

Teaser: Visualisierung von Graphen

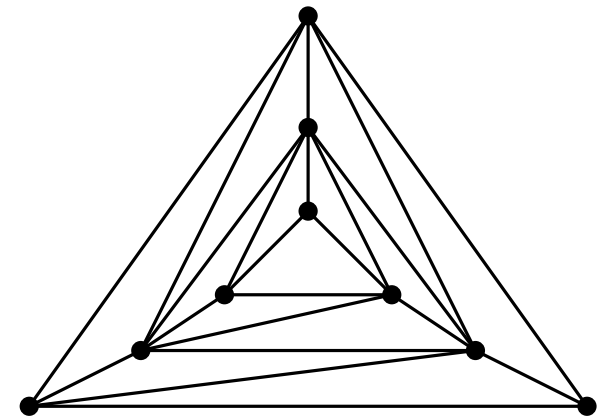
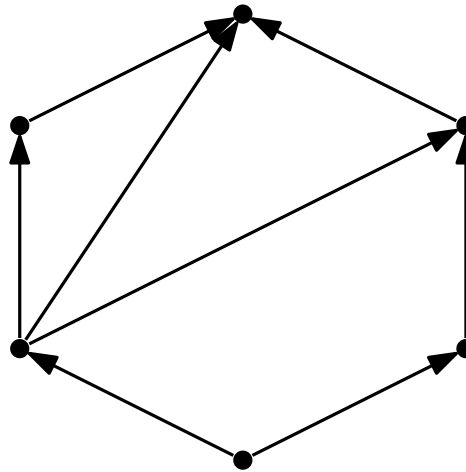
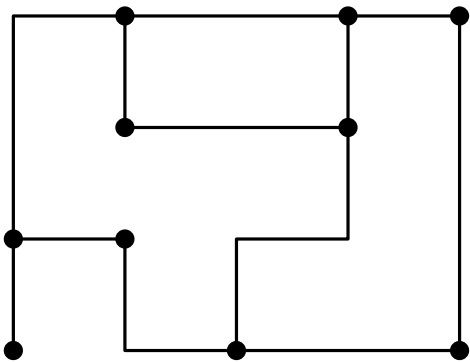
Knickminimale orthogonale Zeichnungen

12. Vorlesung (AGT)
Sommersemester 2019

(basierend auf Folien von Martin Nöllenburg und Robert Görke, KIT)

Beispiele für Probleme beim Zeichnen planarer Graphen

- orthogonale Zeichnungen
- aufwärtsgerichtete Zeichnungen für gerichtete azyklische Graphen
- Winkelauflösung in geradlinigen Zeichnungen



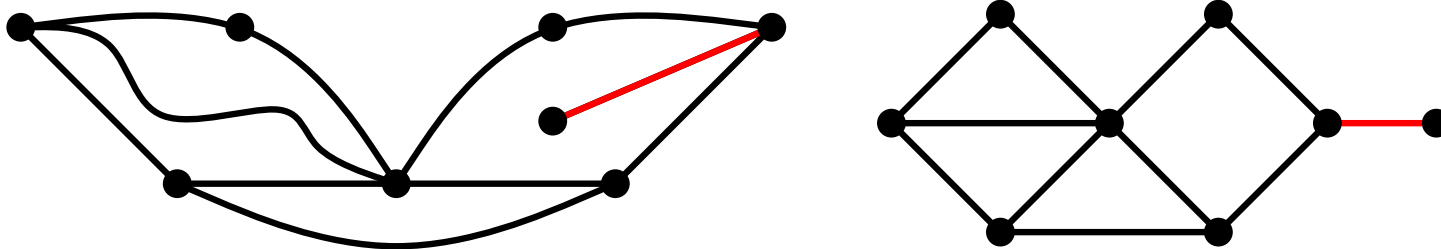
→ Modellierung der Probleme durch Flussnetzwerke

Planarität

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **planar** (oder **plättbar**), wenn es eine Zeichnung Γ von G in die Ebene gibt, in der sich die Zeichnungen von je zwei Kanten nicht schneiden.

Eine solche Zeichnung Γ heißt **eben**.



Definition (*kombinatorische*) Einbettung?!

Knoten, Kanten und *Facetten*

- Jede Zeichnung Γ eines planaren Graphen zerlegt die Ebene in *Facetten*.
- Die *Facetten* sind die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- $F :=$ *Facetten* einer geg. planaren Einbettung von G .
- Was ist der Zusammenhang zwischen $|V|$, $|E|$, $|F| =: f$?

Eulersche Polyederformel:

$$n - m + f = k + 1,$$

wobei $k =$ Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G .

Beweis?

s - t Flussnetzwerk

Definition

Geg: Flussnetzwerk $(G = (V, E); s, t; c)$ mit

- gerichtetem Graph $G = (V, E)$
- Kantenkapazitäten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$
- Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$

Eine Abbildung $f: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s - t -Fluss, falls gilt:

$$\text{für alle } e \in E: \quad f(e) \leq c(e)$$

$$\text{für alle } v \in V \setminus \{s, t\}: \quad \sum_{vw \in E} f(vw) - \sum_{uv \in E} f(uv) = 0$$

$$\text{Überschuss}_f(v) := \underbrace{\sum_{vw \in E} f(vw)}_{\text{Ausfluss}_f(v)} - \underbrace{\sum_{uv \in E} f(uv)}_{\text{Zufluss}_f(v)}$$

Allgemeines Flussnetzwerk

Definition

Geg: Flussnetzwerk $(G = (V, E); l; u; b)$ mit

- gerichtetem Graph $G = (V, E)$
- untere Kantenkapazitäten $l: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
- obere Kantenkapazitäten $u: E \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$
- Knotenbewertung $b: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V} b(v) = 0$

Eine Abbildung $X: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *Fluss*, falls gilt:

$$\text{für alle } e \in E: \quad l(e) \leq X(e) \leq u(e)$$

$$\text{für alle } v \in V: \quad \underbrace{\sum_{vw \in E} X(vw) - \sum_{uv \in E} X(uv)}_{\text{Überschuss}_X(v)} = b(v)$$

Fragestellungen auf gegebenem Flussnetzwerk

Gültiger Fluss

Finde gültigen Fluss $X: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, d.h. Kantenbewertung, die

- » Kapazitätsschranken respektiert, also $l \leq X \leq u$, und
- » Überschuss/Bedarf b genau deckt.

Zusätzlich gegeben: Kostenfunktion $\text{cost}: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Def. $\text{cost}(X) := \sum_{e \in E} \text{cost}(e) \cdot X(e)$

Minimalkostenflussproblem

Finde einen gültigen Fluss $X: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, der

- » $\text{cost}(X)$ minimiert (unter allen gültigen Flüssen)

Laufzeit im Allgemeinen

$O(n^2 m^3 \log n)$

Netz planar, Kantenkosten $\leq c$, Facettengrade $\leq d$

$O(c\sqrt{d} \cdot n^{3/2})$

[Cornelsen & Karrenbauer, JGAA'12]

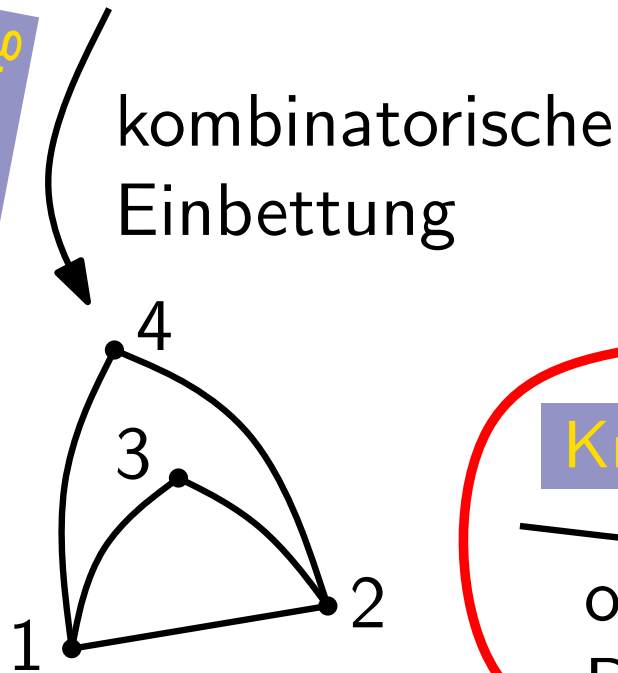
(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$$

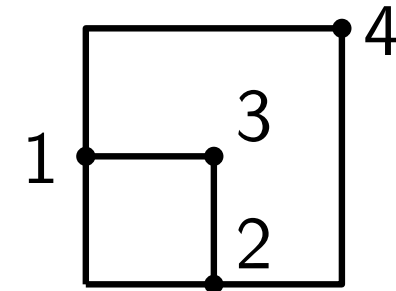
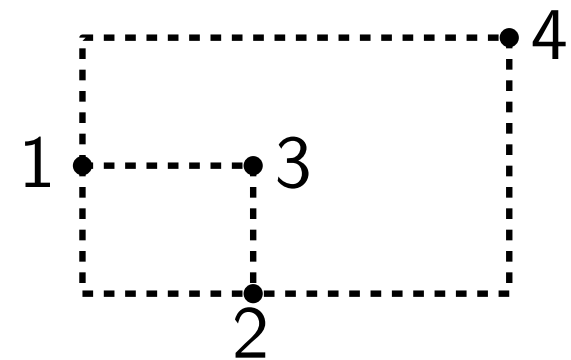
Kreuzungsminimierung



Knickminimierung

orthogonale Beschreibung

planare Einbettung



Flächenminimierung

Das Problem

Problem 2: Knickminimierung mit fester Einbettung

Gegeben Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\Delta \leq 4$, kombinatorischer Einbettung \mathcal{F} und äußerer Facette f_0 ,
finde orthogonale Gitterzeichnung,
die (\mathcal{F}, f_0) erhält und minimale Knickanzahl hat.

Das Problem

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\Delta \leq 4$, kombinatorischer Einbettung \mathcal{F} und äußerer Facette f_0 ,
finde **orthogonale Beschreibung $H(G)$** ,
die (\mathcal{F}, f_0) erhält und minimale Knickanzahl hat.

Orthogonale Beschreibung

Eingabe: $G = (V, E)$ planar, \mathcal{F} , f_0

Ausgabe: orthogonale Beschreibung $H(G) = \{H(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$

Facettenbeschreibung $H(f)$:

im UZS geordnete Folge v. Kantenbeschreibungen (e, δ, α) mit

➤ e ist Randkante von f

➤ δ ist 0-1-Folge (0 = Rechtsknick, 1 = Linksknick)

➤ α ist Winkel $\in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ zwischen e und Nachfolger e'

$H(G)$: f_0 falsch rum!?

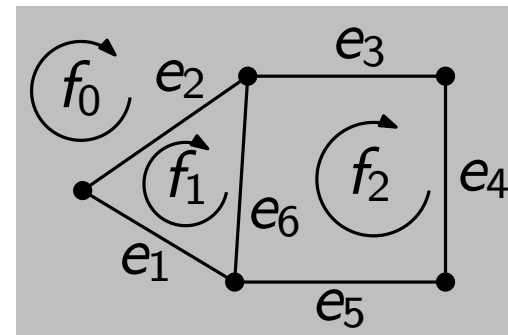
$H(G)$:

$$H(f_1) = ((e_1, 00, \frac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$

$$H(f_2) = ((e_5, 000, \frac{\pi}{2}), (e_6, 11, \frac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$$

$$H(f_0) = ((e_1, 11, \frac{\pi}{2}), (e_5, 111, \frac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$$

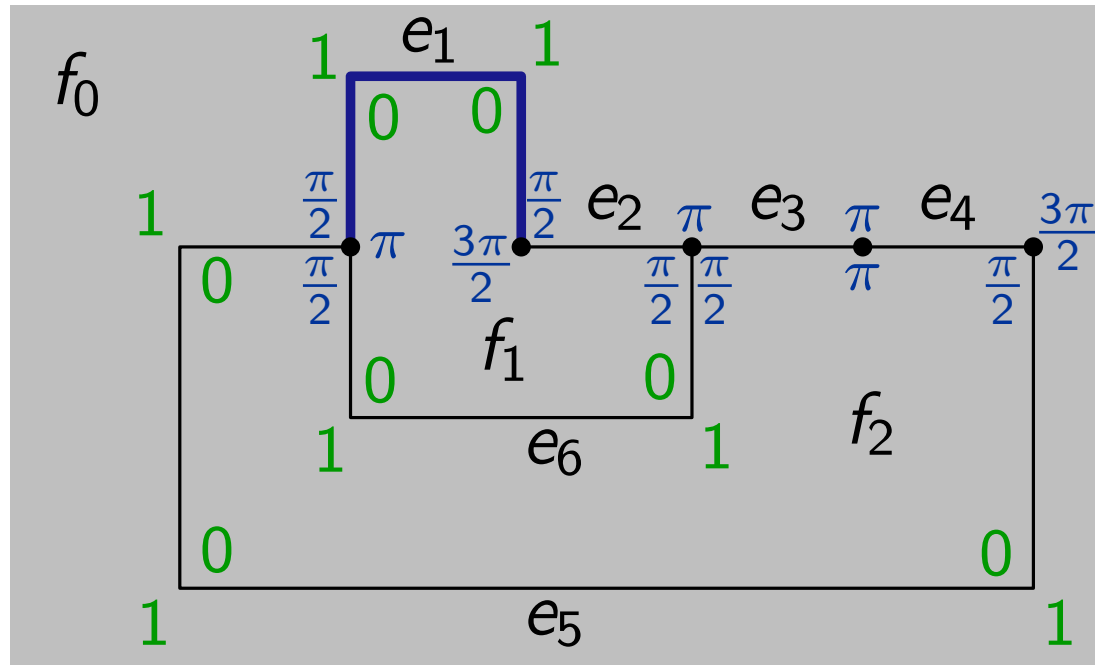
Beispielgraph G :



Beispiel: Orthogonale Beschreibung

Aufgabe: Finde eine orthogonale Zeichnung von G gemäß der orthogonalen Beschreibung $H(G)$!

Lösung:



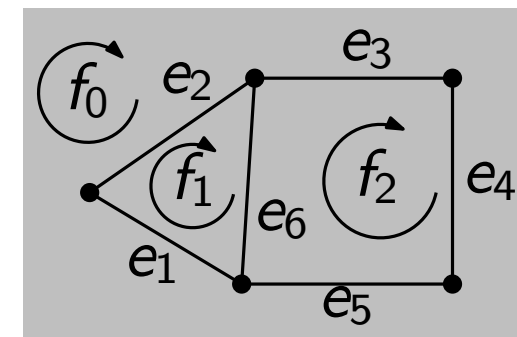
$H(G)$:

$$H(f_1) = \left((e_1, 00, \frac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi) \right)$$

$$H(f_2) = \left((e_5, 000, \frac{\pi}{2}), (e_6, 11, \frac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \frac{\pi}{2}) \right)$$

$$H(f_0) = \left((e_1, 11, \frac{\pi}{2}), (e_5, 111, \frac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}) \right)$$

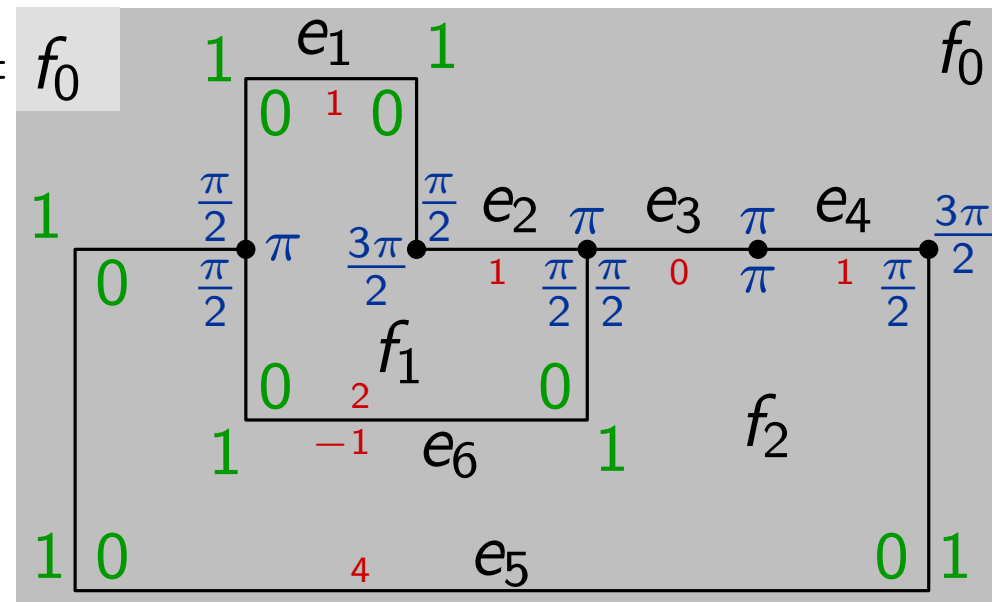
Beispielgraph G



Zulässige orthogonale Beschreibungen

- 11) $H(G)$ entspricht (\mathcal{F}, f_0) .
- 12) Für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $(uv, \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $(vu, \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt:
 δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2 .
- 13) Seien $|\delta|_0$ und $|\delta|_1$ die Anzahlen Nullen bzw. Einsen in δ .
 Sei $r = (e, \delta, \alpha)$. Für $C(r) := |\delta|_0 - |\delta|_1 + 2 - \alpha/\frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\sum_{r \in H(f)} C(r) = \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0 \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases}$$

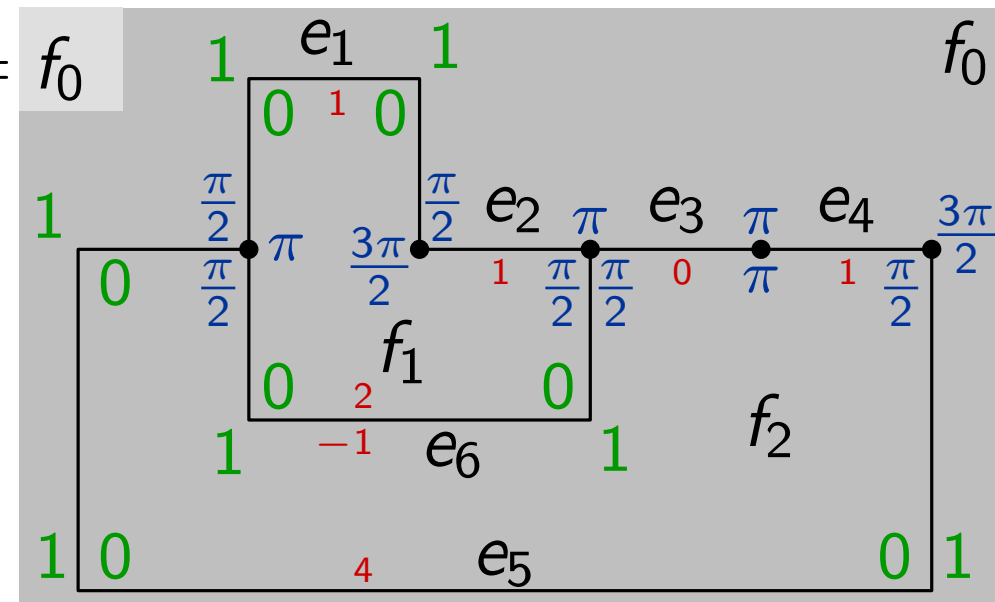


Zulässige orthogonale Beschreibungen

- 11) $H(G)$ entspricht (\mathcal{F}, f_0) .
- 12) Für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $(uv, \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $(vu, \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt:
 δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2 .
- 13) Seien $|\delta|_0$ und $|\delta|_1$ die Anzahlen Nullen bzw. Einsen in δ .
 Sei $r = (e, \delta, \alpha)$. Für $C(r) := |\delta|_0 - |\delta|_1 + 2 - \alpha/\frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\sum_{r \in H(f)} C(r) = \begin{cases} -4 & \text{falls } f = f_0 \\ +4 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- 14) Für jeden Knoten v ist die Summe der anliegenden Winkel gleich 2π .



Erinnerung

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\Delta \leq 4$, kombinatorischer Einbettung \mathcal{F} und äußerer Facette f_0 ,
finde **orthogonale Beschreibung $H(G)$** ,
die (\mathcal{F}, f_0) erhält und minimale Knickanzahl hat.

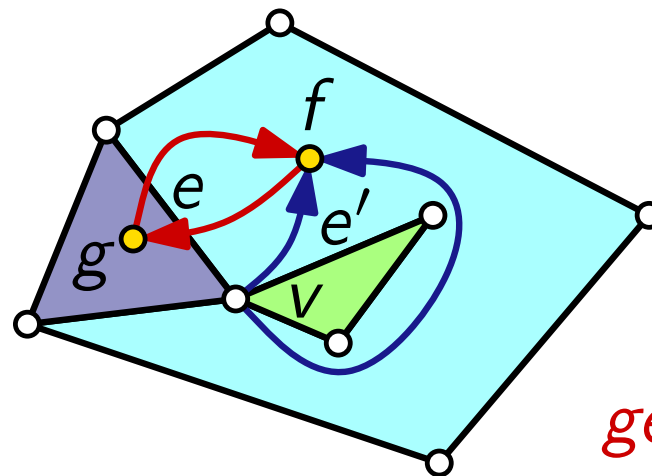
Ansatz: Baue Flussnetzwerk!

- Währung = $\angle \frac{\pi}{2}$
- Knoten $\xrightarrow{\angle}$ Facetten ($\# \angle \frac{\pi}{2}$ zur Facette)
- Facetten $\xrightarrow{\angle}$ Nachbar-Facetten ($\#$ Knicke zum Nachbarn)

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

$\gg A = \{ (v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ liegt zw. Kanten } e, e' \text{ auf } \partial f \}$
 $\cup \{ (f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ haben Kante } e \text{ gemein} \}$



gerichteter Multigraph!

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

$$\gg A = \{(v, f)_{ee'} \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ liegt zw. Kanten } e, e' \text{ auf } \partial f\} \\ \cup \{(f, g)_e \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ haben Kante } e \text{ gemein}\}$$

$$\gg b(v) = 4 \text{ für alle } v \in V$$

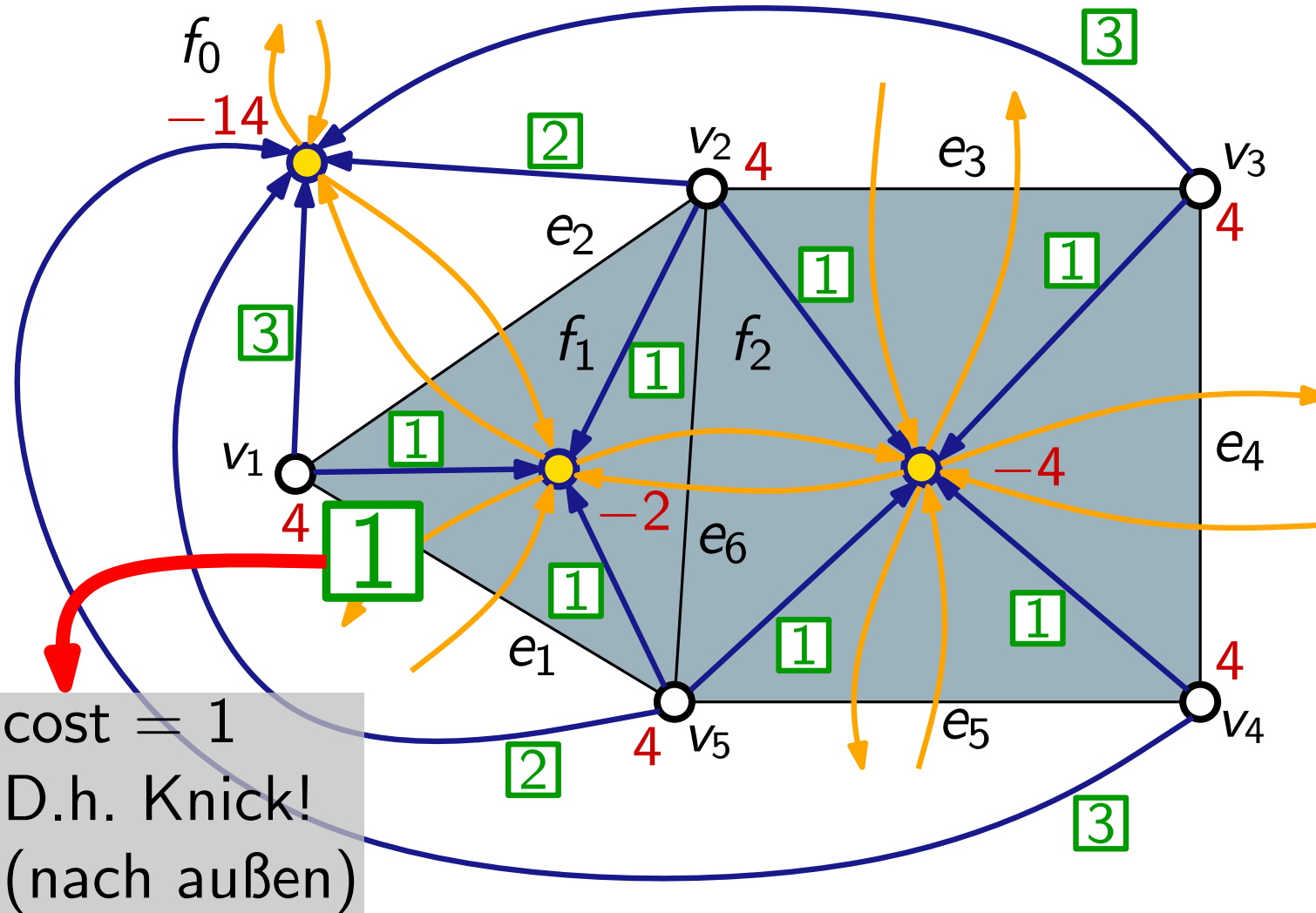
$$\gg b(f) = -2 \deg_G(f) + \left. \begin{array}{l} -4 \text{ falls } f = f_0, \\ +4 \text{ sonst.} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum b = 0 \quad (\text{Euler})$$

$$\gg \text{für alle } vf \in A: \quad l(vf) := 1 \leq X(vf) \leq 4 =: u(vf)$$

$$\text{für alle } fg \in A: \quad l(fg) := 0 \leq X(fg) \leq \infty =: u(fg)$$

$$\text{cost}(vf) = \qquad \qquad \qquad \text{cost}(fg) =$$

Beispiel Flussnetzwerk



Legende

3 Fluss

4 = b -Wert

$l/u/cost$

1/4/0

→ (blue arrow)

0/∞/1

→ (orange arrow)

V ○

\mathcal{F} ●

Kernaussage + Korrektheit

Satz.

[Tamassia'87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen (G, \mathcal{F}, f_0) existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

\Leftrightarrow Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k .

\Leftarrow : Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k
 Ges.: orthogonale Beschreibung $H(G)$

(H1) $H(G)$ entspricht \mathcal{F}, f_0 ✓

(H2) Kantenbeschr. von anderer Seite invertiert + umgedreht ✓

(H3) Winkelsumme an $f: b(f)$ ohne gestreckte Winkel = 4 ✓

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π ✓



Kernaussage + Korre

Laufzeit:

Nutze Ganzzahligkeit (l, u, c) , wenige Kanten, ...

$O(n^2 \log n)$ [Tamassia '87]

$O(n^{7/4} \sqrt{\log n})$ [Garg & Tamassia '96]

$O(n^{3/2})$ [Cornelsen & Karrenbauer '12]

Satz. [Tamassia '87]

Zu einem eben eingebetteten Graphen (G, \mathcal{F}, f_0) existiert eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

\Leftrightarrow Flussnetzwerk $N(G)$ hat Fluss X mit Kosten k .

\Rightarrow : Geg.: orthogonale Beschreibung $H(G)$

Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss X mit Kosten k

(N1) $X(vf) = 1/2/3/4$ ✓

(N2) $X(fg) := |\delta_{fg}|_0$, (e, δ_{fg}, x) Beschreibung v. $e \stackrel{*}{=} fg$ für f ✓

(N3) Kapazitäten ✓, Überschuss-/Bedarfsdeckung ✓

(N4) Kosten = k ✓

Kompaktifizierung

Problem: orthogonale Zeichnung zu orthogonaler Beschreibung

Gegeben planarer Graph $G = (V, E)$ mit $\Delta \leq 4$ und orthogonaler Beschreibung $H(G)$.

Finde orthogonale Zeichnung von G , die $H(G)$ realisiert.

Spezialfall: alle Facetten sind Rechtecke

⇒ erlaubt Garantien: >> minimale Gesamtkantenlänge

>> minimale Fläche

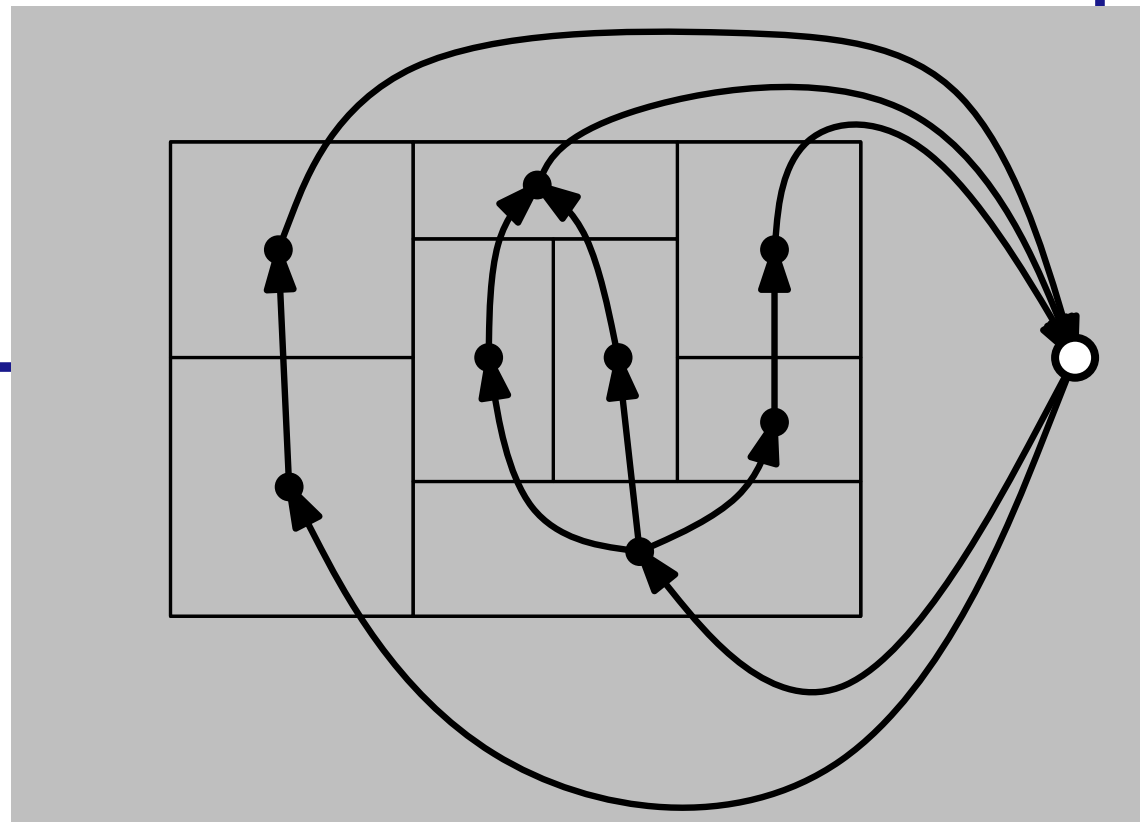
>> Knicke sind außen

>> gegenüberliegende Seiten gleich lang ⇒ Layout ok

Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\text{hor}} = ((V_{\text{hor}}, A_{\text{hor}}); l; u; b; \text{cost})$

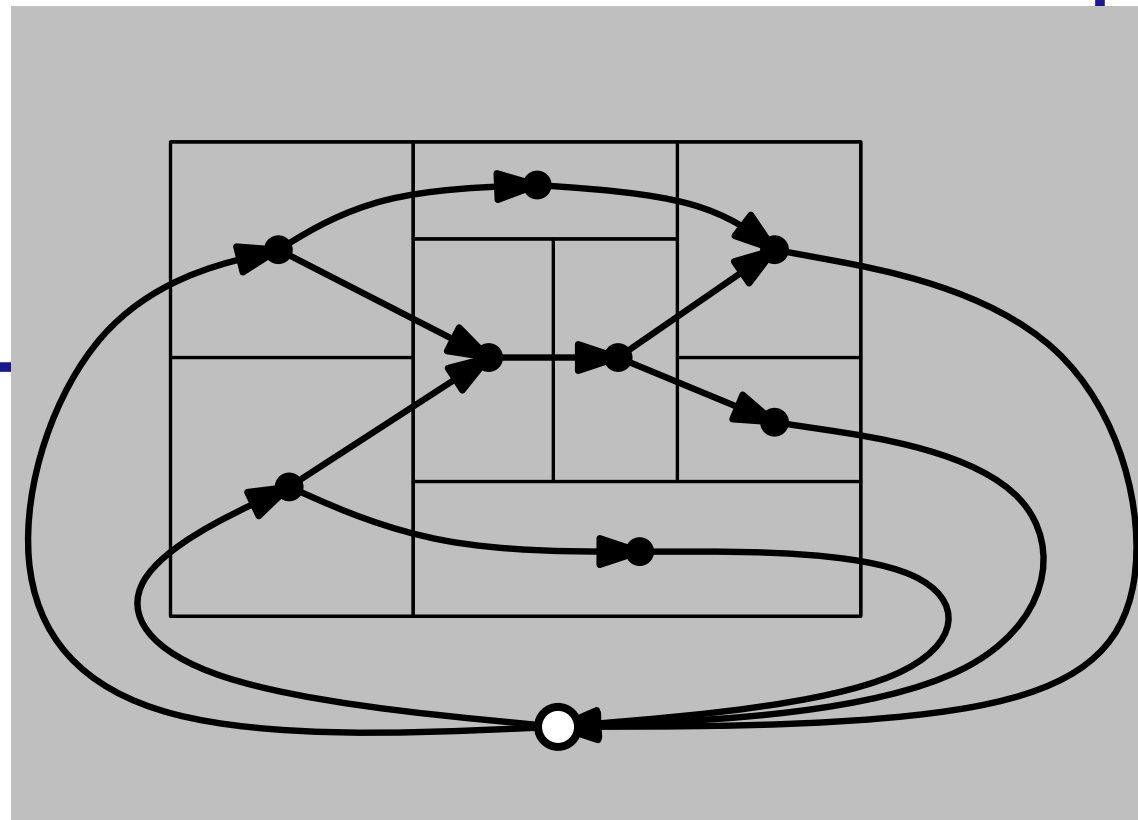
- $V_{\text{hor}} = \mathcal{F}$
- $A_{\text{hor}} = \{(f, g) \mid f, g \text{ besitzen gemeinsames horizontales Kantensegment und } f \text{ liegt unterhalb von } g\}$
- $l \equiv 1$
- $u \equiv \infty$
- $\text{cost} \equiv 1$
- $b \equiv 0$



Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\text{ver}} = ((V_{\text{ver}}, A_{\text{ver}}); l; u; b; \text{cost})$

- $V_{\text{ver}} = \mathcal{F}$
- $A_{\text{ver}} = \{(f, g) \mid f, g \text{ besitzen gemeinsames vertikales Kantensegment und } f \text{ liegt links von } g\}$
- $l \equiv 1$
- $u \equiv \infty$
- $\text{cost} \equiv 1$
- $b \equiv 0$



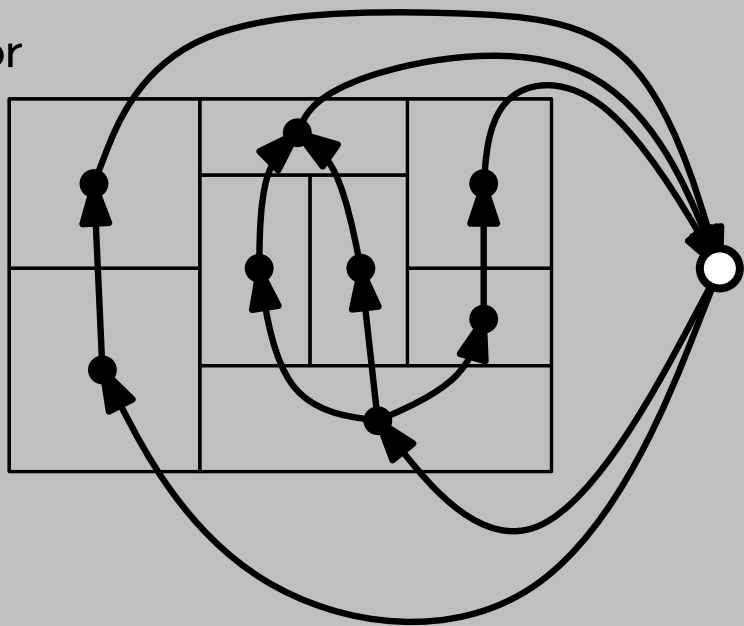
Optimal bei Rechtecken

Satz

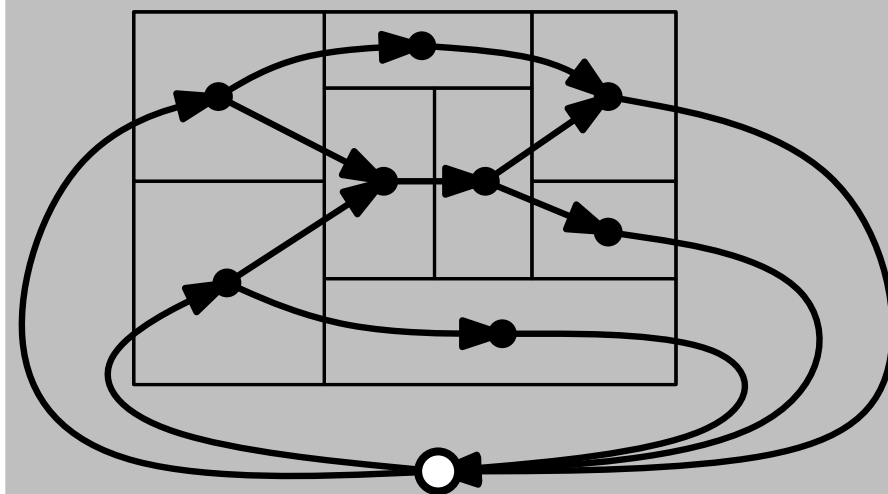
Min-Cost-Flüsse für N_{hor} und N_{ver} liefern:

1. X Fluss \Leftrightarrow entspr. Kantenlängen induzieren orth. Zeichnung
2. $|X(N_{\text{hor}})| = \text{Höhe}$, $|X(N_{\text{ver}})| = \text{Breite}$
3. $\text{cost}(X(N_{\text{hor}})) + \text{cost}(X(N_{\text{ver}})) = \text{Gesamtkantenlänge}$

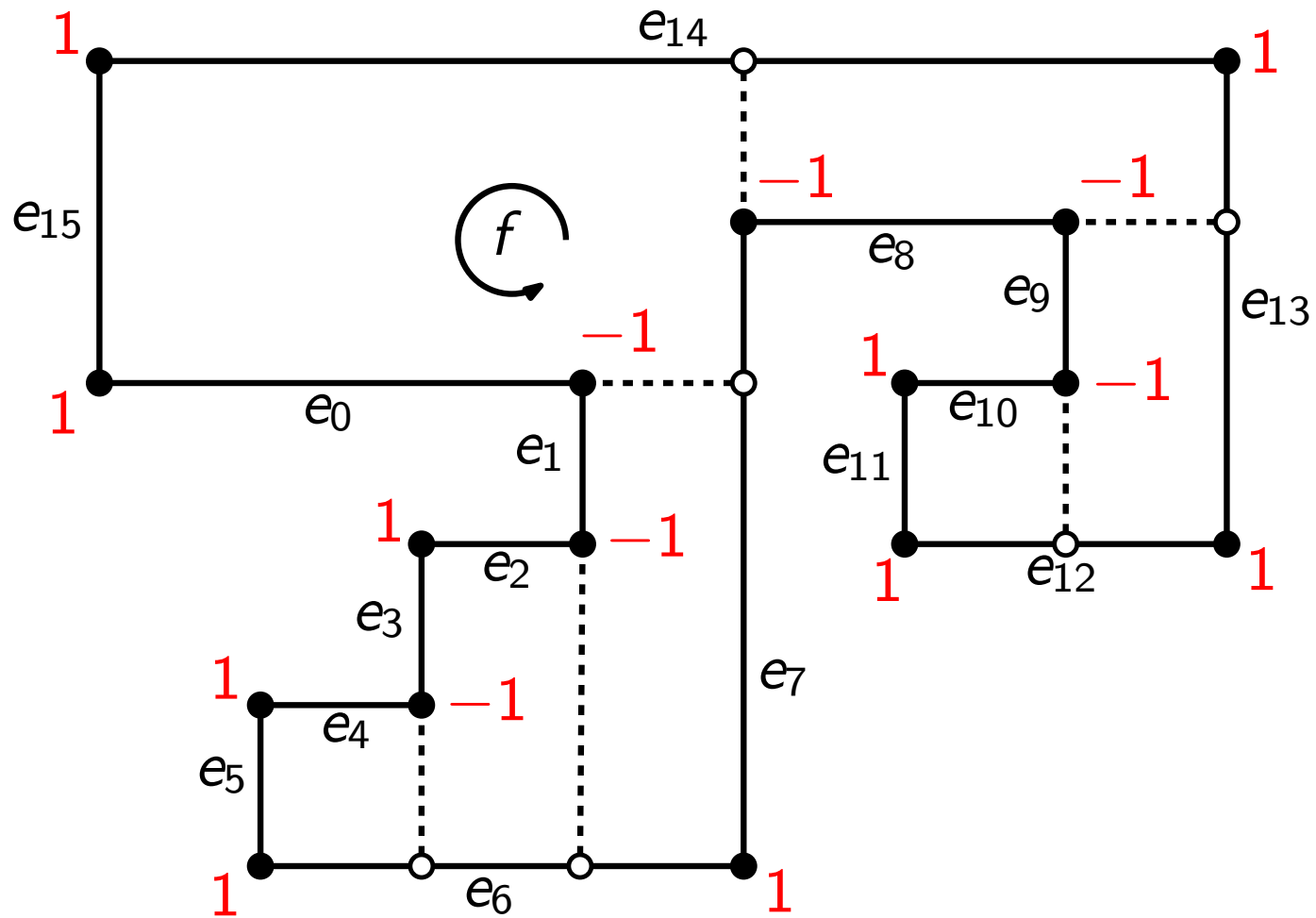
N_{hor}



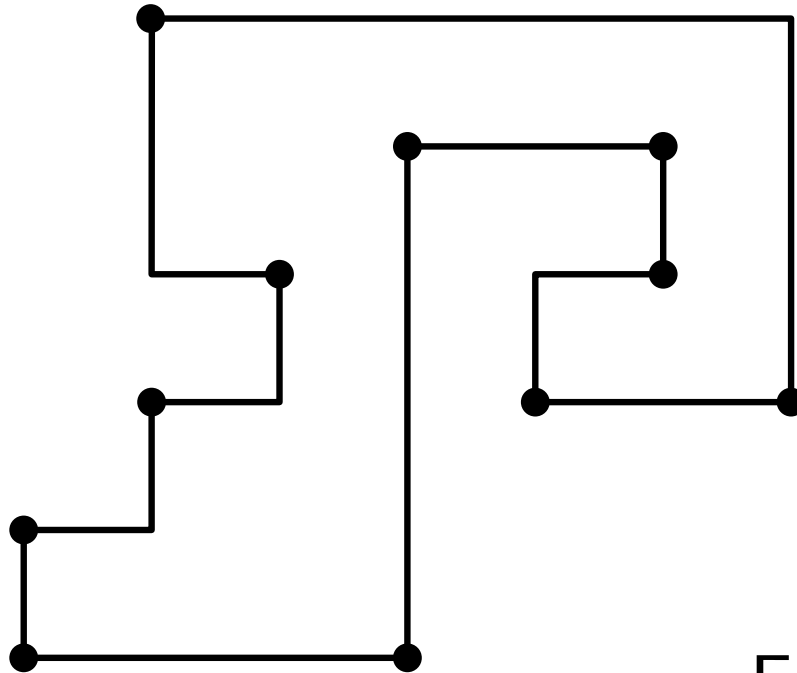
N_{ver}



Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



Flächenminimal?

Nein!

Zusammenfassung Knickminimierung

- Knickminimierung bei fester Einbettung mittels Flussmodellierung
- optimale Kompaktierung für rechteckige Facetten
- Erweiterung auf allgemeinen Fall nicht mehr optimal
- Kompaktierung i.A. NP-schwer

Mögliche Erweiterungen

- Knotengrad ≥ 4
- nicht-planare Graphen



Übung

Kompaktierung ist NP-schwer [Patrignani '01]

- Reduktion von **SAT**
 - n Variablen x_1, \dots, x_n
 - m Klauseln C_1, \dots, C_m ;
 - Klausel: Disjunktion von Literalen x_i/\bar{x}_i
z.B.: $C_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$
 - Ist $\Phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ erfüllbar, d.h. gibt es eine Belegung der Variablen, die alle Klauseln erfüllt?

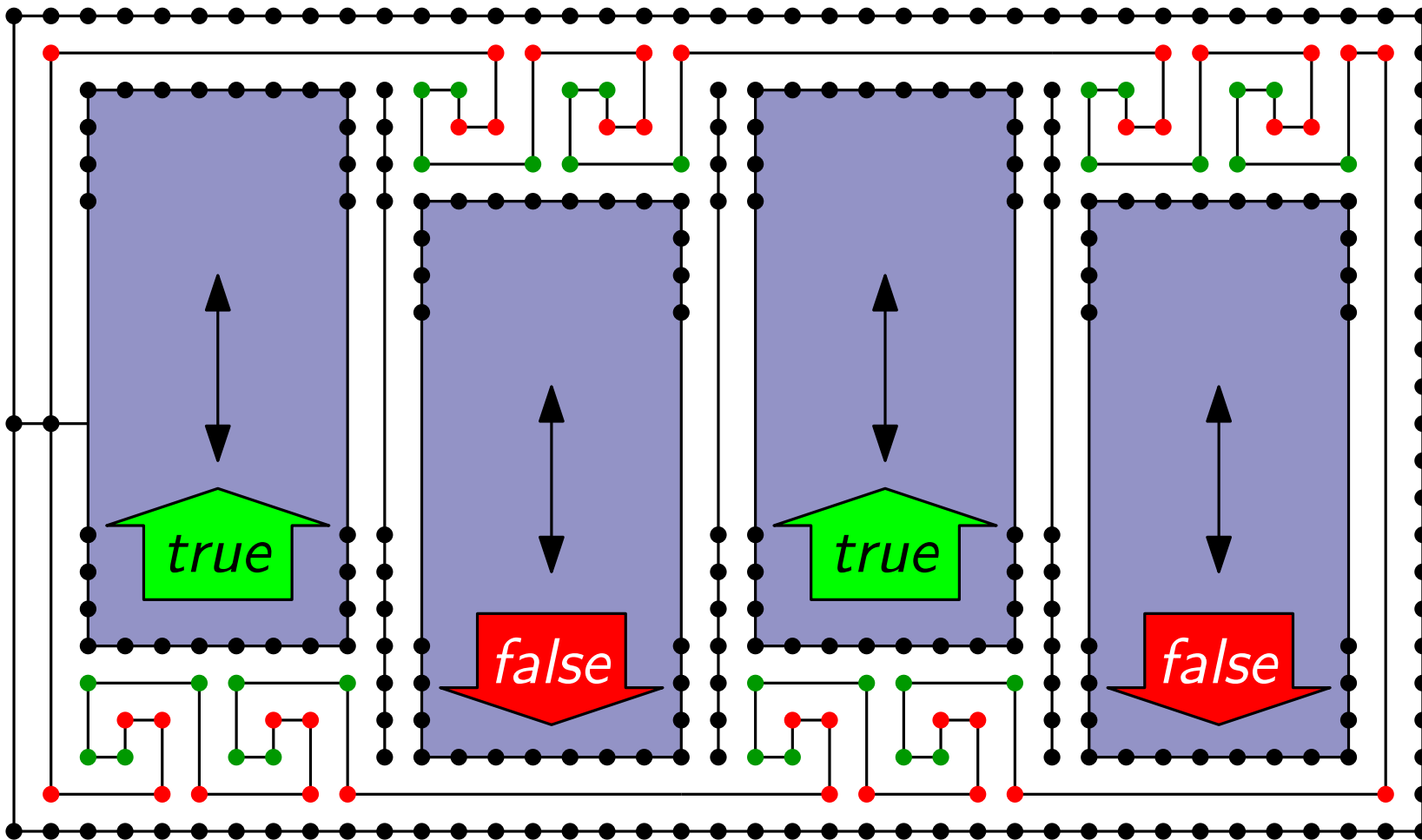
- Bestimme geeigneten Wert K .

- (G, H) lässt sich in Fläche K zeichnen $\Leftrightarrow \Phi$ erfüllbar.

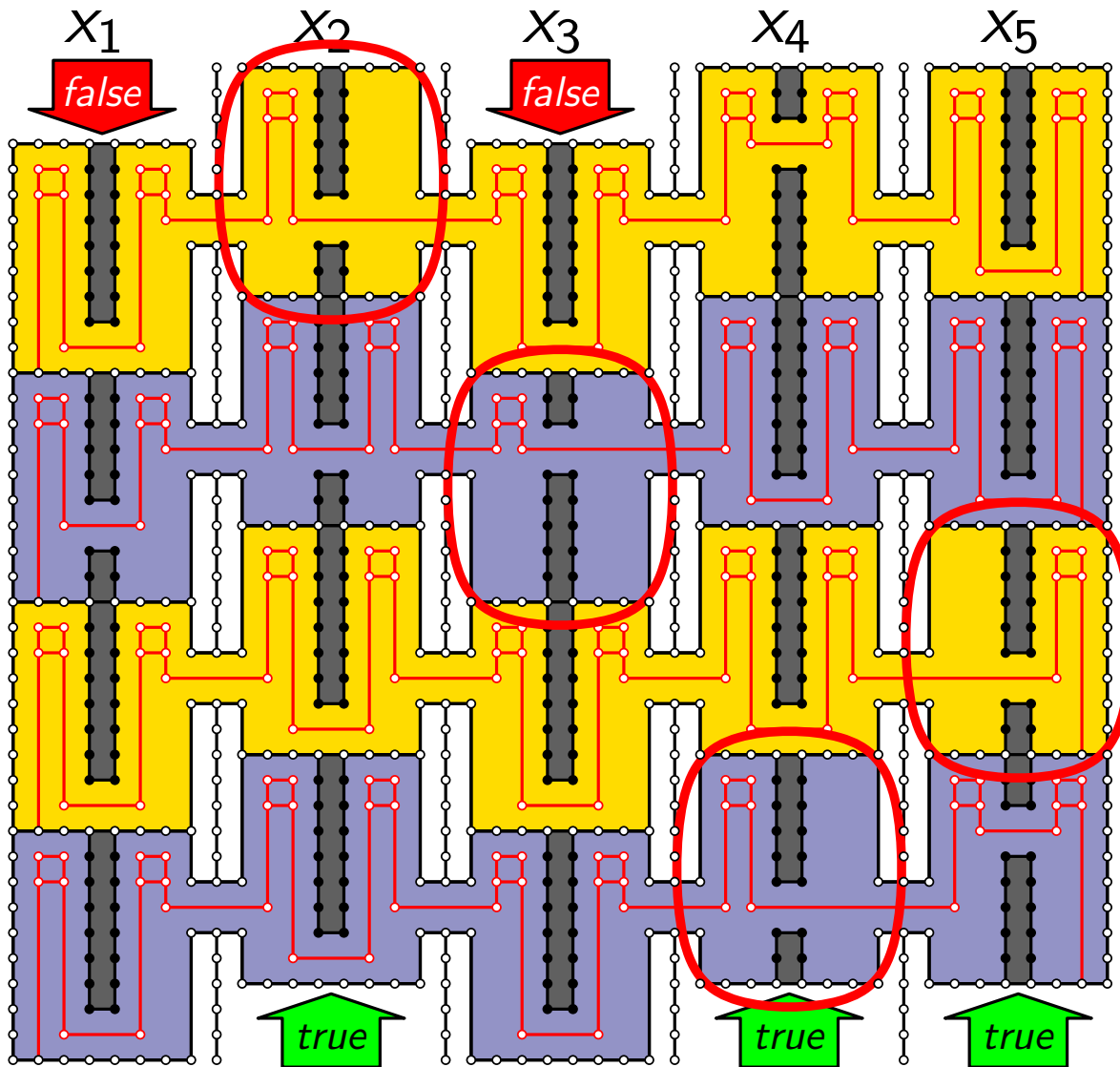
Kompaktierung ist NP-schwer [Patrignani '01]

- » Grobstruktur von (G, H)
 - » Begrenzung
 - » Gürtel
 - » Klauselgadgets
 - » Variablengadgets

Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



Klauselgadgets



Beispiel:

C_1

$$C_1 = x_2 \vee \bar{x}_4$$

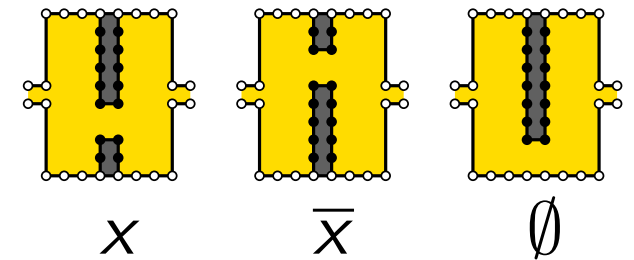
$$C_2 = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$$

$$C_3 = x_5$$

C_2

$$C_4 = x_4 \vee \bar{x}_5$$

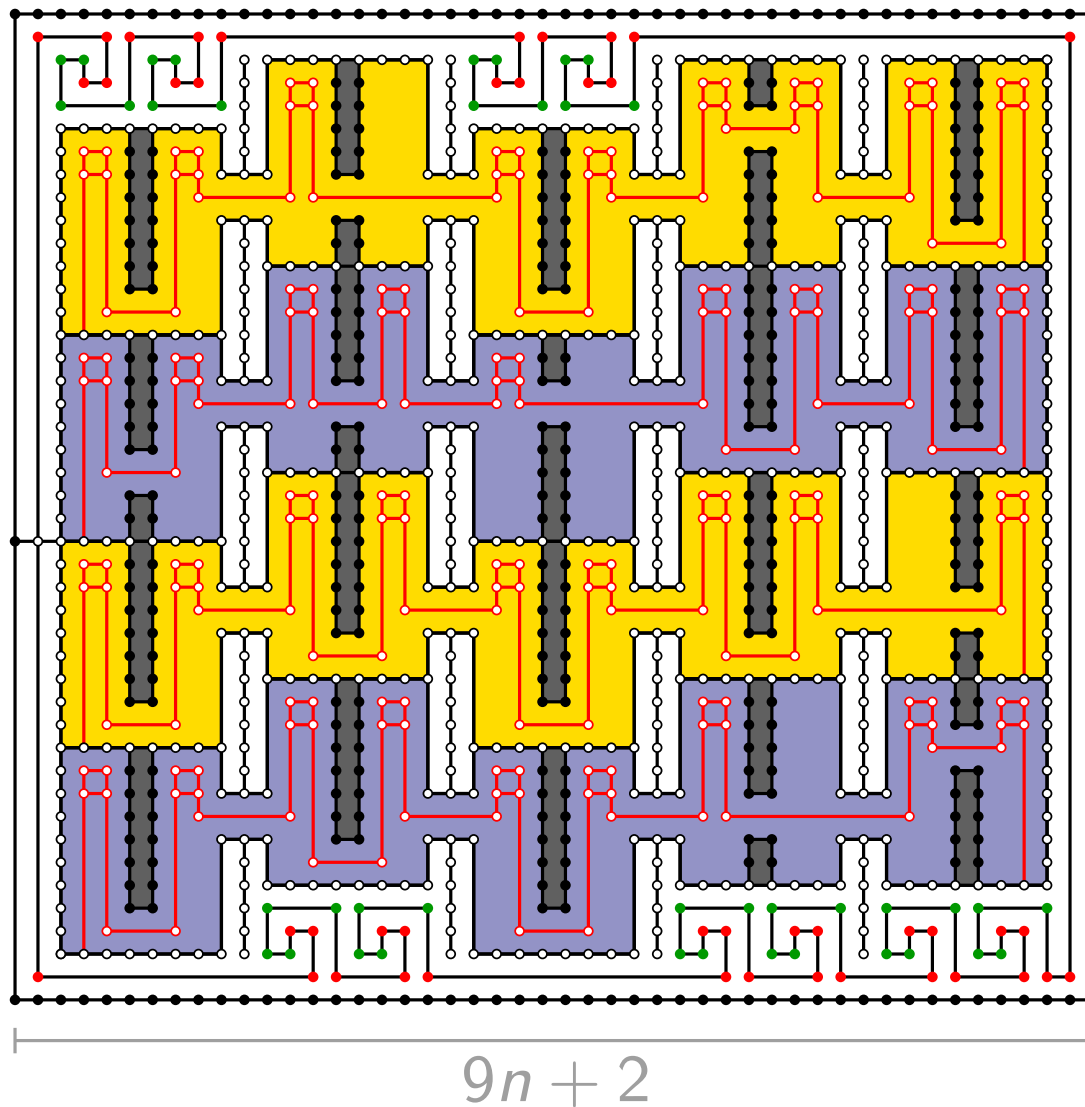
C_3



C_4

lege $(2n - 1)$ -A-Kette durch jede Klausel
durch jede Klausel

Komplette Reduktion



Setze

$$K = (9n + 2) \cdot (9m + 7)$$

$$9m + 7$$

Dann gilt:

(G, H) auf Fläche K
zeichenbar

\Leftrightarrow

Φ erfüllbar

