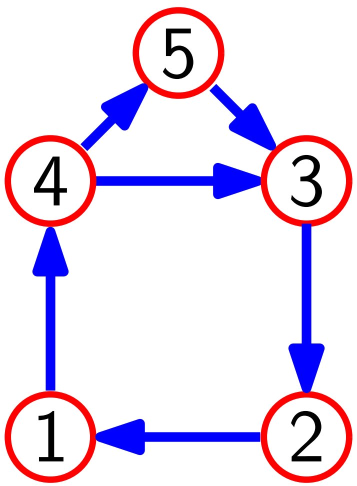
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

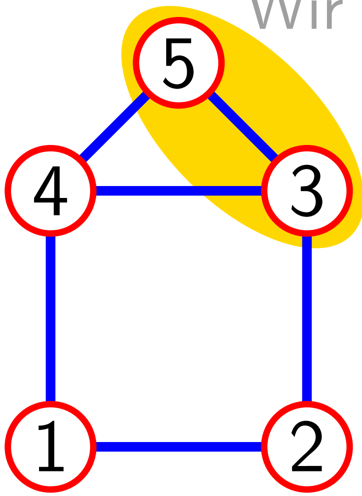
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

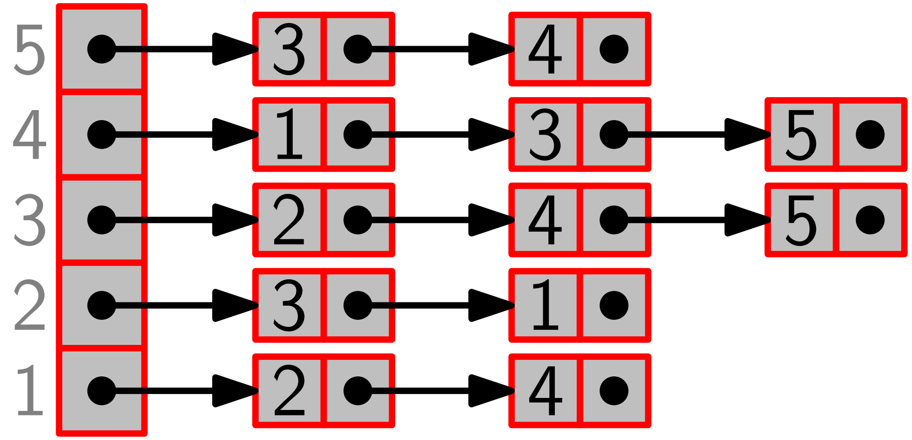


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



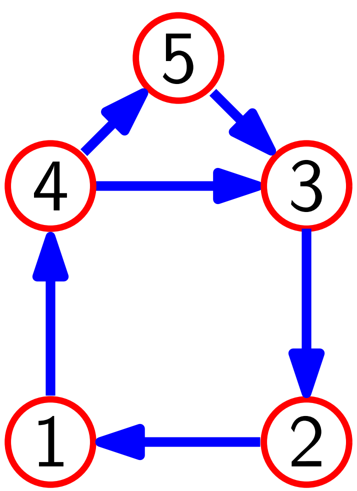
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

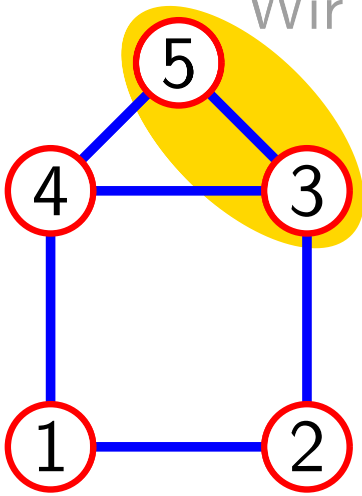
Adjazenzmatrix



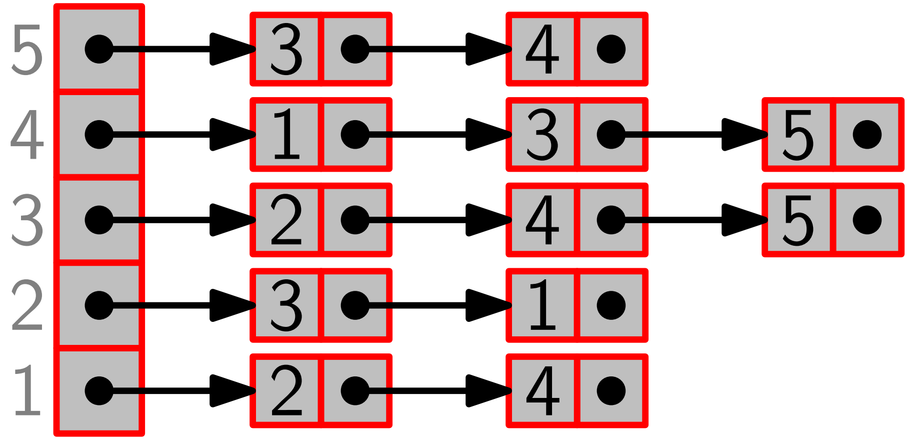
gerichteter Graph

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



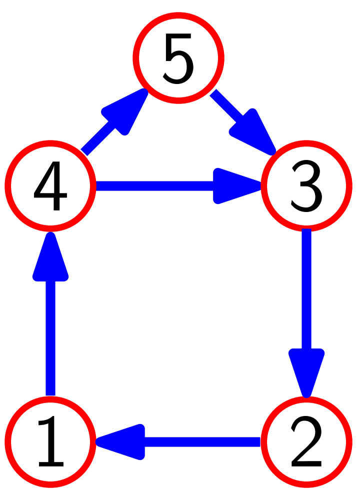
ungerichteter Graph



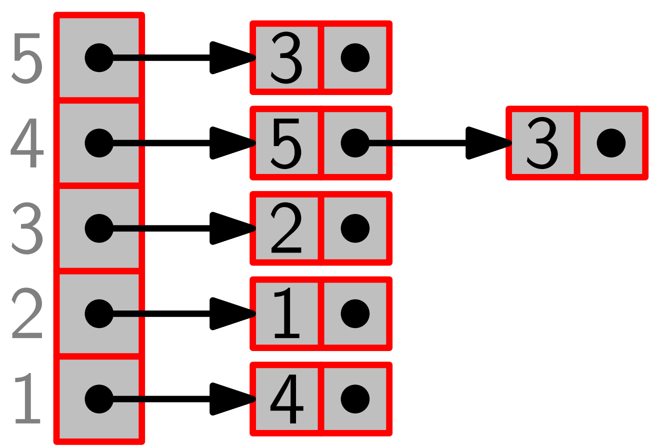
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix



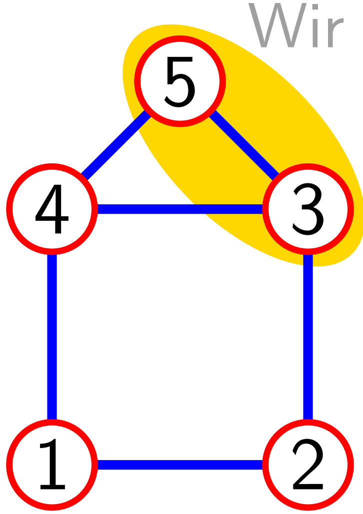
gerichteter Graph



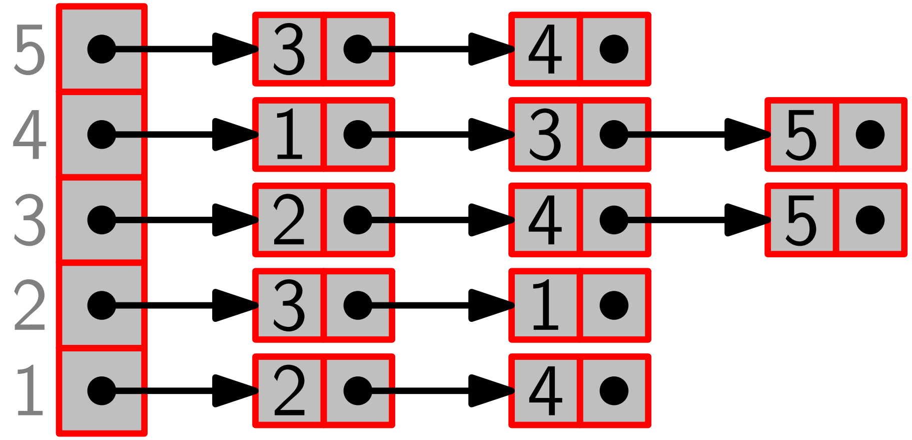
$\mathrm{Adj}[i] = \{j \in V \mid (i,j) \in E\}$

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



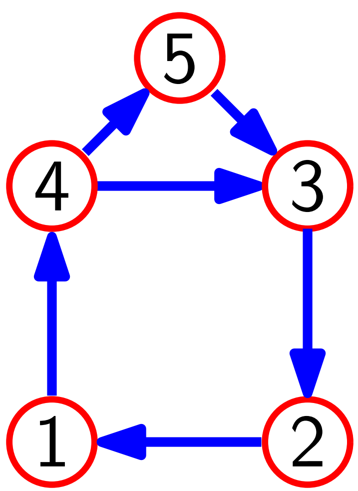
ungerichteter Graph



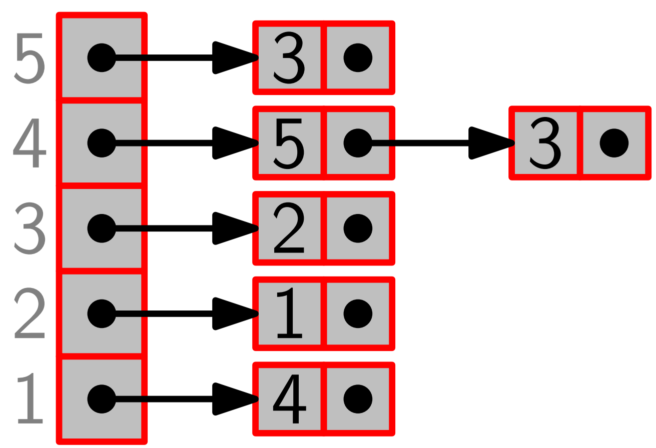
Adjazenzlisten

$$\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Adjazenzmatrix



gerichteter Graph



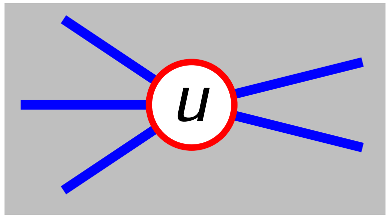
$\mathrm{Adj}[i] = \{j \in V \mid (i,j) \in E\}$

$$\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i,j) \in E$

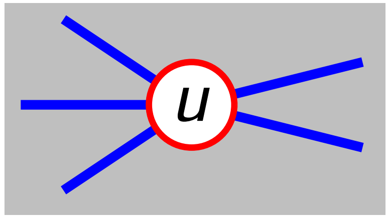
Grad eines Knotens

Def.



Grad eines Knotens

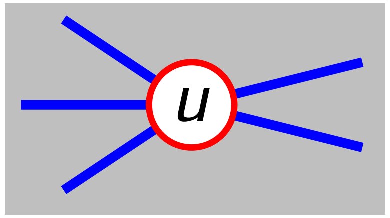
Def.



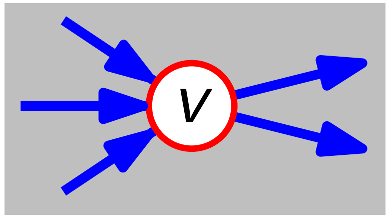
$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

Grad eines Knotens

Def.

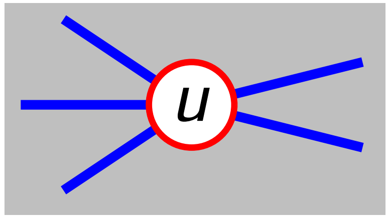


$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

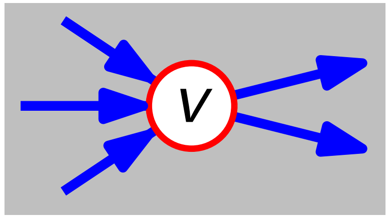


Grad eines Knotens

Def.



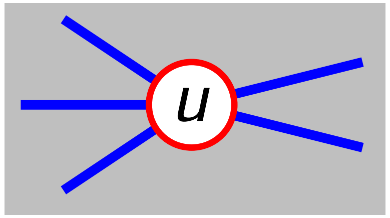
$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



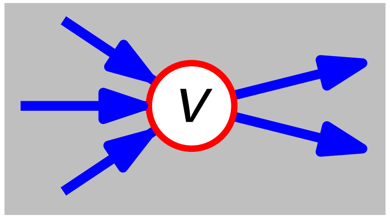
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

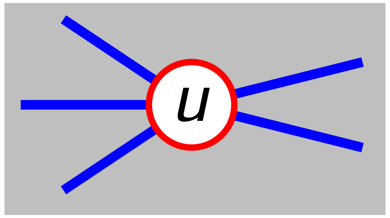


$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

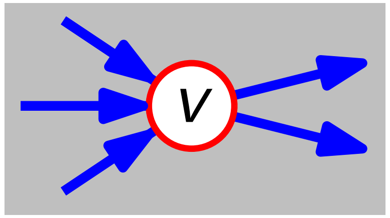
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

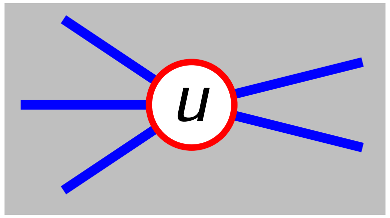


$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

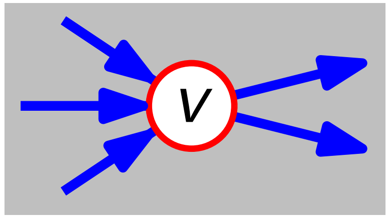
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $=$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

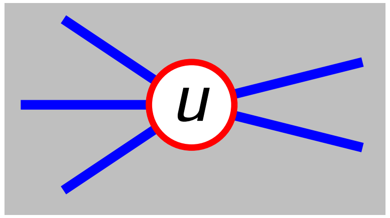


$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

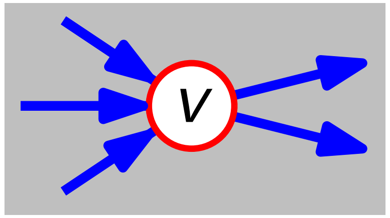
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= \boxed{2 \cdot |E|}$.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



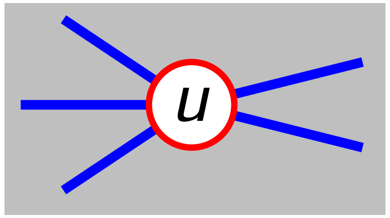
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

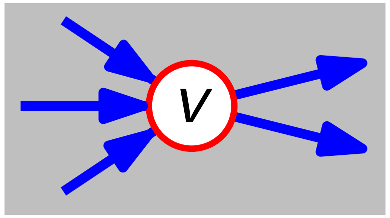
Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

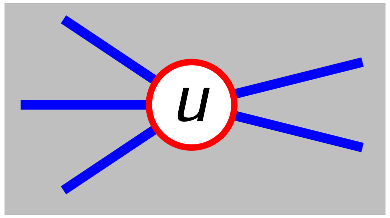
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

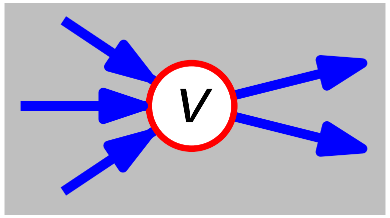
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



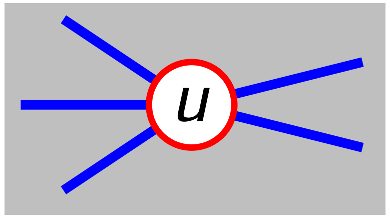
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

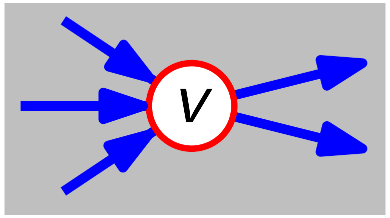
Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

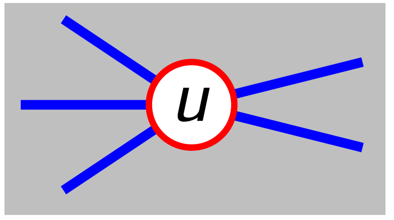
Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

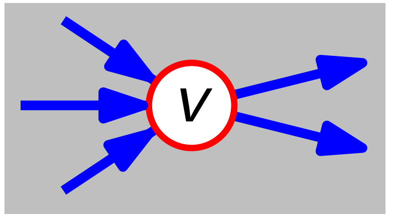
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

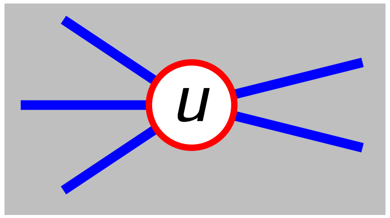
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

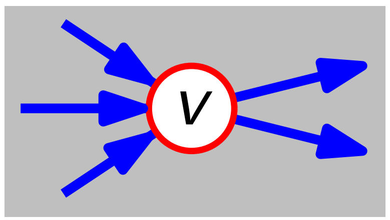
Ein Knoten ist *inzident* zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

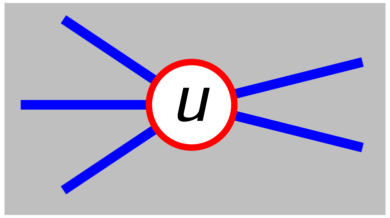
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Aus Sicht der Knoten:

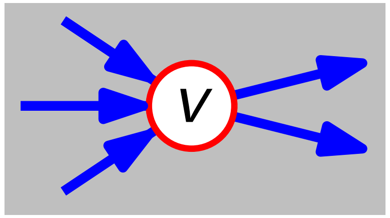
Aus Sicht der Kanten:

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

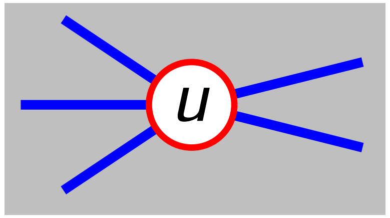
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg v$

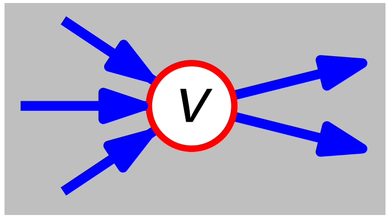
Aus Sicht der Kanten:

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

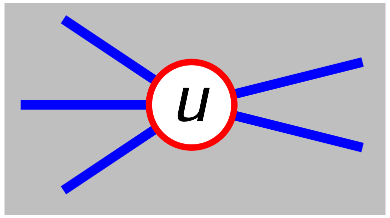
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg v$

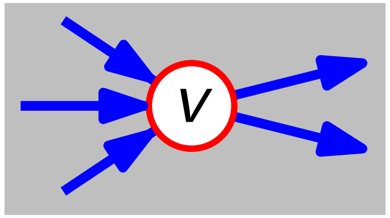
Aus Sicht der Kanten: $\sum_{e \in E} 2$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

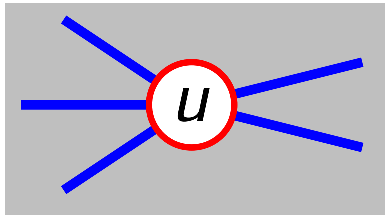
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg v$

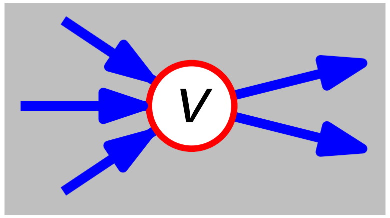
Aus Sicht der Kanten: $\sum_{e \in E} 2 = 2 \cdot |E|$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

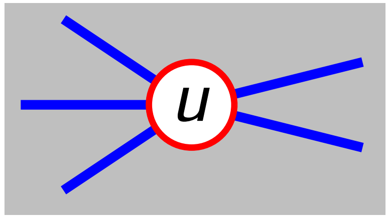
Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg v$

Aus Sicht der Kanten: $\sum_{e \in E} 2 = 2 \cdot |E|$

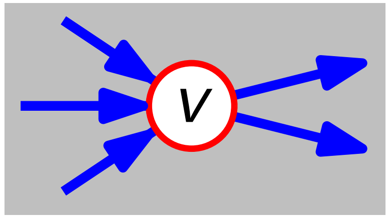
also gleich!

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

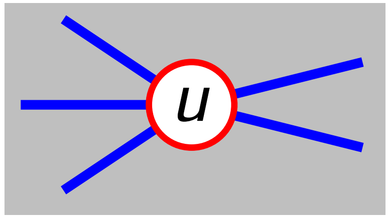


$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

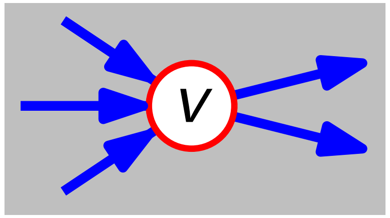
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= \; 2 \cdot |E|$. ✓

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



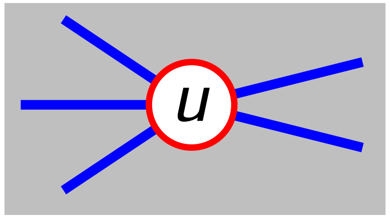
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

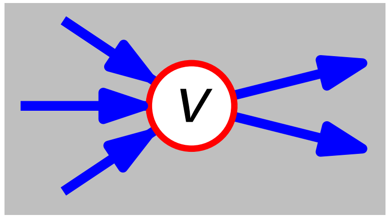
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

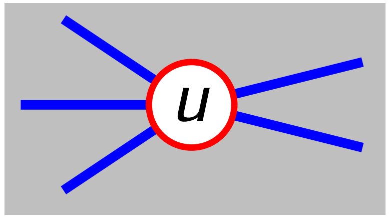
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

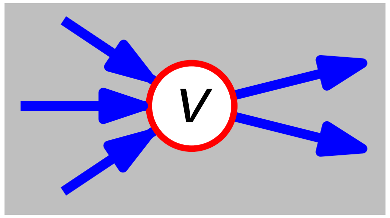
Beweis. $2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg v$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

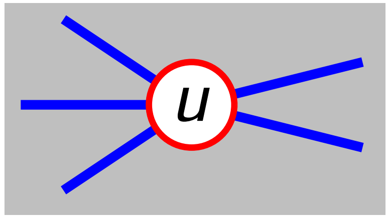
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

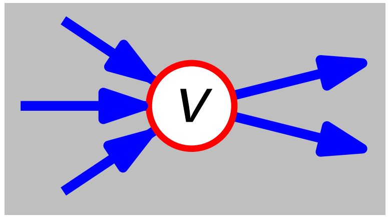
Beweis. $2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg v = \sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v + \sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

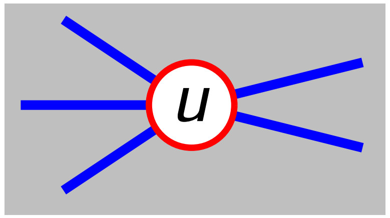
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= \; 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

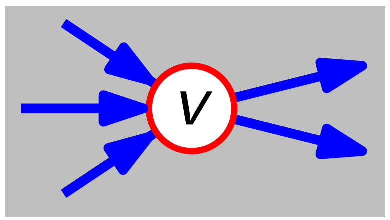
Beweis. $\underbrace{\boxed{2 \cdot |E|}}_{\textit{gerade!}} = \sum_{v \in V} \deg v \; = \sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v + \sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

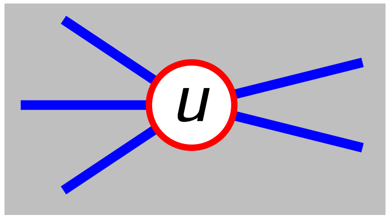
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

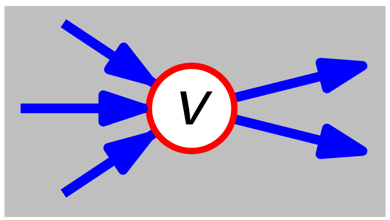
Beweis. $\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg v}_{\textit{gerade!}} = \sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v + \sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

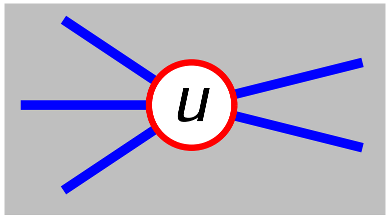
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= \; 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

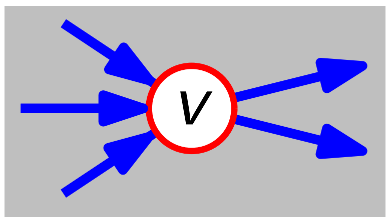
Beweis. $\underbrace{\boxed{2 \cdot |E|}}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\boxed{\sum_{v \in V} \deg v}}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\boxed{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v}}_{\textit{gerade!}} + \sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

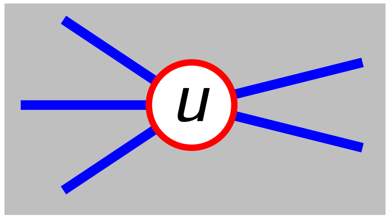
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= \; 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

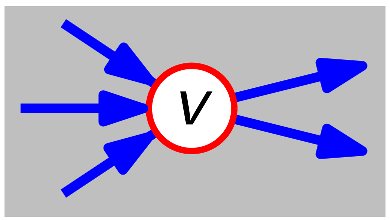
Beweis. $\underbrace{\boxed{2 \cdot |E|}}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\boxed{\sum_{v \in V} \deg v}}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\boxed{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v}}_{\textit{gerade!}} + \boxed{\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v}$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

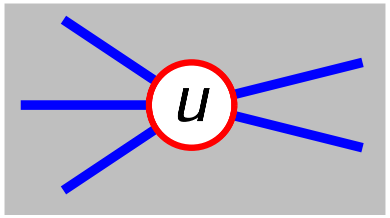
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis.

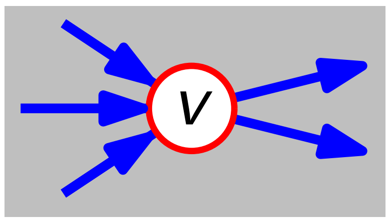
$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\textstyle\sum_{v \in V} \deg v}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\textstyle\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v}_{\textit{gerade!}} + \underbrace{\textstyle\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v}_{\Rightarrow\ \textit{gerade!}}$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= \; 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

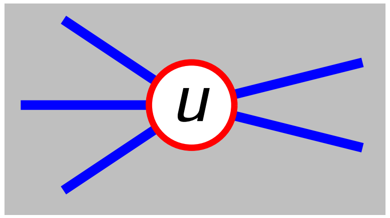
Beweis.

$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\textstyle\sum_{v \in V} \deg v}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\textstyle\sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg v}_{\textit{gerade!}} + \underbrace{\textstyle\sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg v}_{\Rightarrow \; \textit{gerade!}}$$

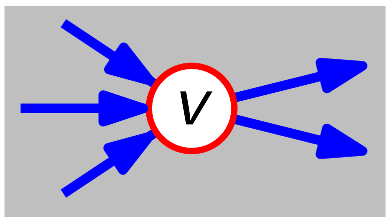
$\sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg v$ *gerade* $\Rightarrow$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= \; 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis. $\underbrace{\boxed{2 \cdot |E|}}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\boxed{\sum_{v \in V} \deg v}}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\boxed{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v}}_{\textit{gerade!}} + \underbrace{\boxed{\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v}}_{\Rightarrow \; \textit{gerade!}}$

$\boxed{\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v}$ *gerade* $\Rightarrow$ $|V_{\mathrm{ung}}|$ ist *gerade!* □