Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2020

5. Vorlesung

Matchings / Paarungen II

– Kombinatorischer Algorithmus, Anwendung für Handlungsreisende, LP-Runden –

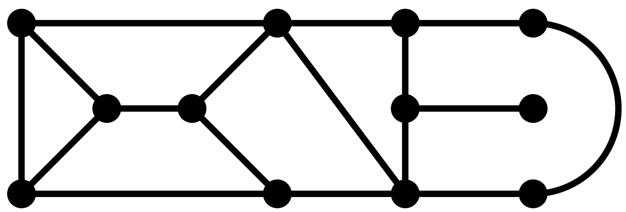
Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.

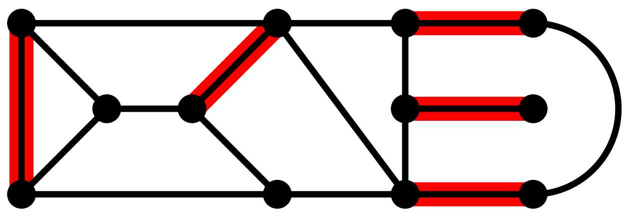


$G = (V, E)$ unger. Graph

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



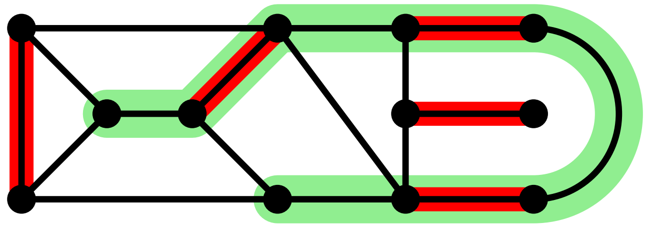
$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



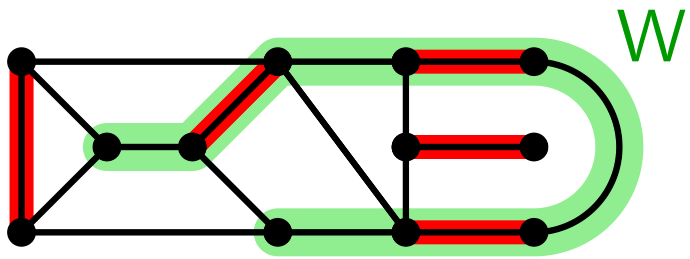
$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\to$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

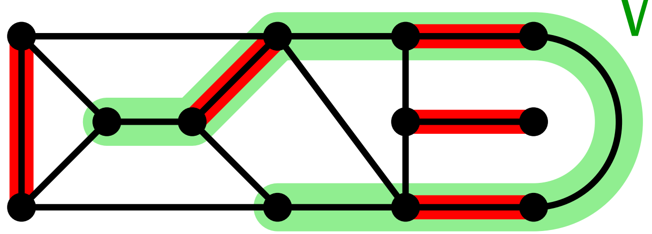
Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

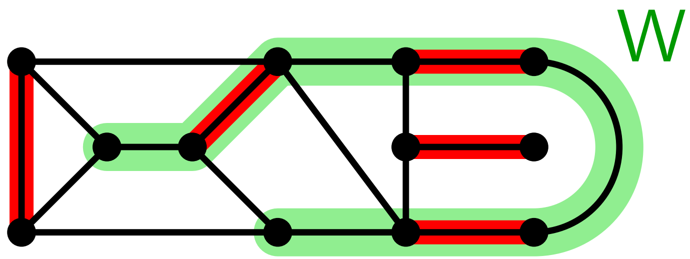
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis → kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

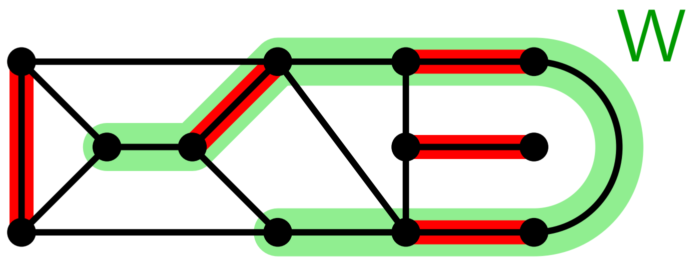
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

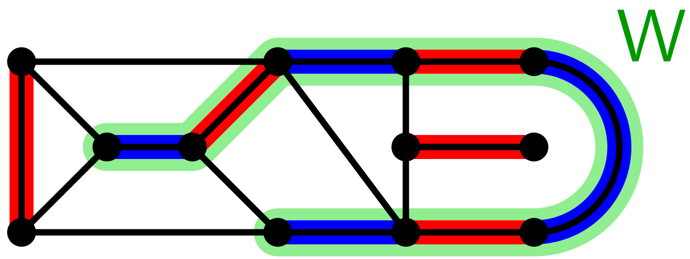
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\to$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

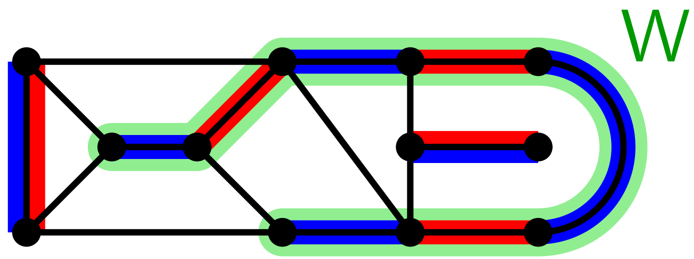
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

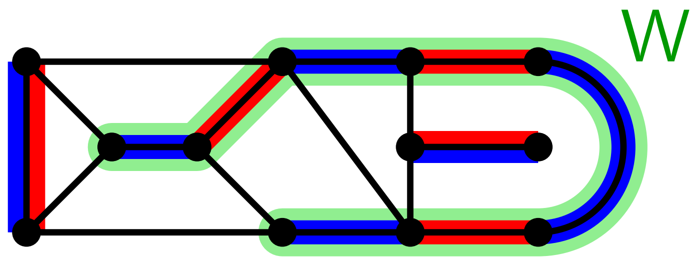
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\to$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

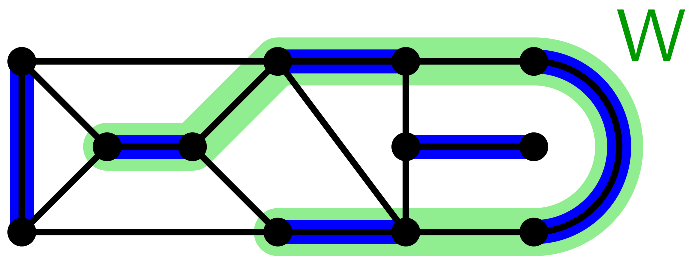
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.
- Setze $M' = W \Delta M$, wobei $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symm. Differenz* von A und B ist.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

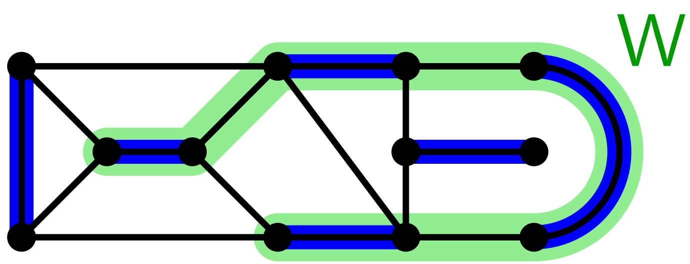
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten M-*frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.
- Setze $M' = W \Delta M$, wobei $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symm. Differenz* von A und B ist.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

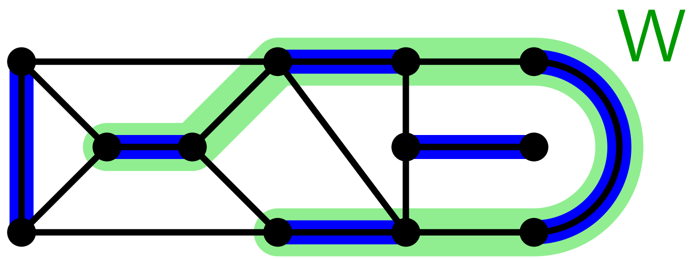
- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.
- Setze $M' = W \Delta M$, wobei $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symm. Differenz* von A und B ist.

Beob. – Augmentierende Wege haben ungerade Länge.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

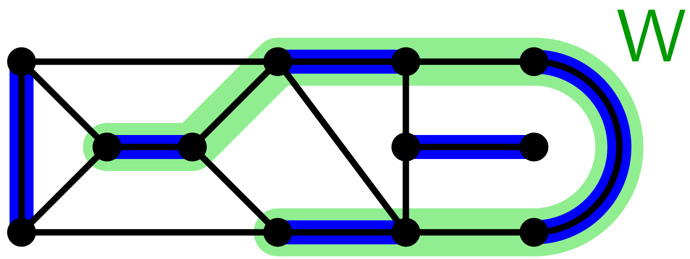
- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.
- Setze $M' = W \Delta M$, wobei $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symm. Differenz* von A und B ist.

Beob. – Augmentierende Wege haben ungerade Länge.
– M' ist um 1 Kante größer als M

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\to$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.
- Setze $M' = W \Delta M$, wobei $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symm. Differenz* von A und B ist.

Beob.
- Augmentierende Wege haben ungerade Länge.
- M' ist um 1 Kante größer als M (da M' zusätzlich die Endknoten von W paart).

Satz von Berge

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.

Claude Berge
(1926–2002)

Satz von Berge

Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Satz von Berge


Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar:

Satz von Berge

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

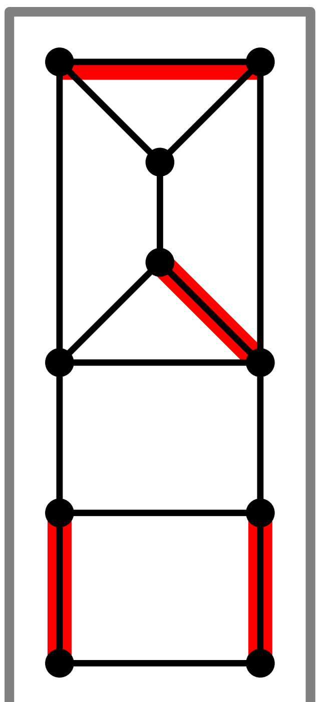
Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯

Satz von Berge

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



Satz von Berge

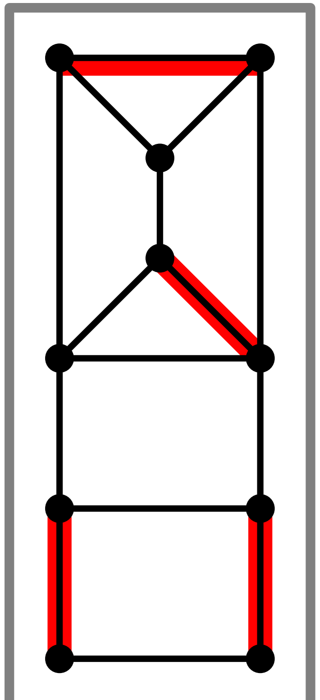
Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern $\lightning$
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.

$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.



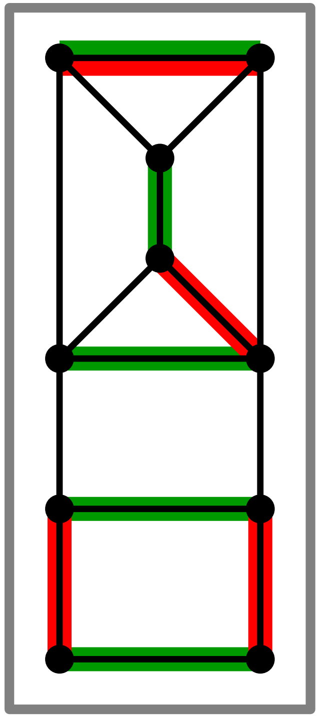
Satz von Berge

Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



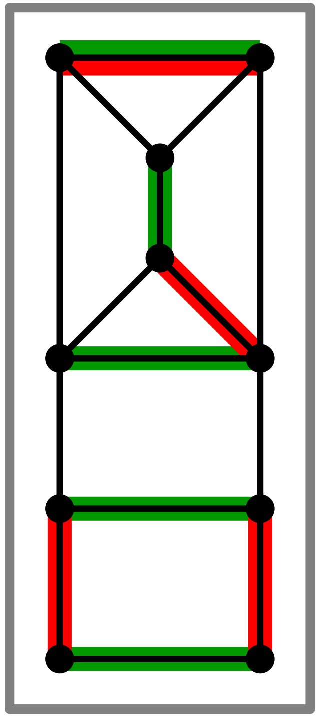
$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.

Satz von Berge

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$" Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern $\lightning$
„$\Leftarrow$" Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.

Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.

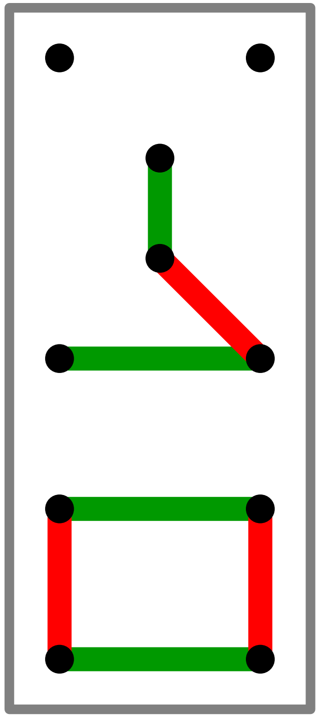
Satz von Berge

Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.

Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.

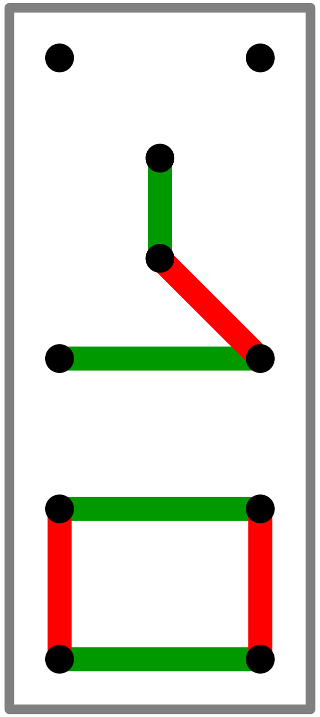
Satz von Berge

Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge (1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.

Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.

Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) =$

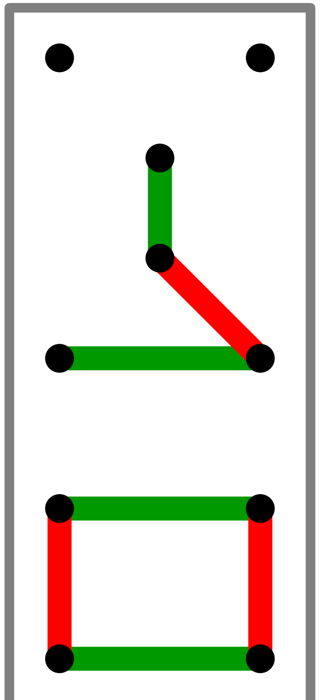
Satz von Berge

Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.

Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.

Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.

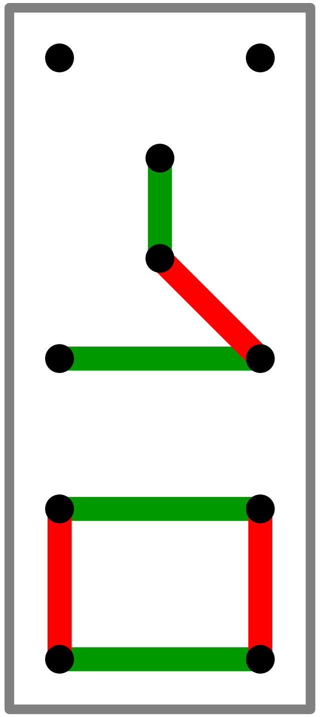
Satz von Berge

Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern $\lightning$
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.
Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.
Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.
$\Rightarrow$ G_Δ besteht aus einfachen alt. Wegen & Kreisen.

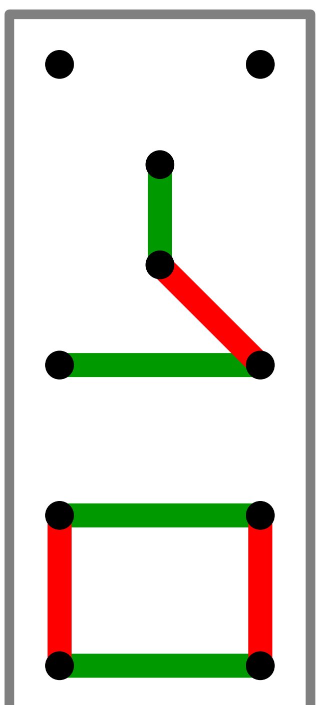
Satz von Berge

Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge (1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$" Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern $\lightning$
„$\Leftarrow$" Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.
Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.
Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.
$\Rightarrow$ G_Δ besteht aus einfachen alt. Wegen & Kreisen.
Alle Kreise in G_Δ haben gerade Länge.

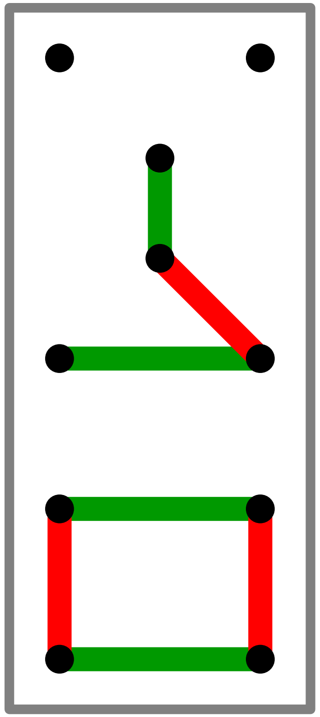
Satz von Berge

Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge (1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$" Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern $\lightning$
„$\Leftarrow$" Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.
Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.
Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.
$\Rightarrow$ G_Δ besteht aus einfachen alt. Wegen & Kreisen.
Alle Kreise in G_Δ haben gerade Länge.
$\Rightarrow$ Ex. alt. Weg mit mehr Kanten aus M' als aus M.

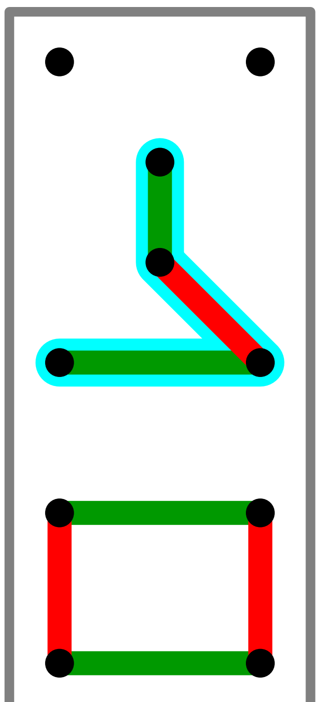
Satz von Berge

Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$" Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern $\lightning$
„$\Leftarrow$" Annahme: M ist kein größtes Matching.



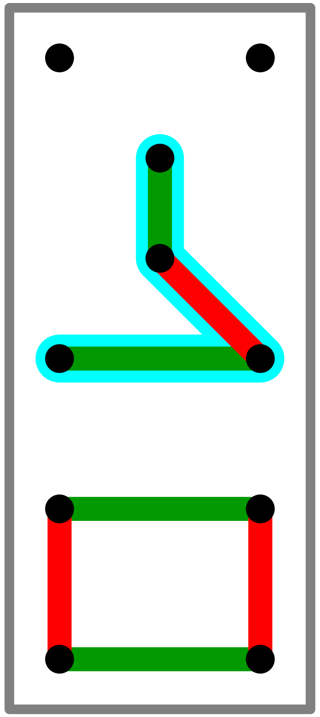
$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.
Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.
Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.
$\Rightarrow$ G_Δ besteht aus einfachen alt. Wegen & Kreisen.
Alle Kreise in G_Δ haben gerade Länge.
$\Rightarrow$ Ex. alt. Weg mit mehr Kanten aus M' als aus M.

Satz von Berge

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern $\lightning$
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.
Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.
Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.
$\Rightarrow$ G_Δ besteht aus einfachen alt. Wegen & Kreisen.
Alle Kreise in G_Δ haben gerade Länge.
$\Rightarrow$ Ex. alt. Weg mit mehr Kanten aus M' als aus M.
$\Rightarrow$ Dieser Weg ist M-augm.

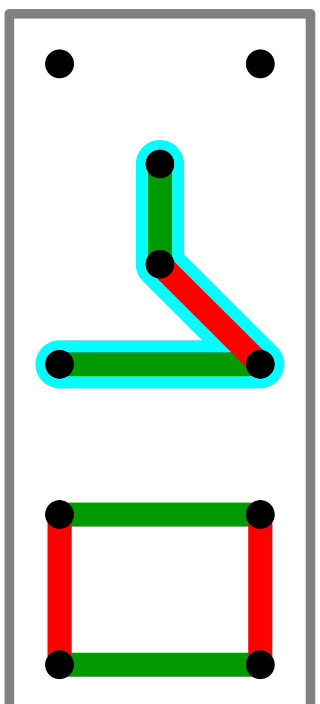
Satz von Berge


Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge (1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

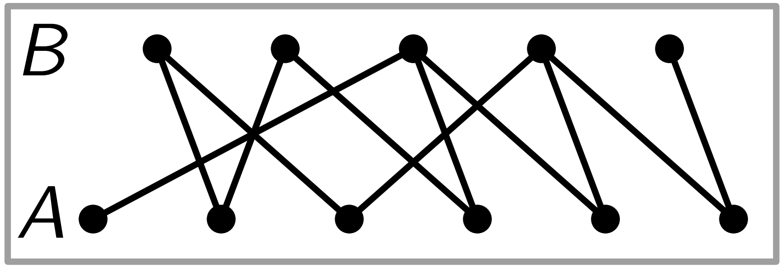
Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.
Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.
Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.
$\Rightarrow$ G_Δ besteht aus einfachen alt. Wegen & Kreisen.
Alle Kreise in G_Δ haben gerade Länge.
$\Rightarrow$ Ex. alt. Weg mit mehr Kanten aus M' als aus M.
$\Rightarrow$ Dieser Weg ist M-augm. ↯ zur Annahme. $\square$

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

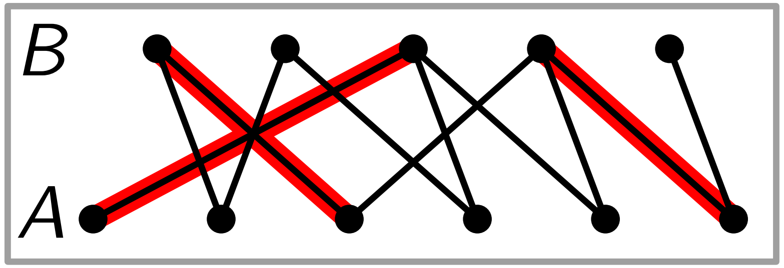
Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



$G = (A \cup B, E)$ bipartit,

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

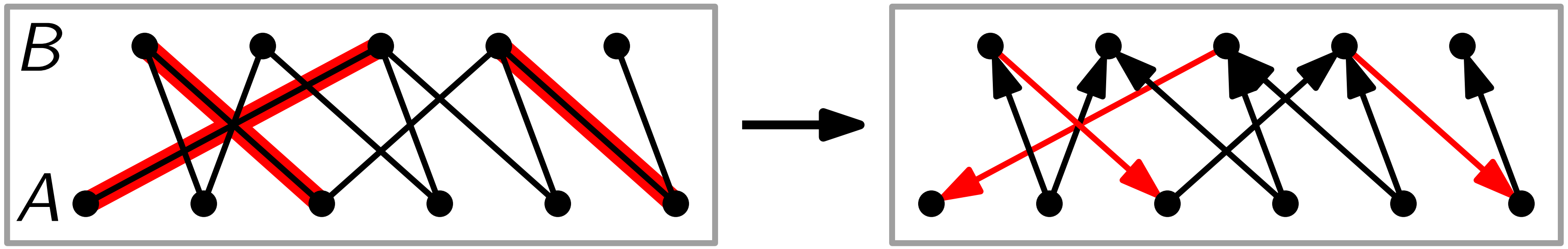
Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?

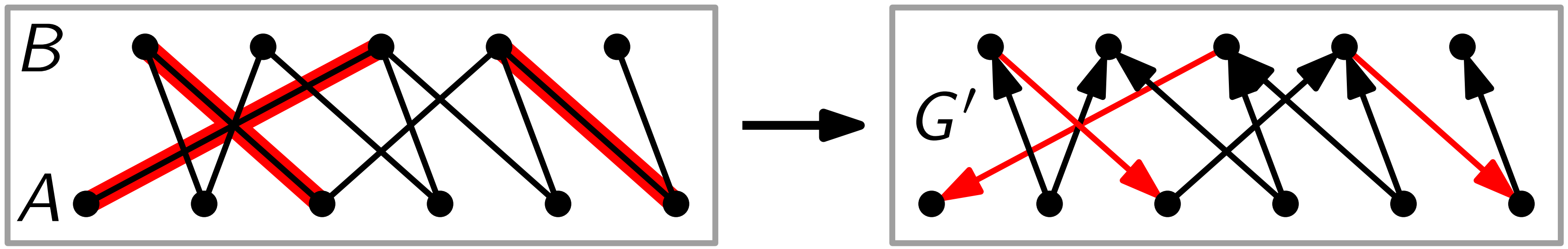


$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Idee: Richte M-Kanten nach unten,
nicht-M-Kanten nach oben.

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?

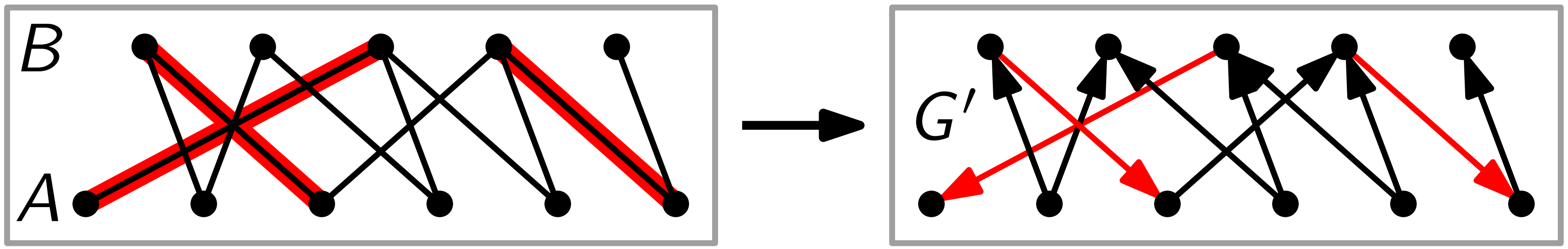


$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Idee: $\left.\begin{array}{l}\text{Richte } M\text{-Kanten nach unten,} \\ \text{nicht-}M\text{-Kanten nach oben.}\end{array}\right\} \longrightarrow G' = (A \cup B, E')$

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



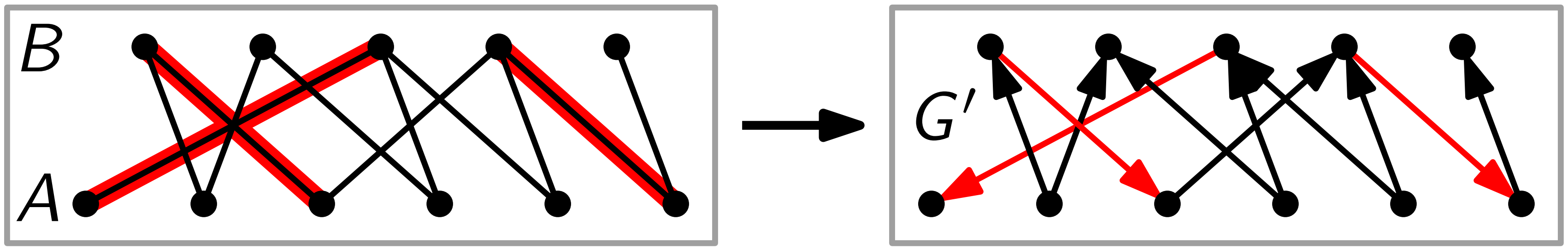
$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Idee: Richte M-Kanten nach unten, nicht-M-Kanten nach oben. $\longrightarrow$ $G' = (A \cup B, E')$

Augmentierende Wege in G $\longleftrightarrow$

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



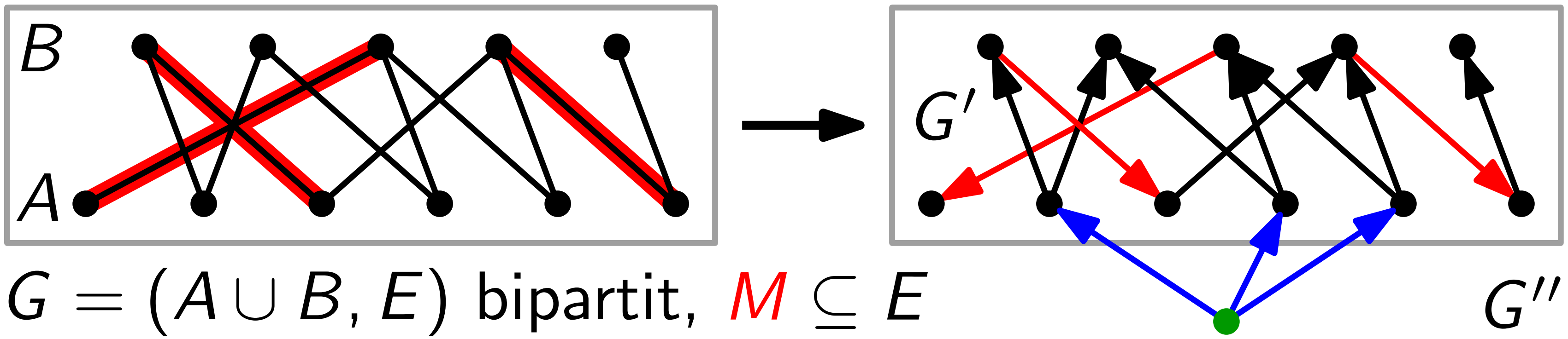
$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Idee: $\left.\begin{array}{l}\text{Richte } M\text{-Kanten nach unten,}\\ \text{nicht-}M\text{-Kanten nach oben.}\end{array}\right\} \longrightarrow G' = (A \cup B, E')$

Augmentierende Wege in G $\longleftrightarrow$ gerichtete Wege mit M-freien Endknoten in G'

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

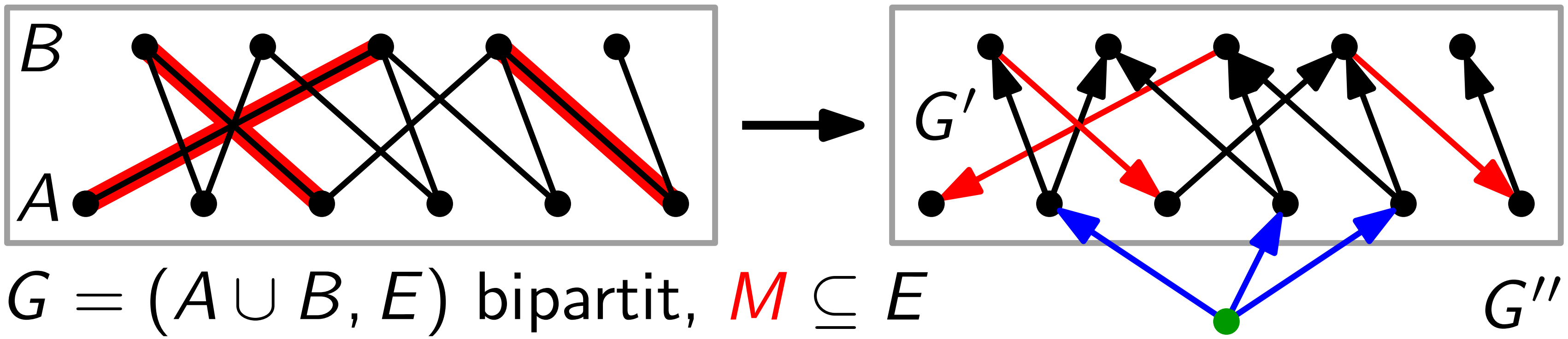
Idee: Richte M-Kanten nach unten, nicht-M-Kanten nach oben. $\longrightarrow$ $G' = (A \cup B, E')$

Augmentierende Wege in G $\longleftrightarrow$ gerichtete Wege mit M-freien Endknoten in G'

Definiere $G'' = \big(A \cup B \cup \{s\}, E' \cup \{sa \mid a \in A,\ M\text{-frei}\}\big)$

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Idee: Richte M-Kanten nach unten, nicht-M-Kanten nach oben. $\longrightarrow$ $G' = (A \cup B, E')$

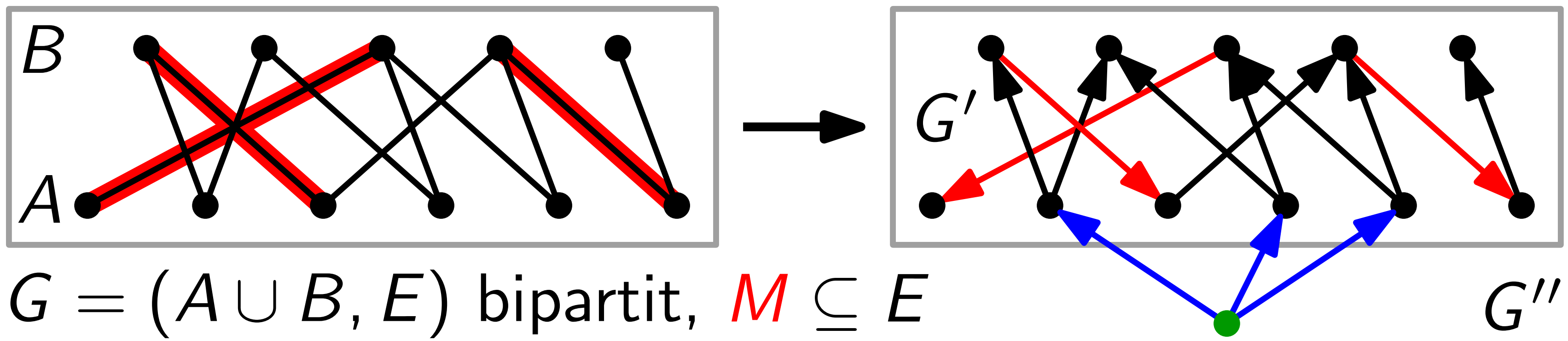
Augmentierende Wege in G $\longleftrightarrow$ gerichtete Wege mit M-freien Endknoten in G'

Definiere $G'' = \big(A \cup B \cup \{s\}, E' \cup \{sa \mid a \in A,\ M\text{-frei}\}\big)$

Breitensuche BFS(G'', s) erreicht einen M-freien Endknoten in B $\Leftrightarrow$

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Idee: Richte M-Kanten nach unten, nicht-M-Kanten nach oben. $\longrightarrow G' = (A \cup B, E')$

Augmentierende Wege in G $\longleftrightarrow$ gerichtete Wege mit M-freien Endknoten in G'

Definiere $G'' = \big(A \cup B \cup \{s\}, E' \cup \{sa \mid a \in A,\ M\text{-frei}\}\big)$

Breitensuche BFS(G'', s) erreicht einen M-freien Endknoten in B $\Leftrightarrow$ G hat M-augm. Weg.

Ergebnis

Algo: $M := \emptyset$.

Ergebnis

Algo: $M := \emptyset$.

Führe BFS $\leq |V|/2$ mal aus –
bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird.

Ergebnis

Algo: $M := \emptyset$.

Führe BFS $\leq |V|/2$ mal aus –
bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird.

Gib größtes Matching zurück.

Ergebnis

Algo: $M := \emptyset$.

Führe BFS $\leq |V|/2$ mal aus –
bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird.

Gib größtes Matching zurück.

Satz. In einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ lässt sich in $O(VE)$ Zeit ein größtes Matching bestimmen.

Ergebnis

Algo: $M := \emptyset$.
Führe BFS $\leq |V|/2$ mal aus –
bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird.
Gib größtes Matching zurück.

Satz. In einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ lässt sich in $O(VE)$ Zeit ein größtes Matching bestimmen.

Bem. Dinics Fluss-Algorithmus berechnet [KN, Kapitel 9.6]
– maximale Flüsse in allg. Graphen in $O(V^2E)$ Zeit
– Matchings in bipartiten Graphen in $O(\sqrt{V}E)$ Zeit.

Ergebnis

Algo: $M := \emptyset$.
Führe BFS $\leq |V|/2$ mal aus –
bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird.
Gib größtes Matching zurück.

Satz. In einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ lässt sich in $O(VE)$ Zeit ein größtes Matching bestimmen.

Bem. Dinics Fluss-Algorithmus berechnet [KN, Kapitel 9.6]
– maximale Flüsse in allg. Graphen in $O(V^2E)$ Zeit
– Matchings in bipartiten Graphen in $O(\sqrt{V}E)$ Zeit.

Satz. Selbst in einem beliebigen Graphen $G = (V, E)$ lässt sich eine größte Paarung in $O(\sqrt{V}E)$ Zeit berechnen.
[Micali & Vazirani, FOCS'80]

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

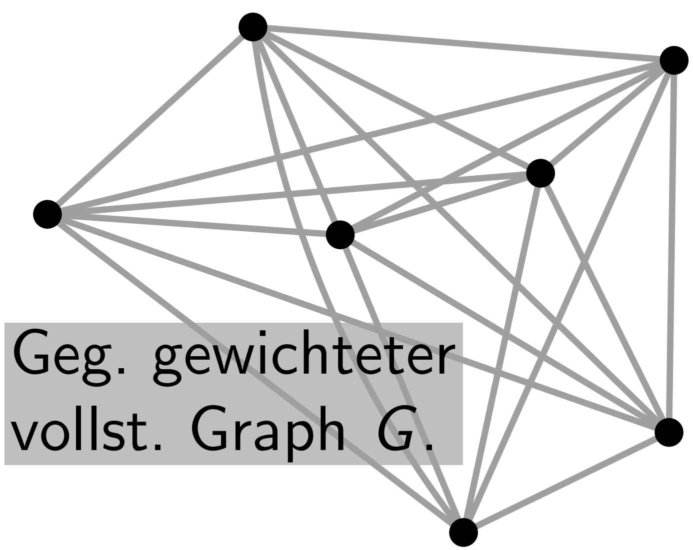
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

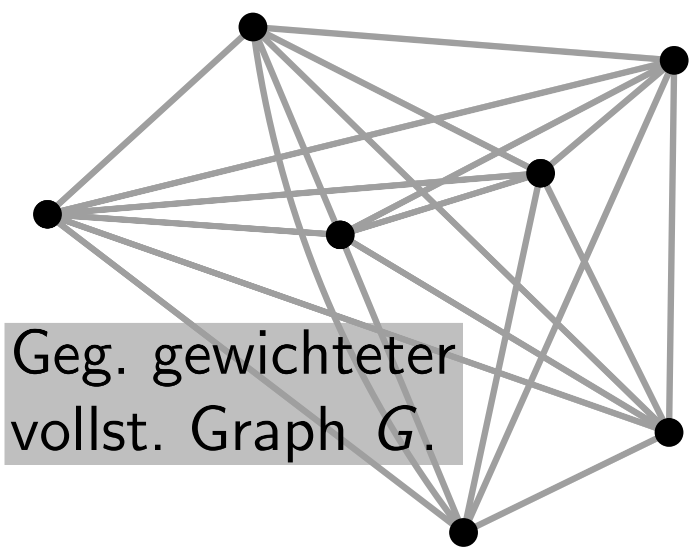
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

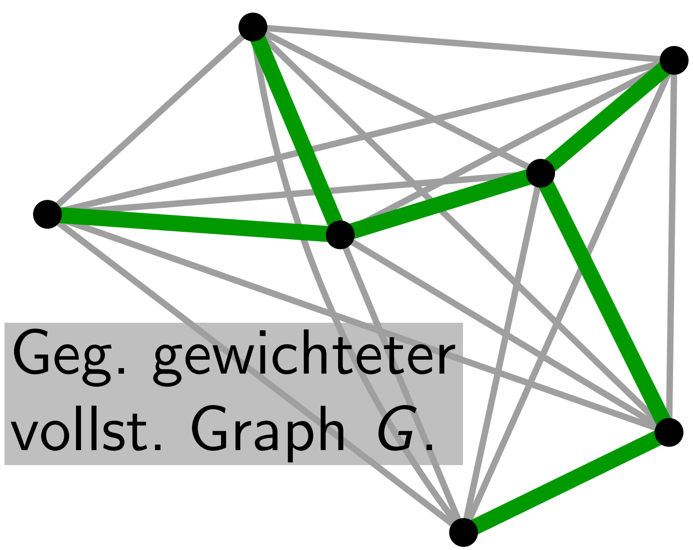
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

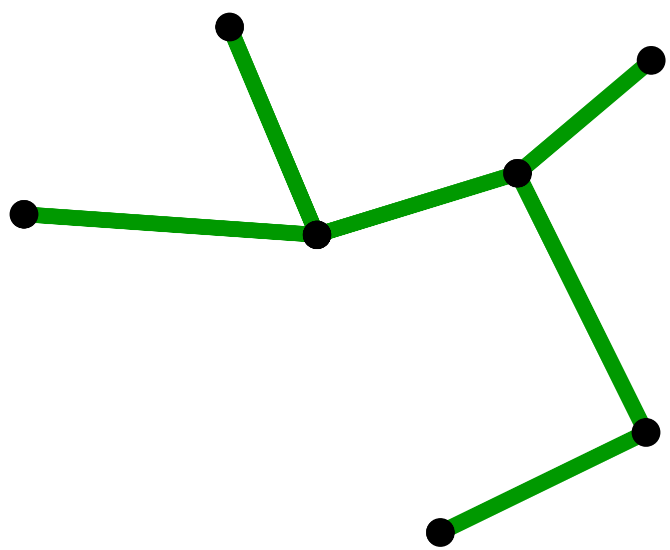
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

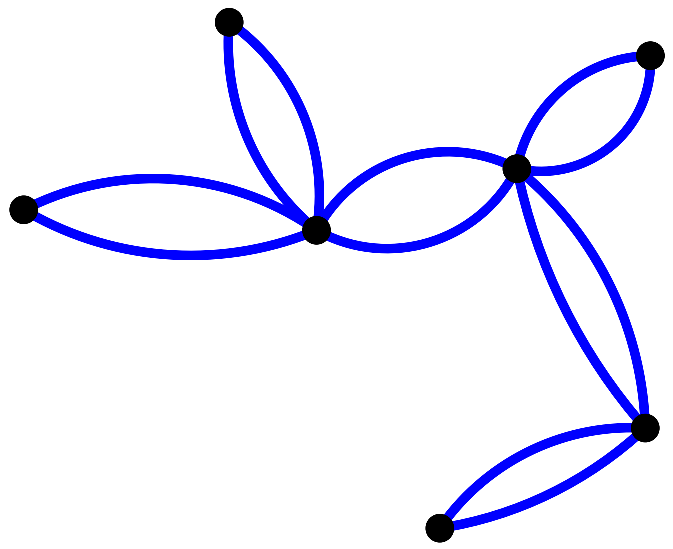
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

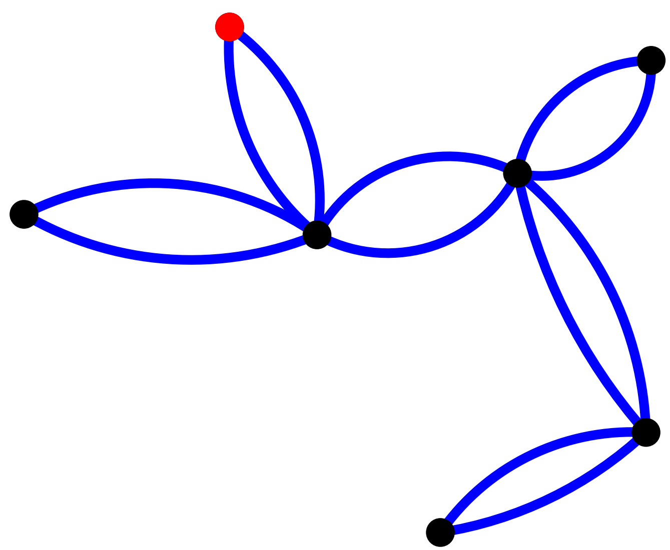
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

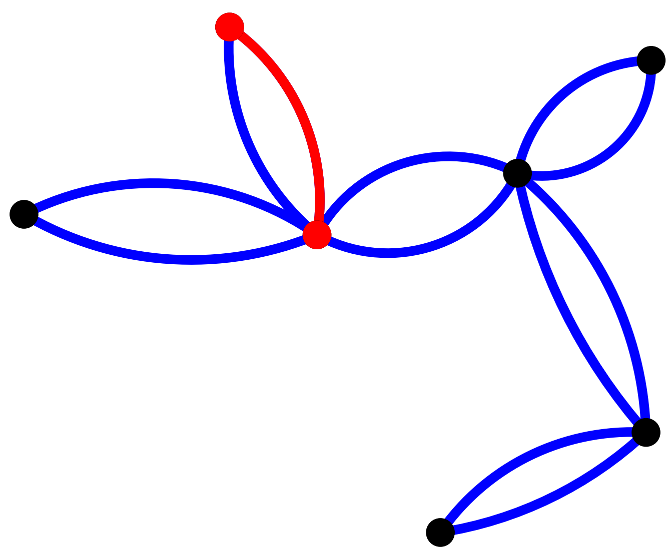
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

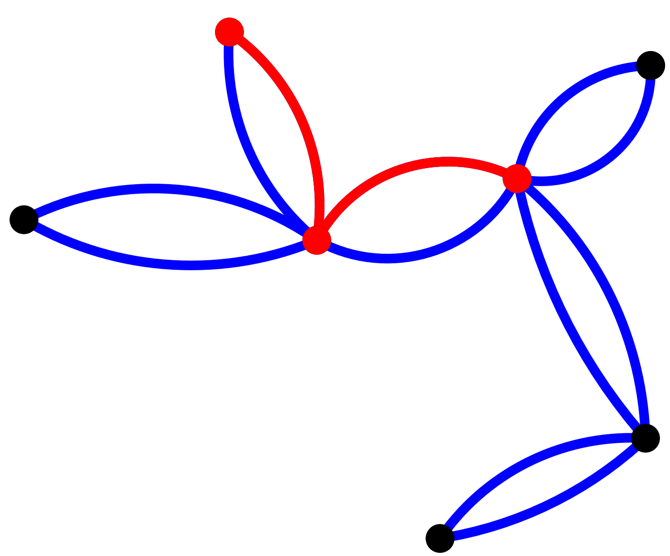
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

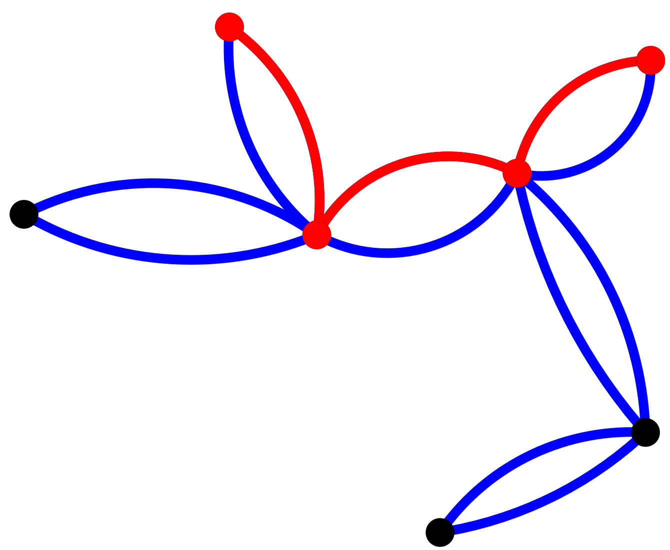
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

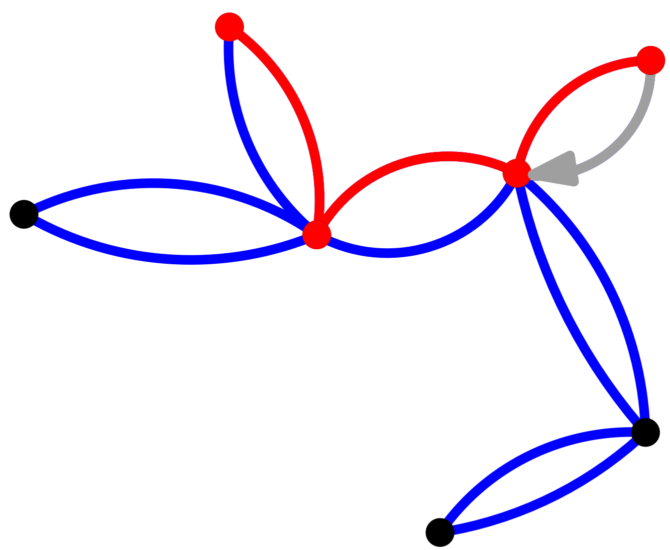
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

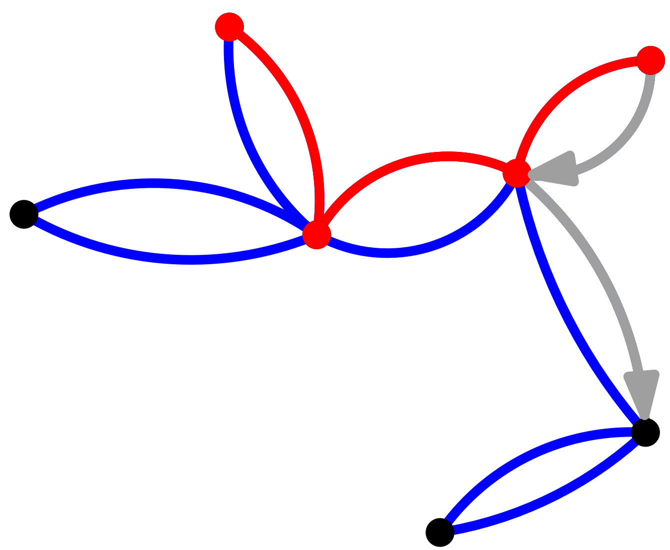
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

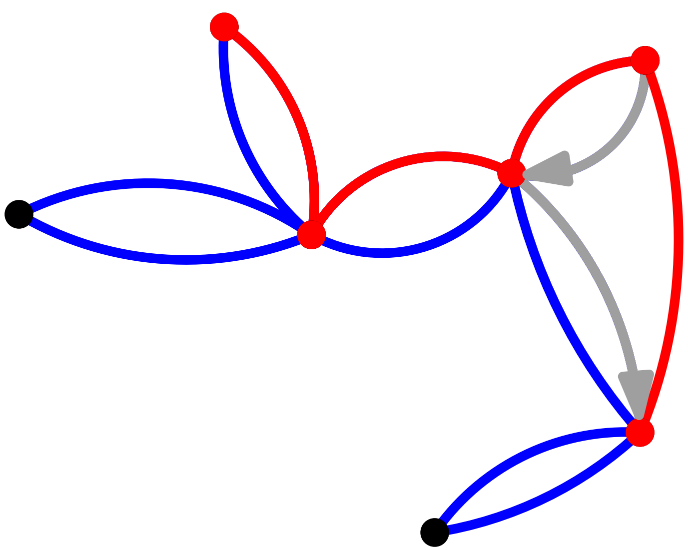
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

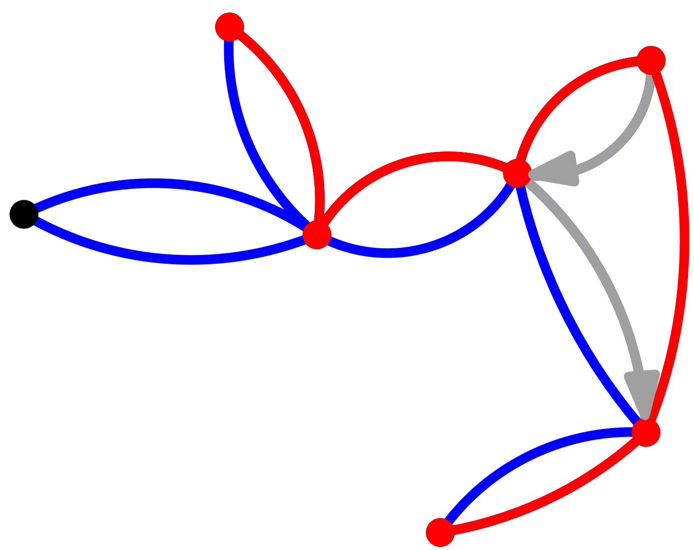
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

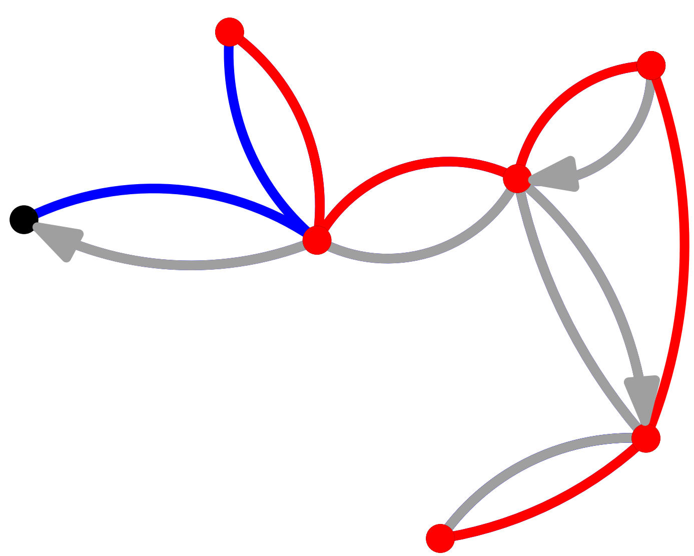
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

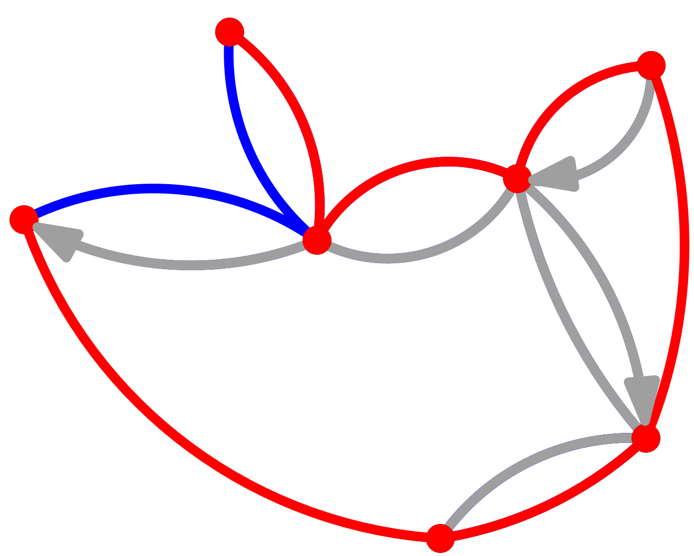
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

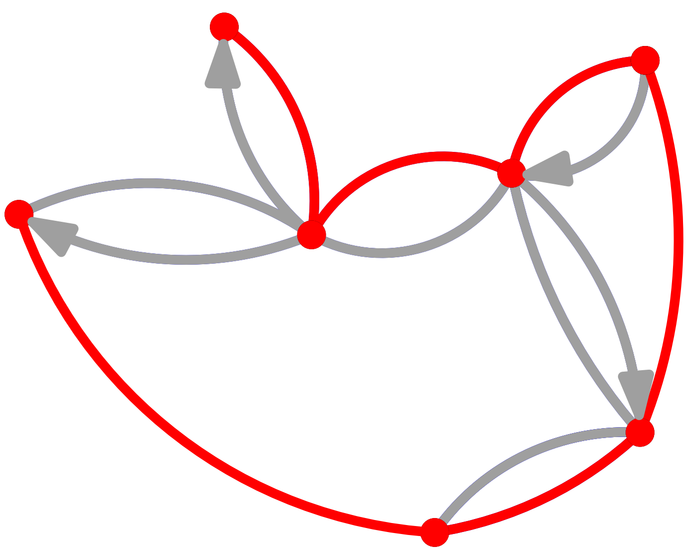
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

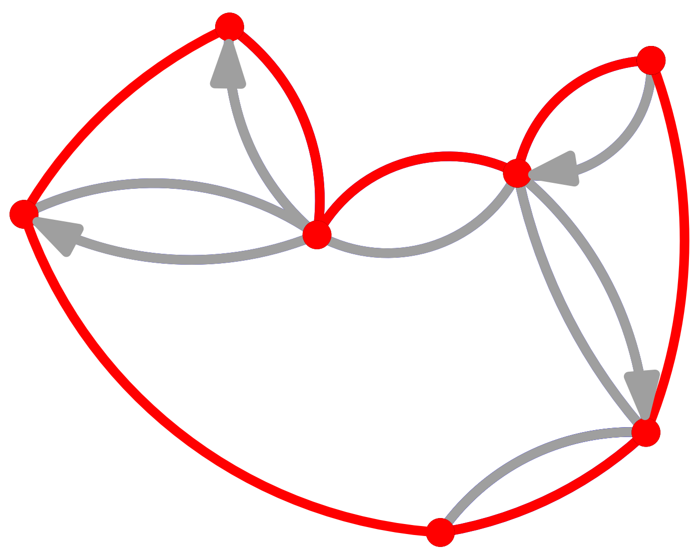
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

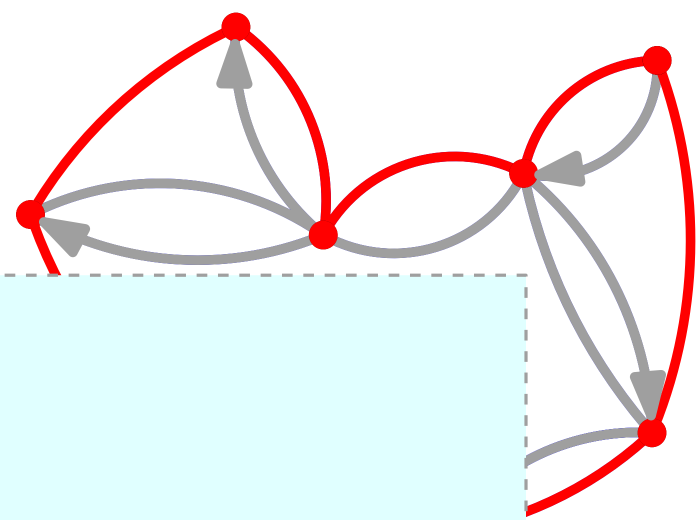
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

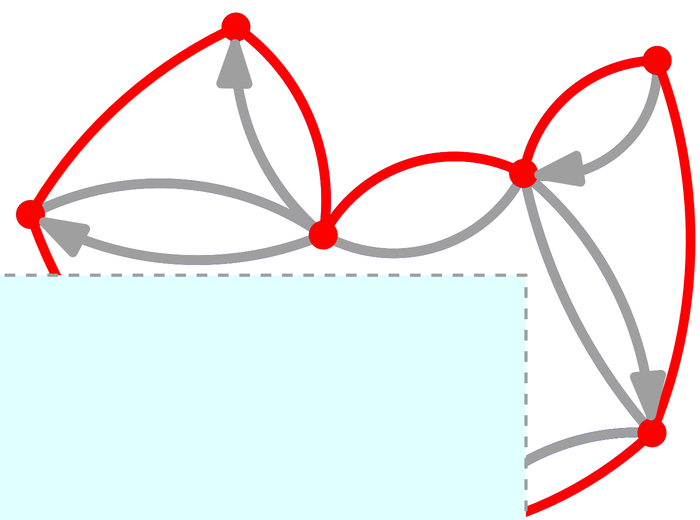
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$c(\text{ALG}) \leq$

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

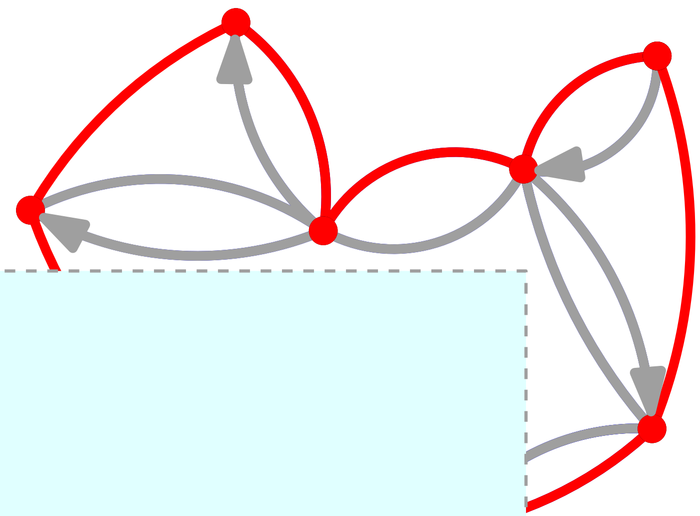
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$c(\text{ALG}) \leq$

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

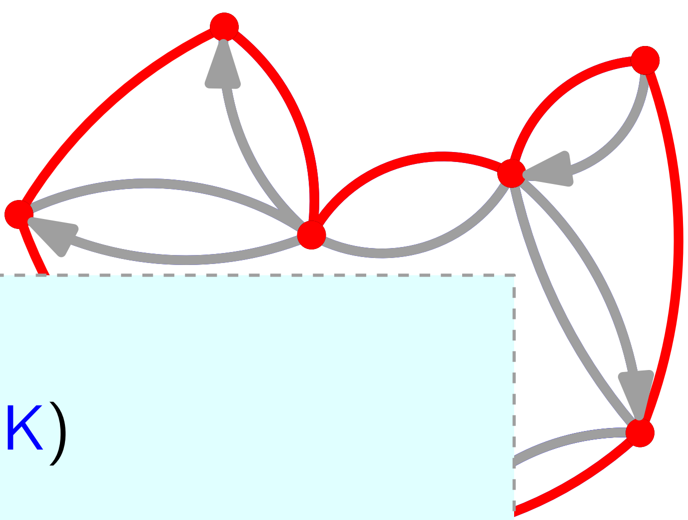
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$c(\text{ALG}) \leq c(\text{EK})$

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

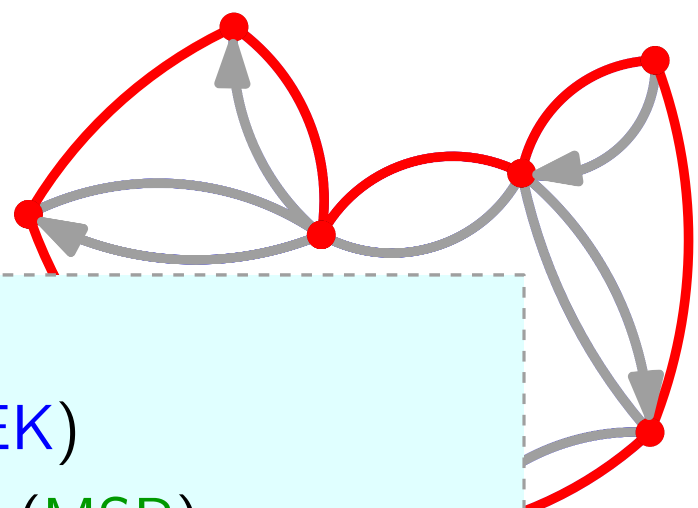
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$c(\text{ALG}) \leq c(\text{EK})$
$= 2 \cdot c(\text{MSB})$

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

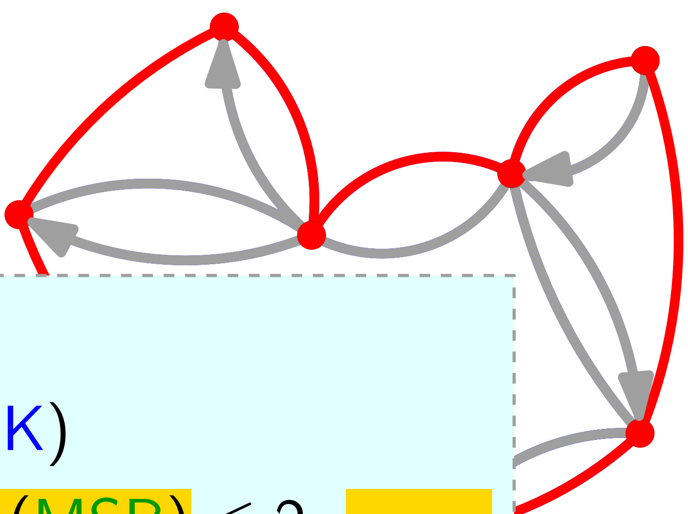
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$c(\text{ALG}) \leq c(\text{EK})$

$= 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot$

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

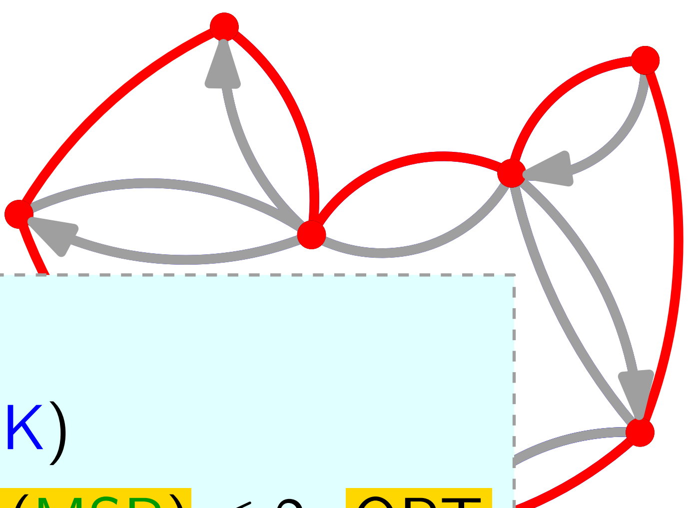
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen" ein.

2. *Analyse*

$c(\text{ALG}) \leq c(\text{EK})$

$= 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

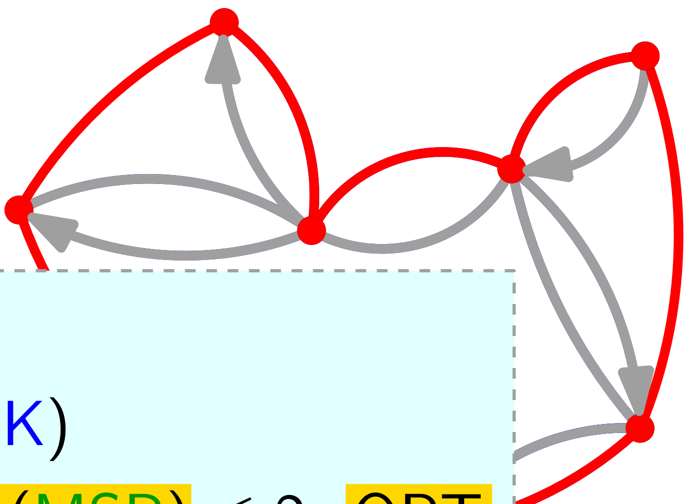
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$$c(\mathrm{ALG}) \leq c(\mathrm{EK})$$
$$= 2 \cdot c(\mathrm{MSB}) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}$$

Opt. TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

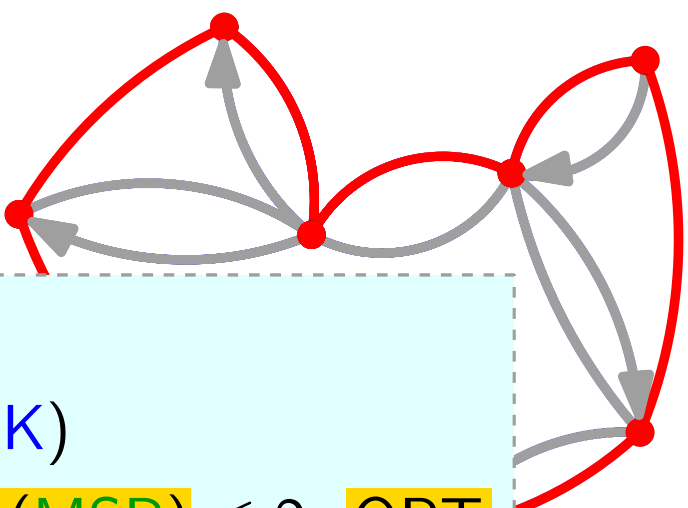
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

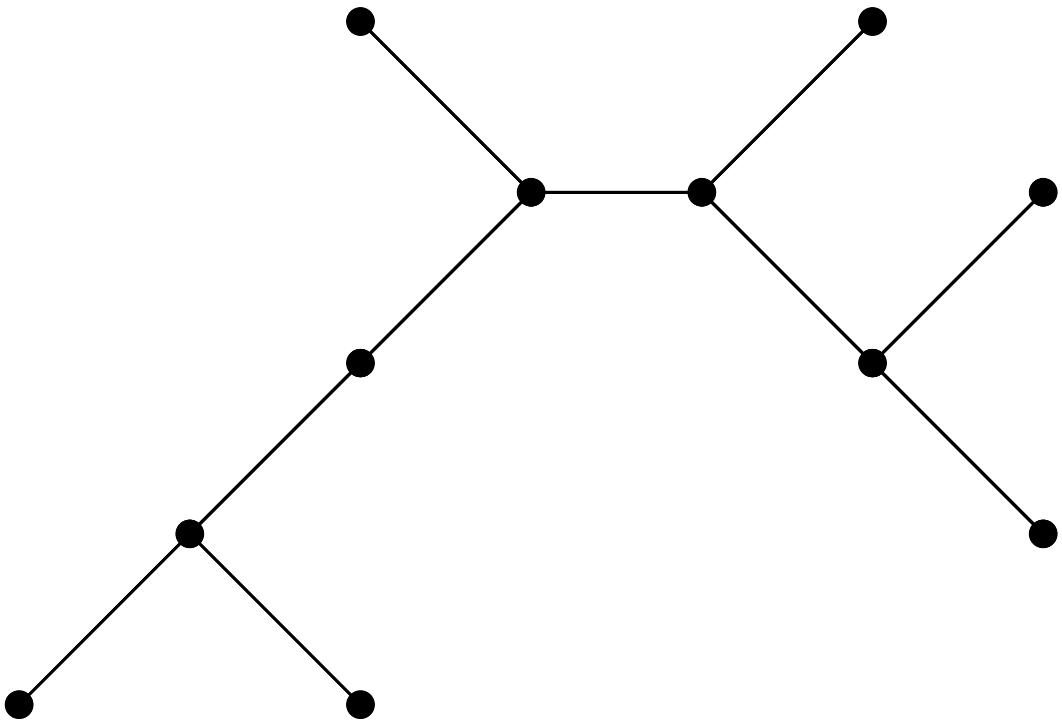
$c(\text{ALG}) \leq c(\text{EK})$

$= 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$

Opt. TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!
„Die Kunst der unteren Schranke“

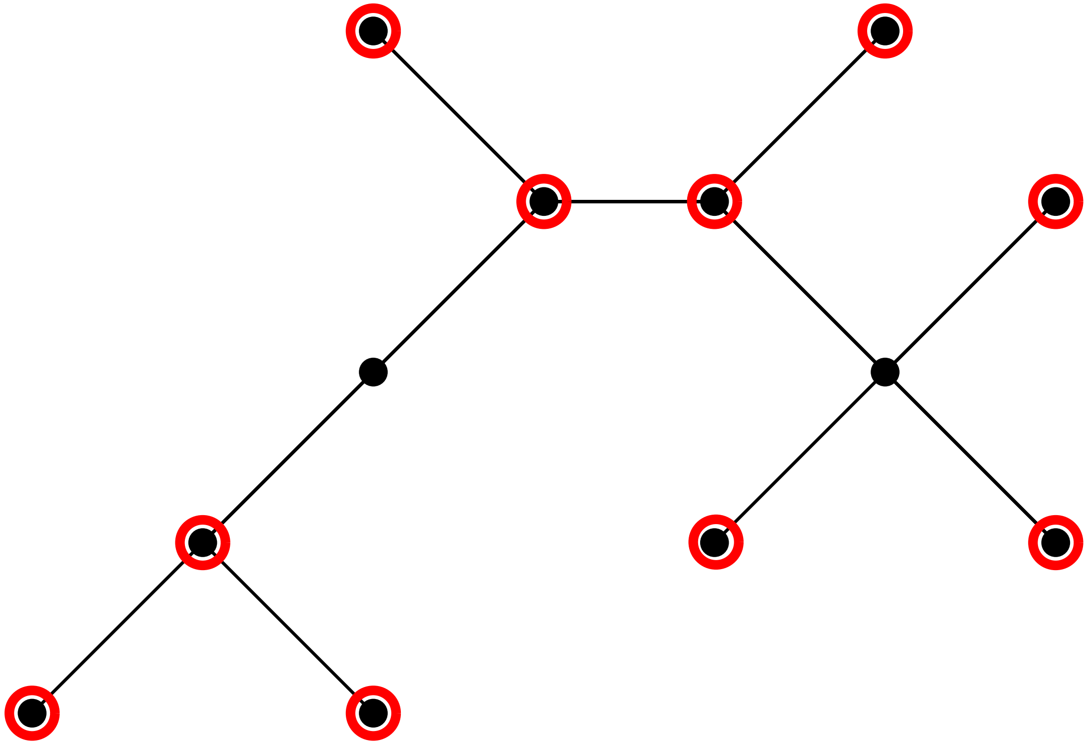
Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.



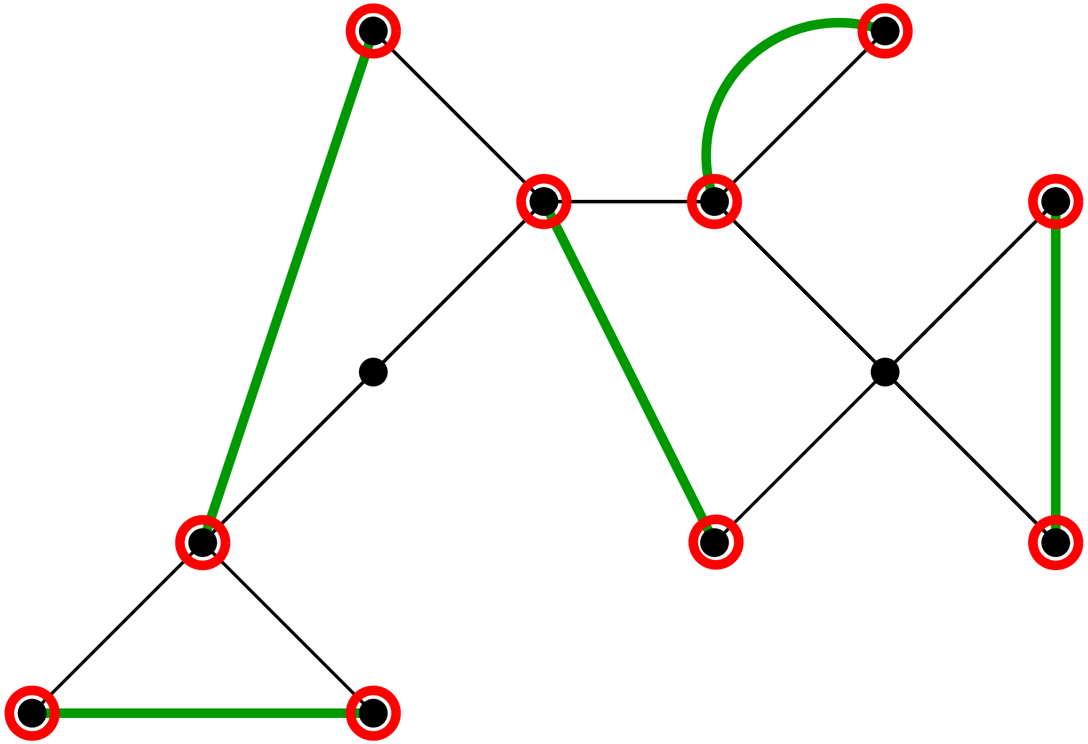
Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.



Christofides' Algorithmus

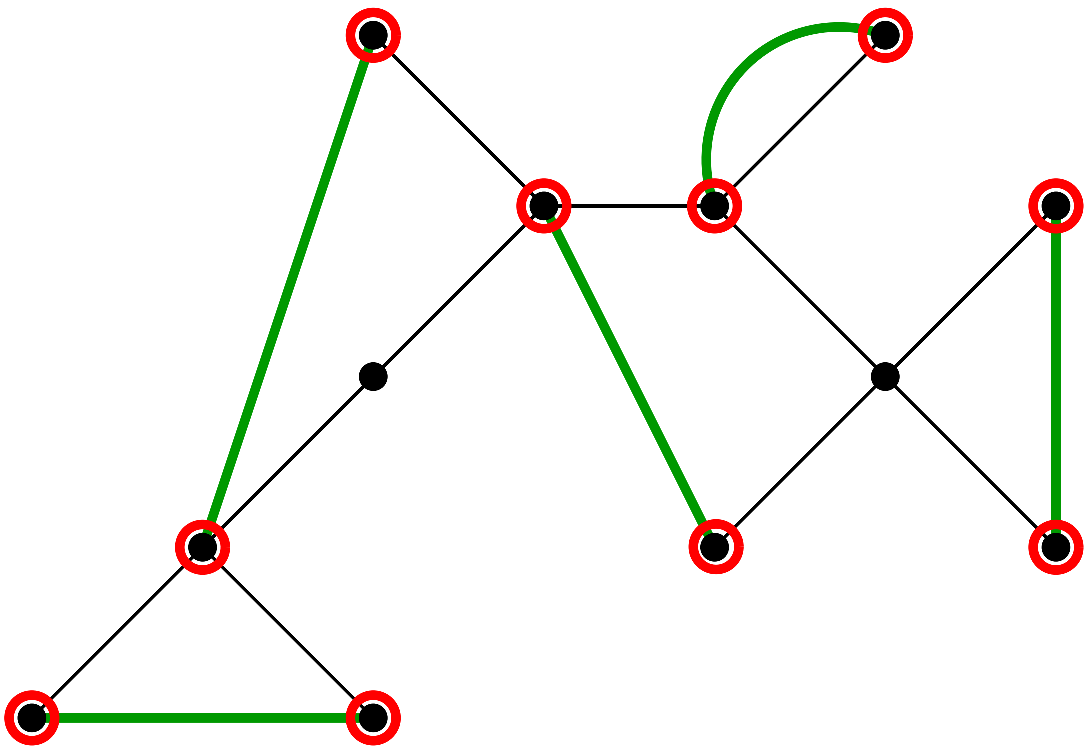
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$



Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

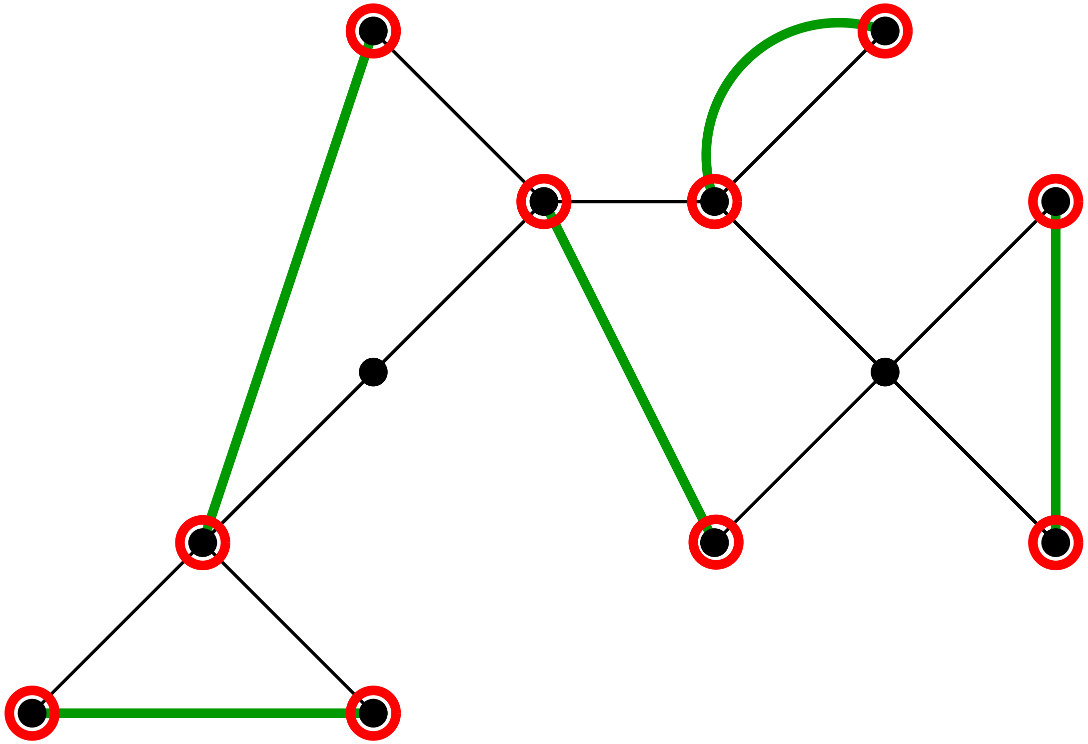


Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

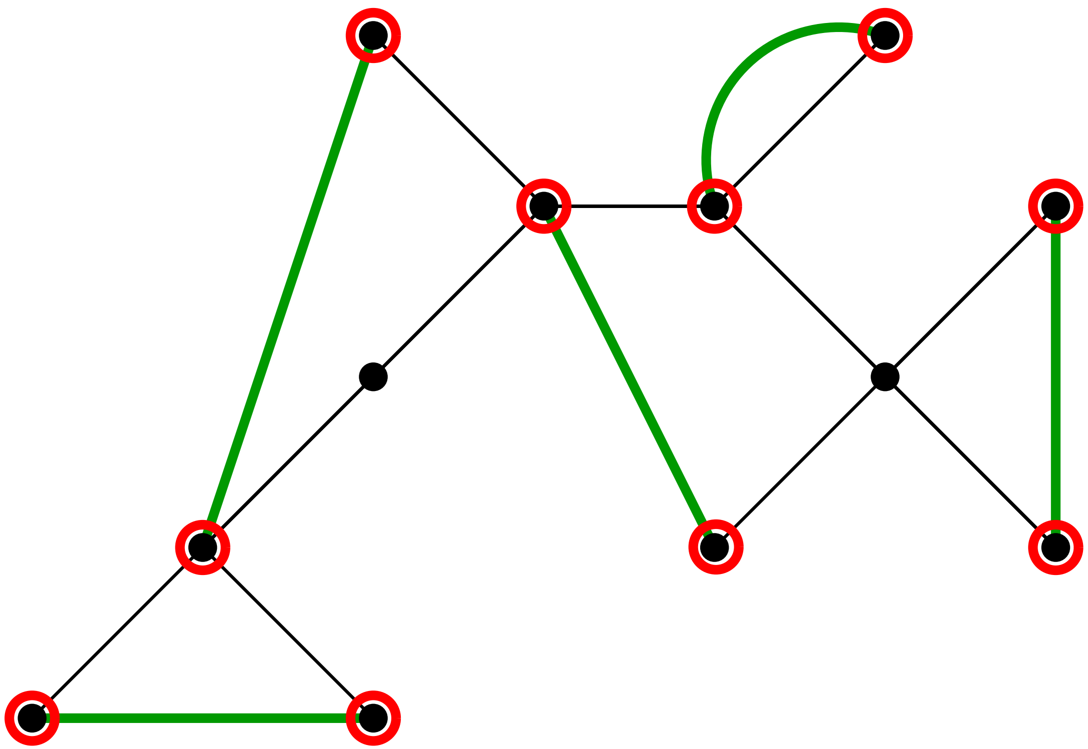


Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$
  (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

der von U *induzierte* Graph
$(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$



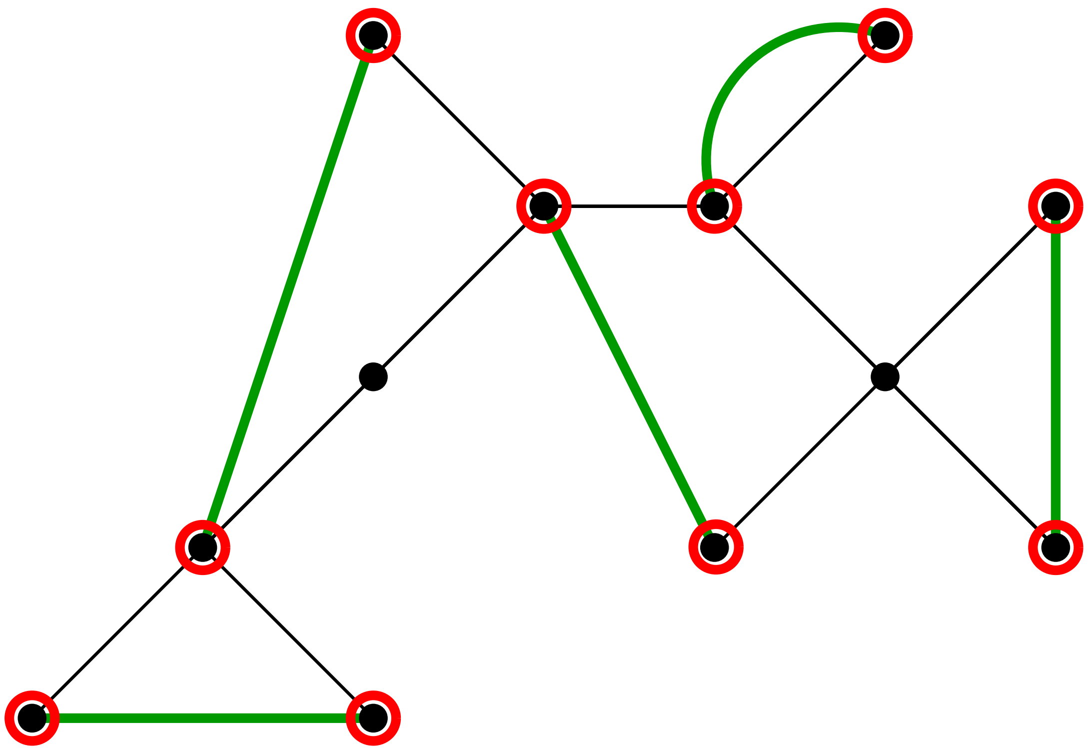
Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$
  (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph
$(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$



Christofides' Algorithmus

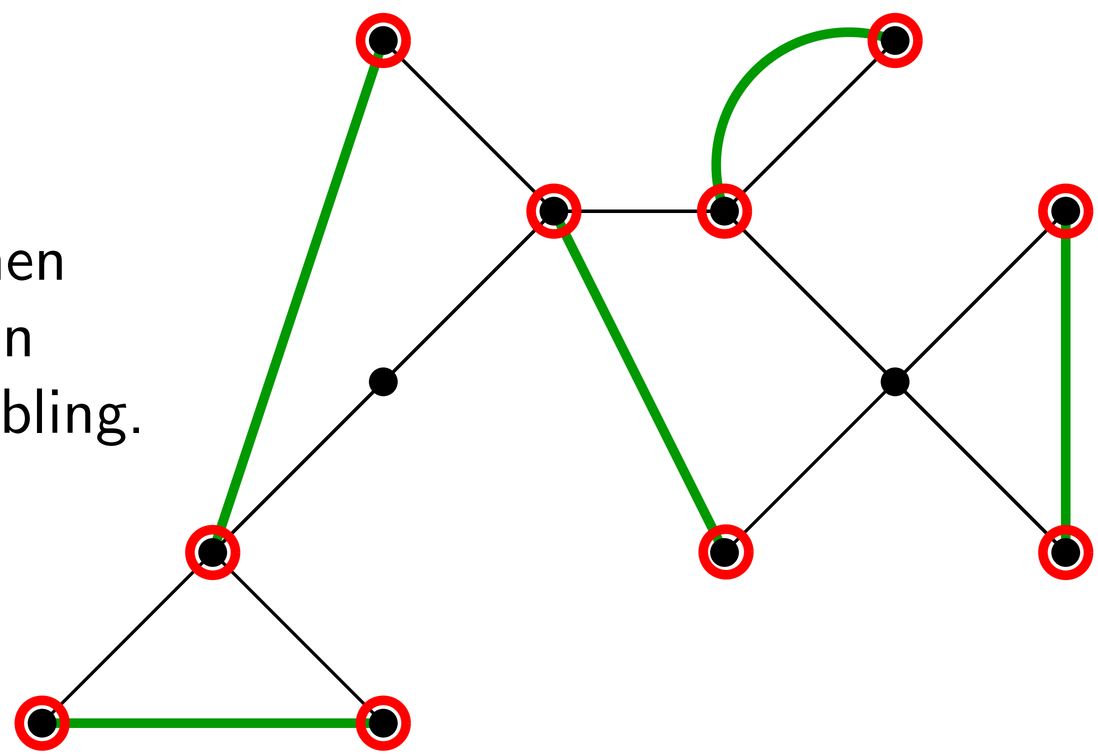
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$
  (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

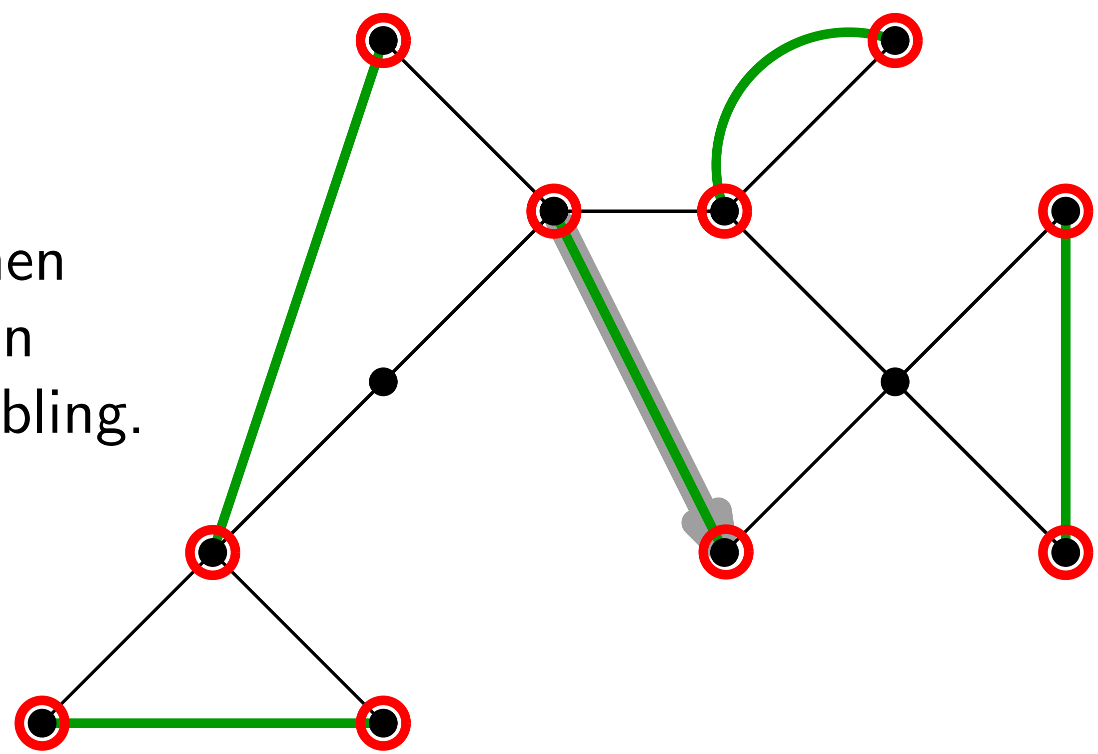
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$
  (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph
$(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

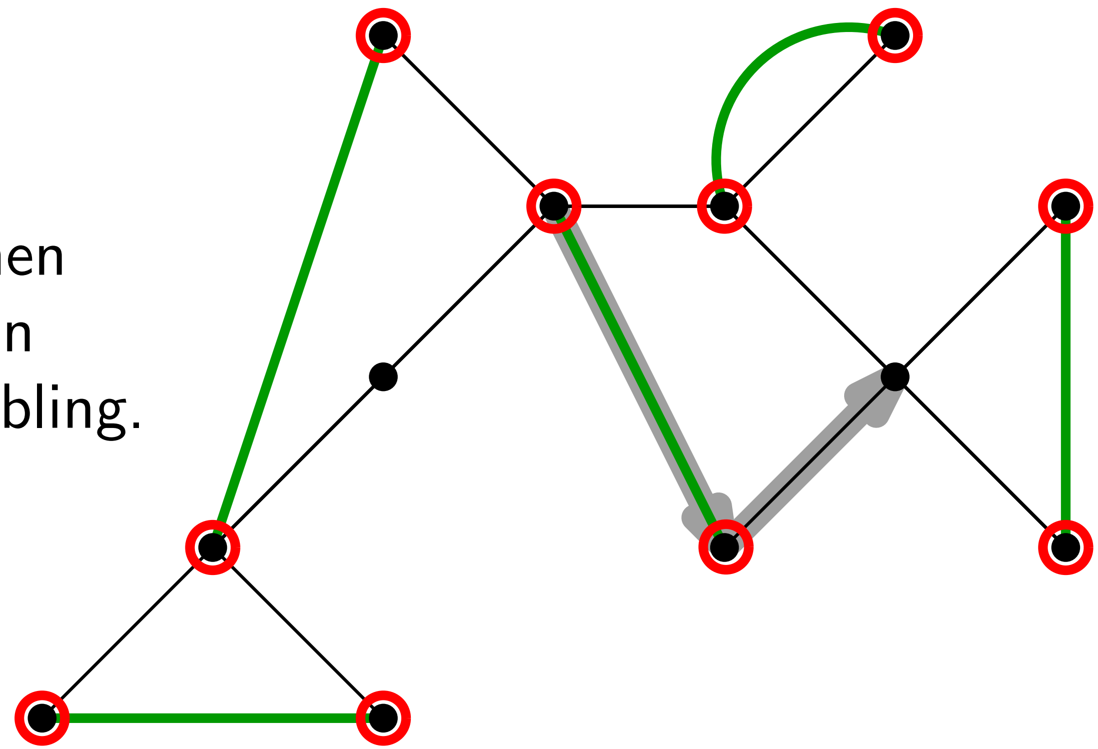
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

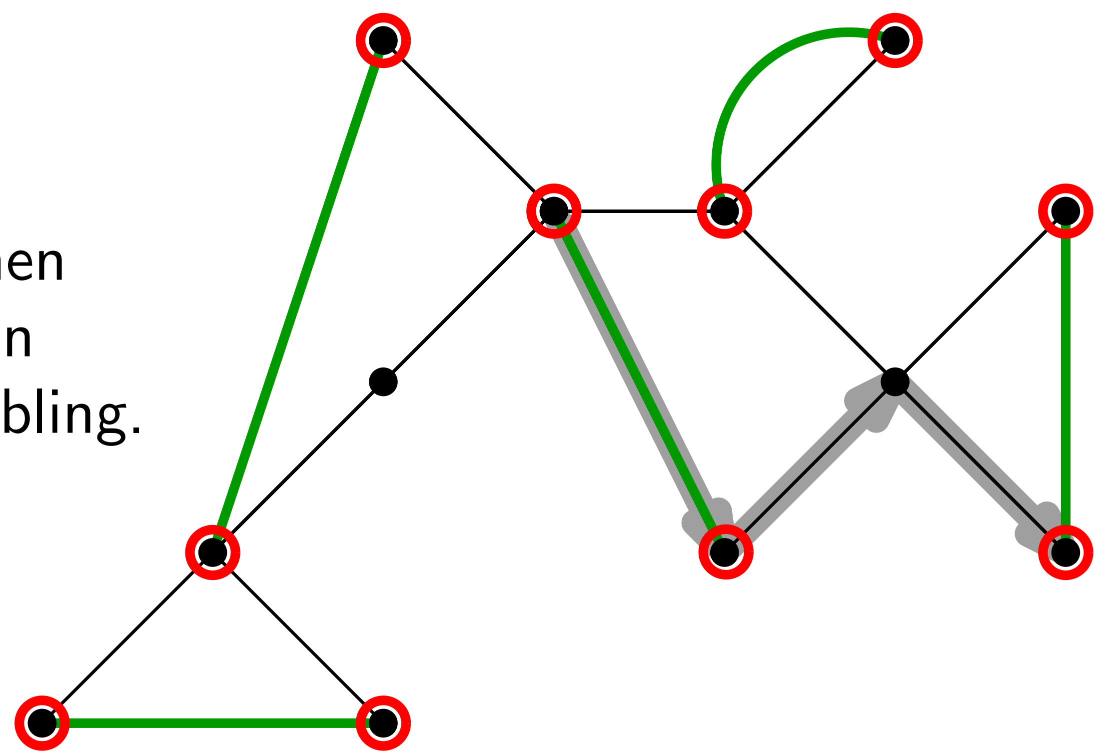
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$
  (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

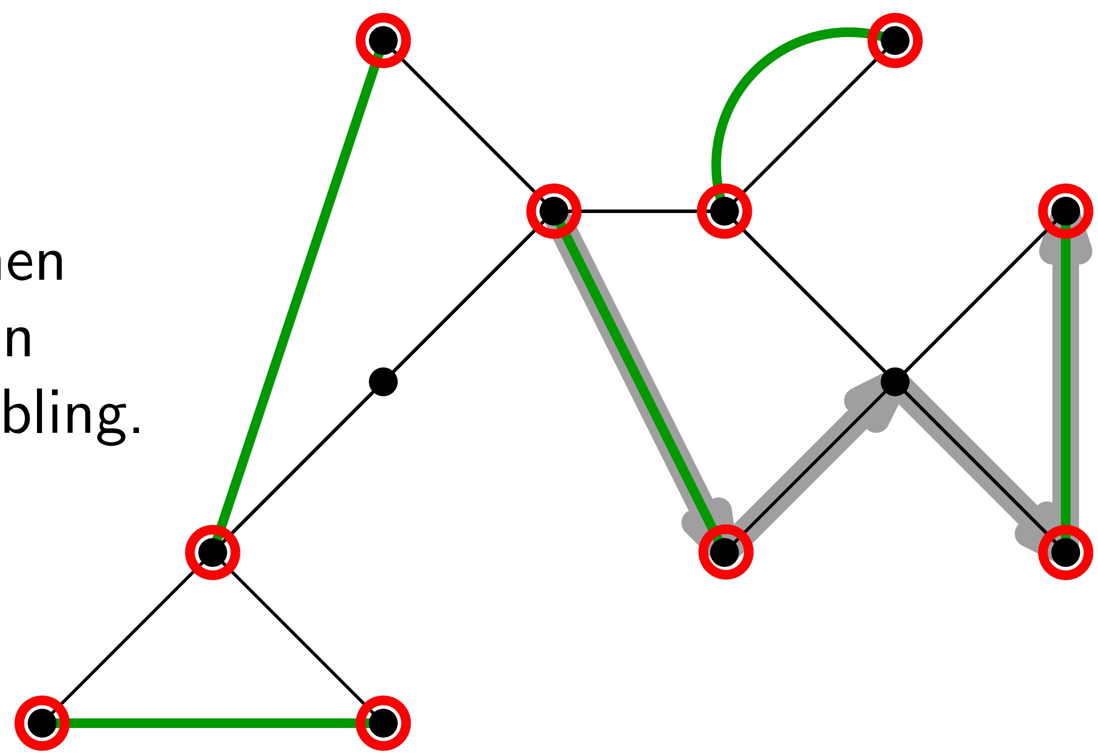
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

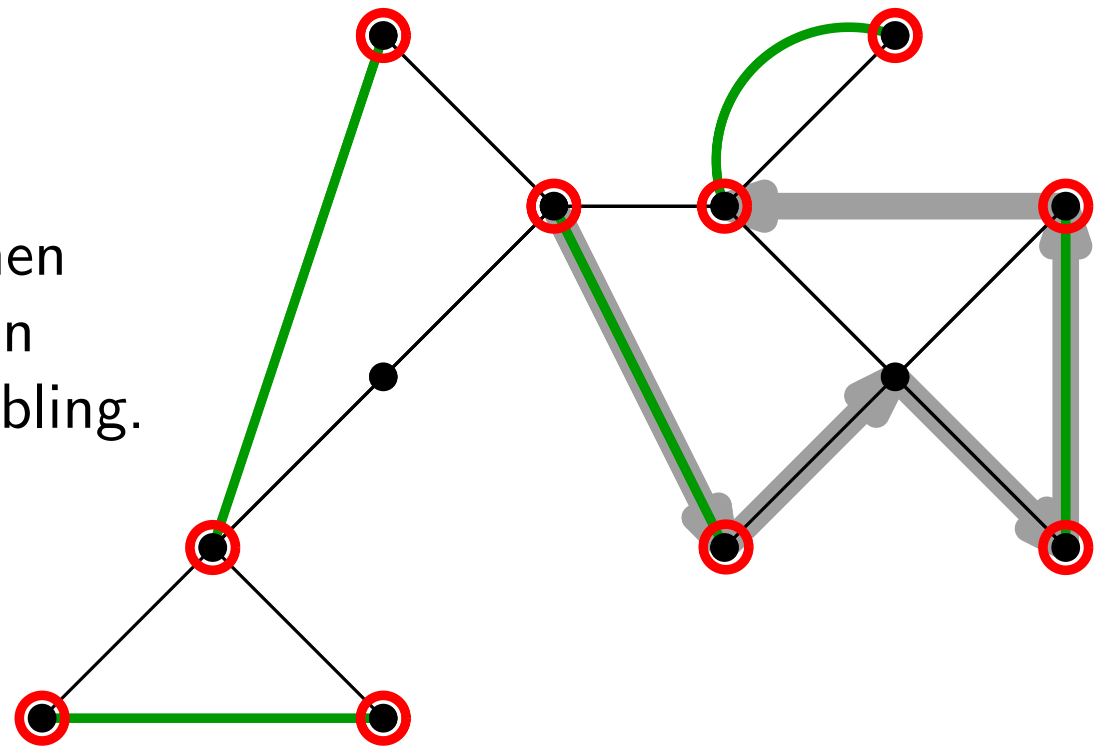
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

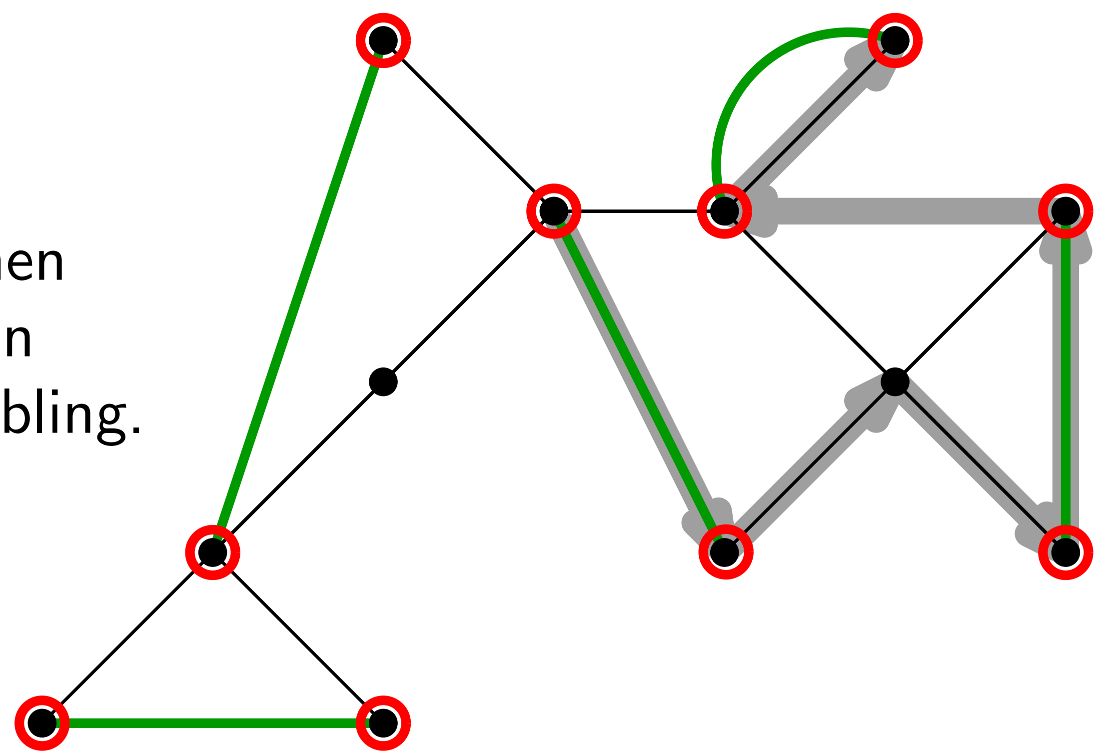
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$
  (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

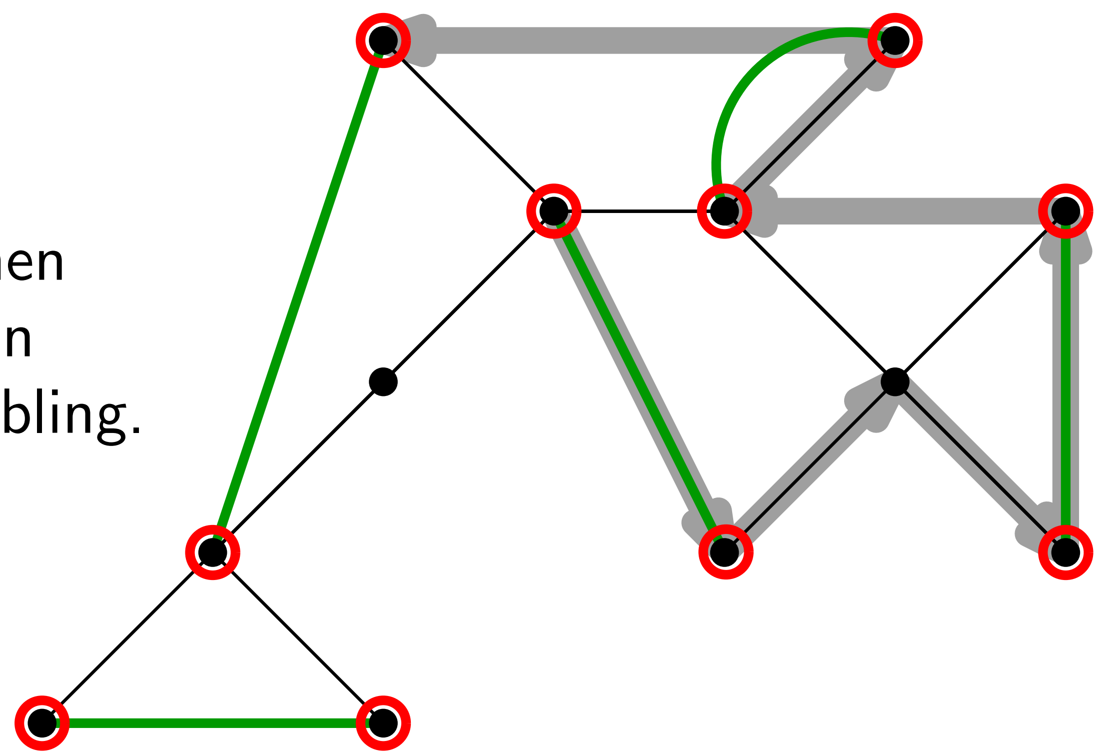
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

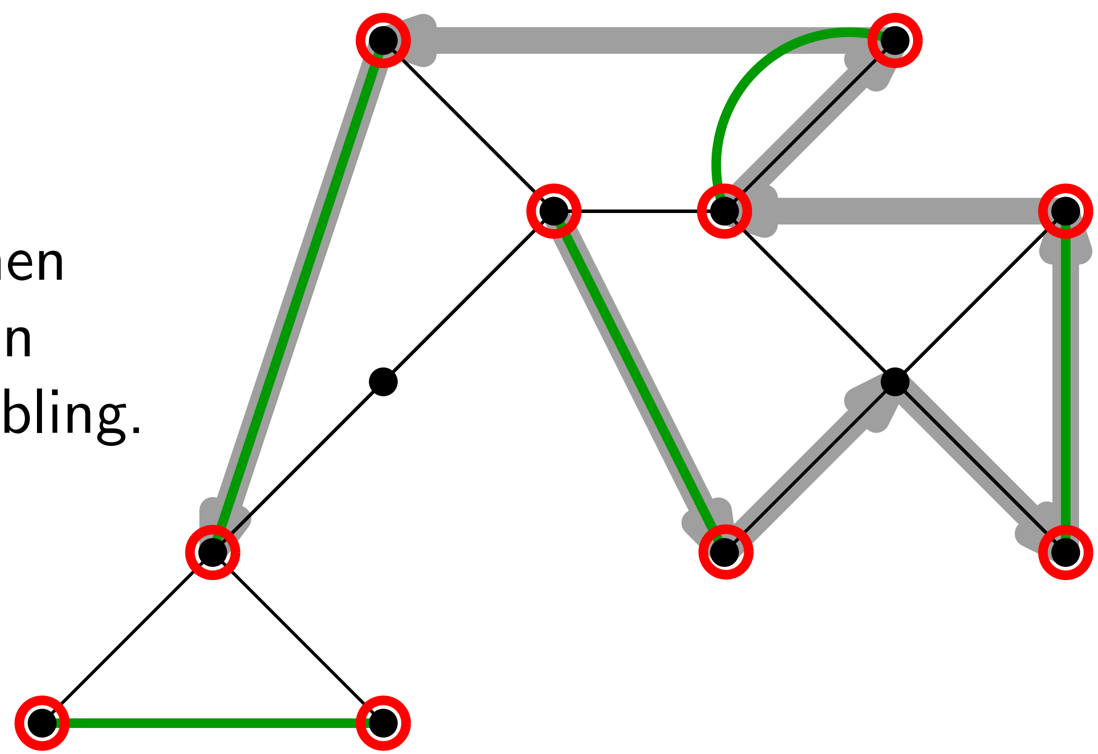
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

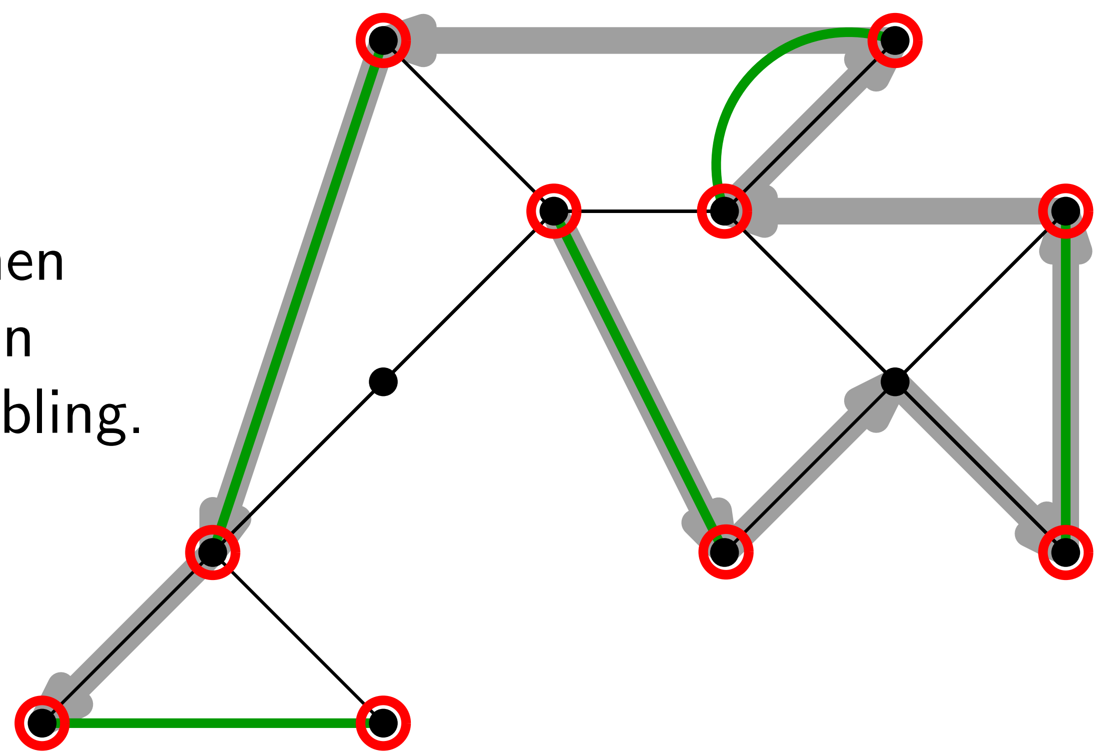
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$
  (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) : v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

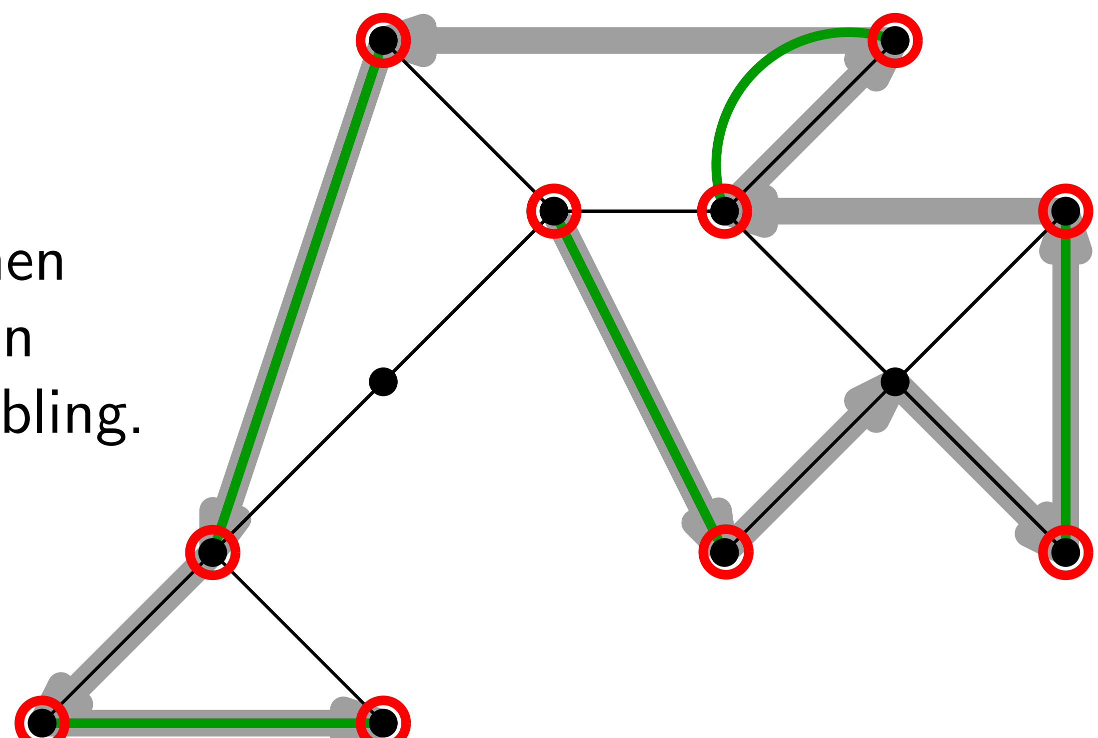
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$
  (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph
$(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

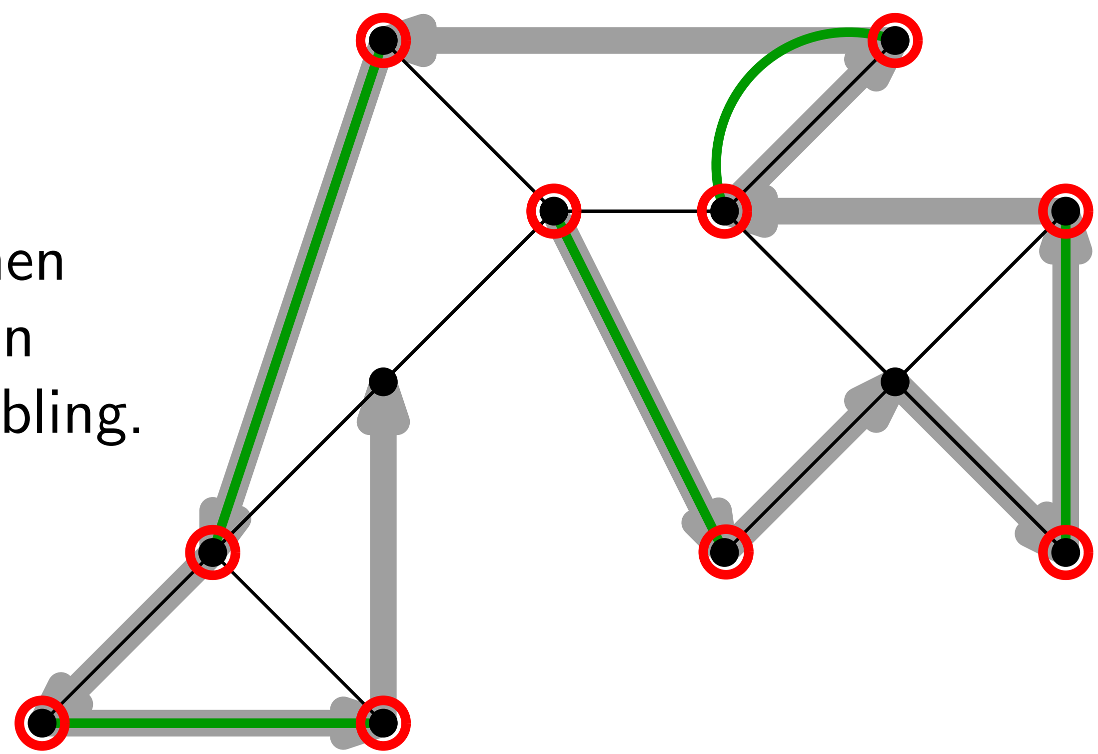
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$
  (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

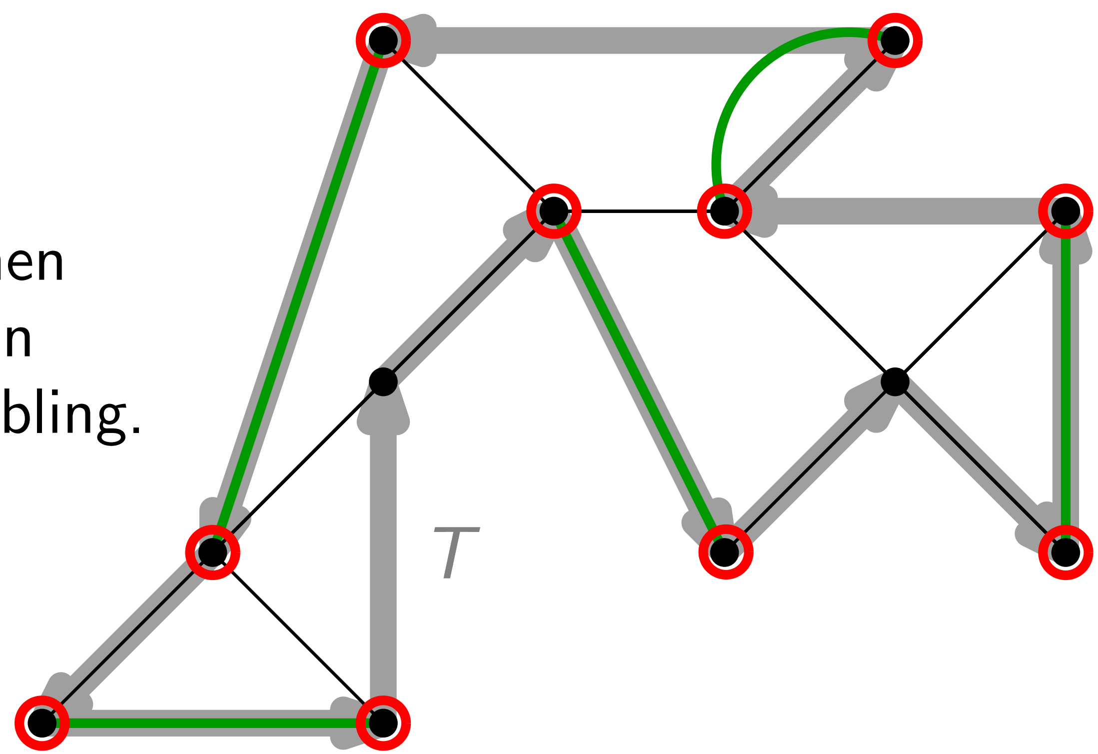
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$
  (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph
$(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$
  (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

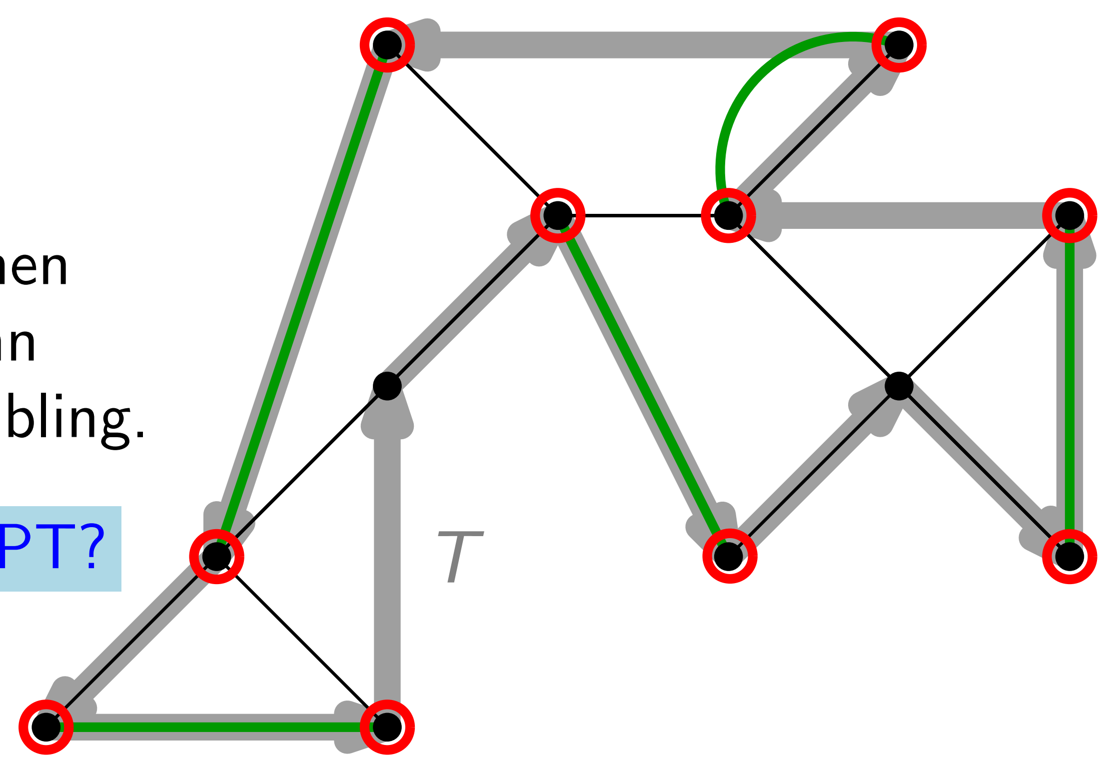
M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph
$(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.

Wie gut ist T im Vergleich zu OPT?



Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine $3/2$-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.

Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine $3/2$-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

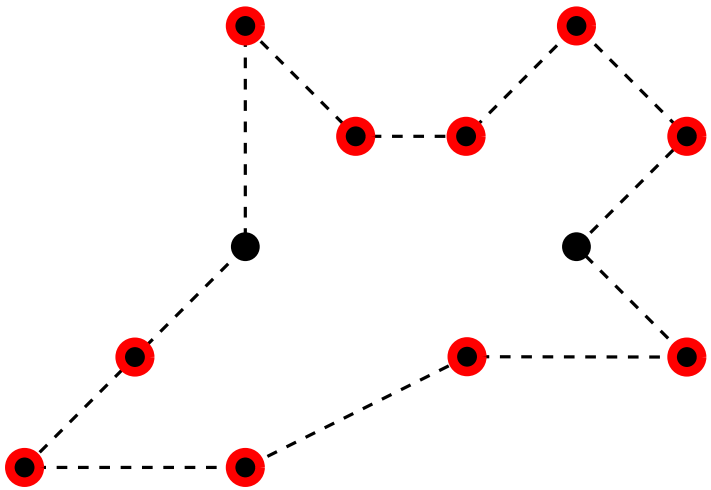
- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.

Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine $3/2$-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.

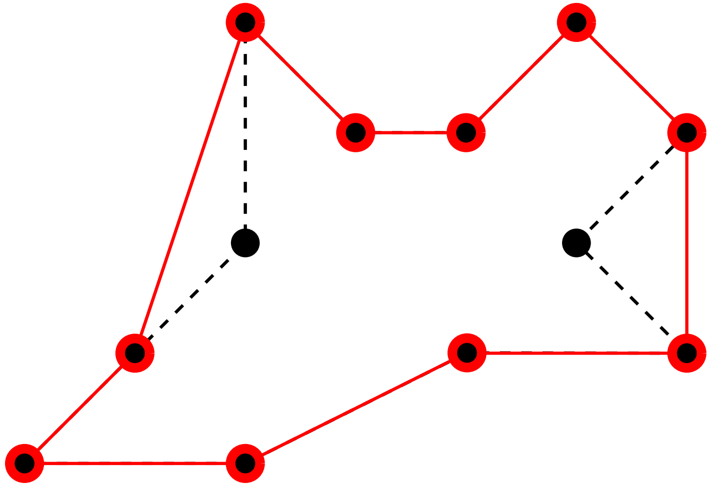


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.

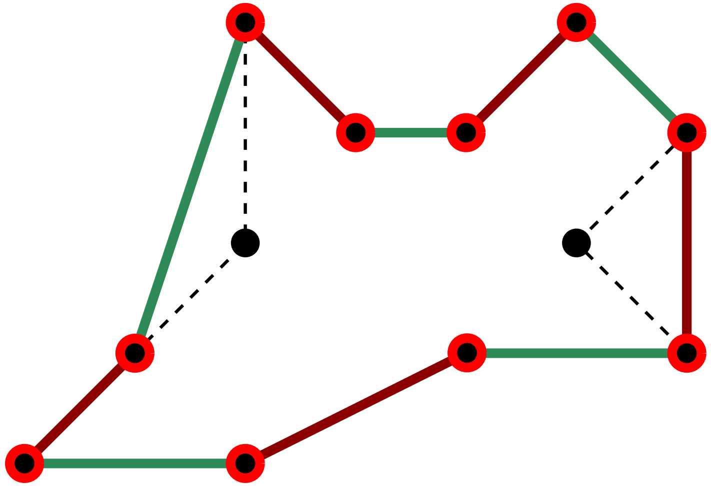


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.

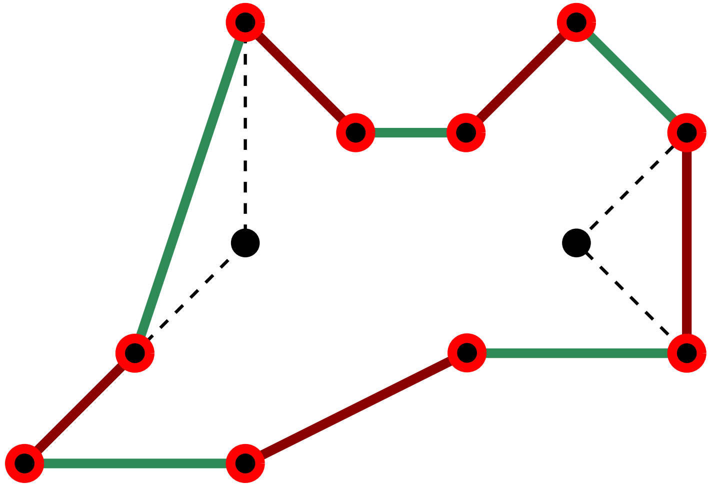


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.
- O.B.d.A. $c(M') \leq c(M'')$.

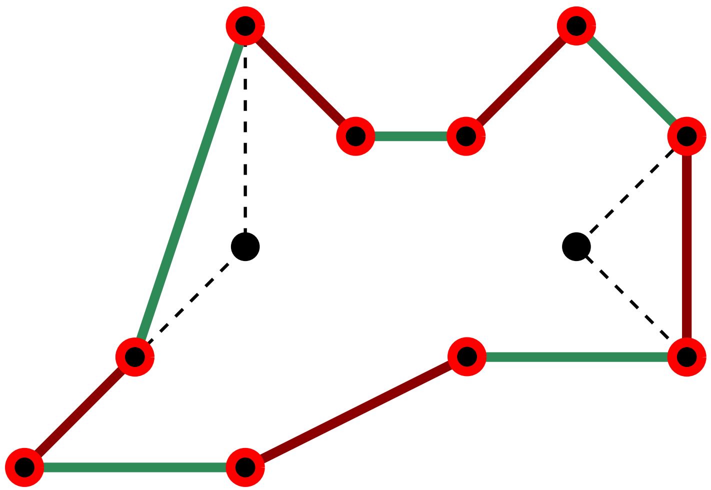


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.
- O.B.d.A. $c(M') \leq c(M'')$.
- Also gilt $c(M') \leq c(T^{**})/2 \leq \mathrm{OPT}/2$.

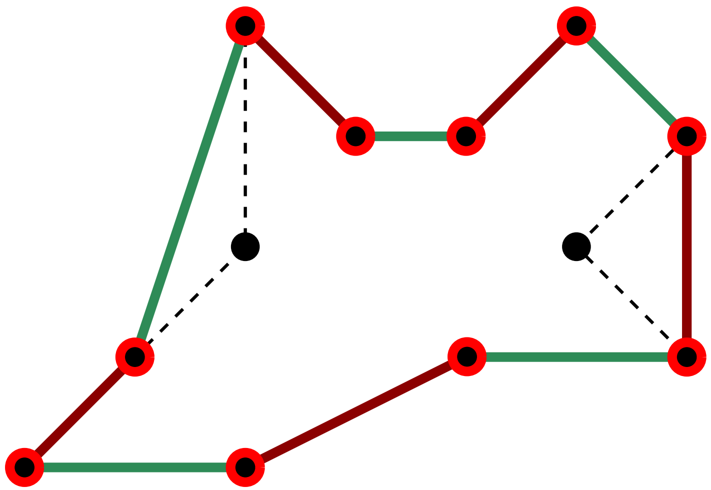


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.
- O.B.d.A. $c(M') \leq c(M'')$.
- Also gilt $c(M') \leq c(T^{**})/2 \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Außerdem gilt $c(M) \leq c(M')$, da

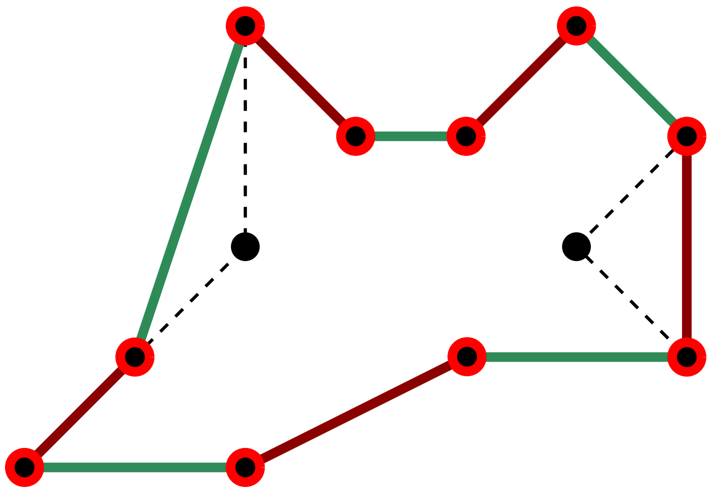


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.
- O.B.d.A. $c(M') \leq c(M'')$.
- Also gilt $c(M') \leq c(T^{**})/2 \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Außerdem gilt $c(M) \leq c(M')$, da
  - M' perfektes Matching in $G[U]$

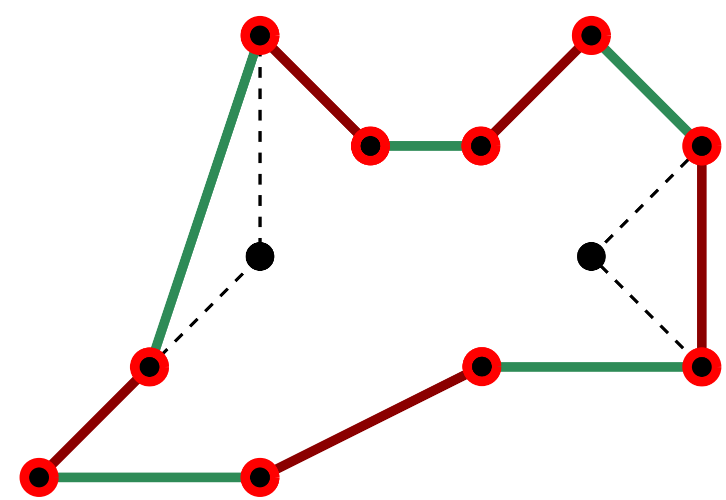


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.
- O.B.d.A. $c(M') \leq c(M'')$.
- Also gilt $c(M') \leq c(T^{**})/2 \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Außerdem gilt $c(M) \leq c(M')$, da
  - M' perfektes Matching in $G[U]$
  - M *kostenminimales* perfektes Matching in $G[U]$



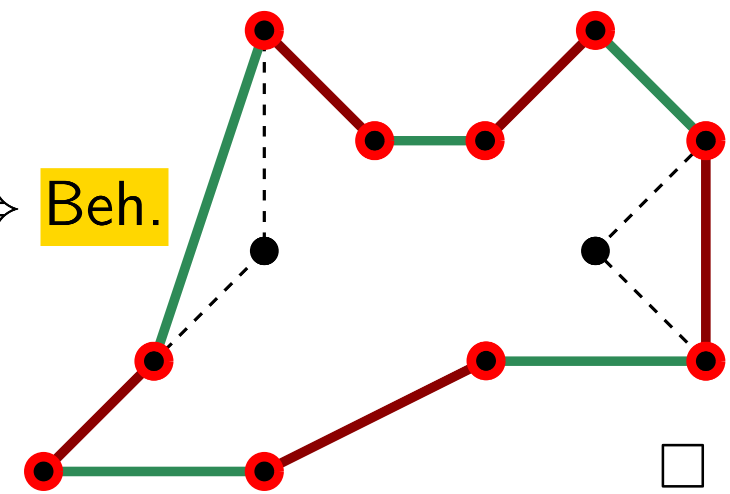
Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \le 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \le c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \le \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \le \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \le c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.
- O.B.d.A. $c(M') \le c(M'')$.
- Also gilt $c(M') \le c(T^{**})/2 \le \mathrm{OPT}/2.$
- Außerdem gilt $c(M) \le c(M')$, da
  - M' perfektes Matching in $G[U]$
  - M *kostenminimales* perfektes Matching in $G[U]$

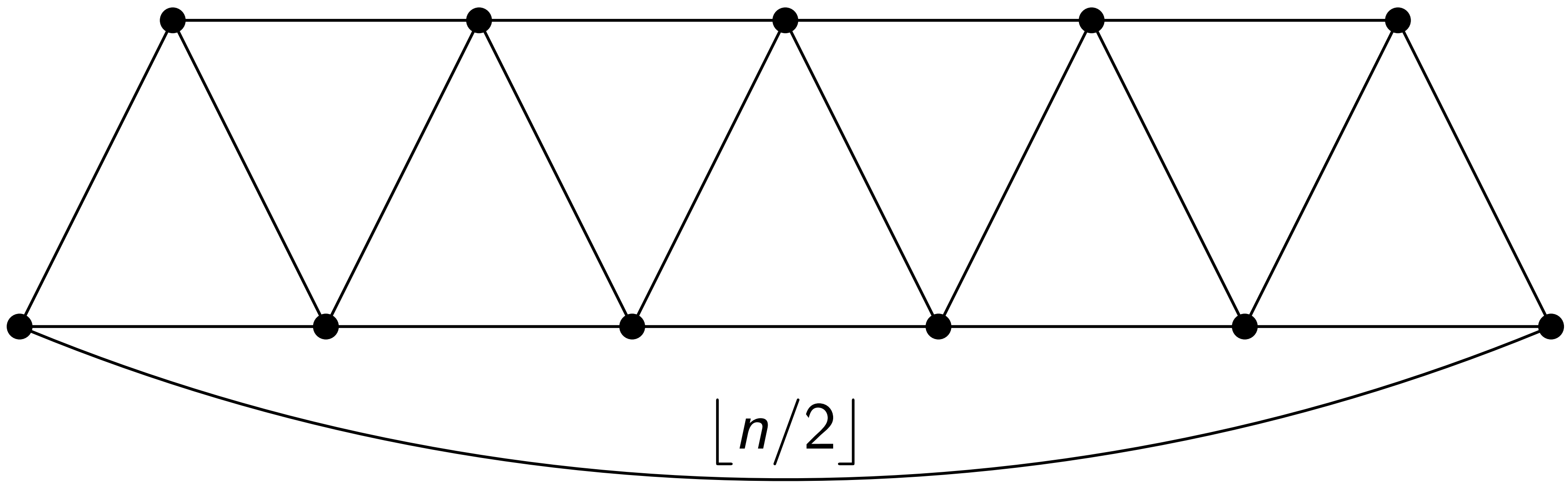
$\Rightarrow$ Beh.



$\square$

Der Approximationsfaktor ist scharf

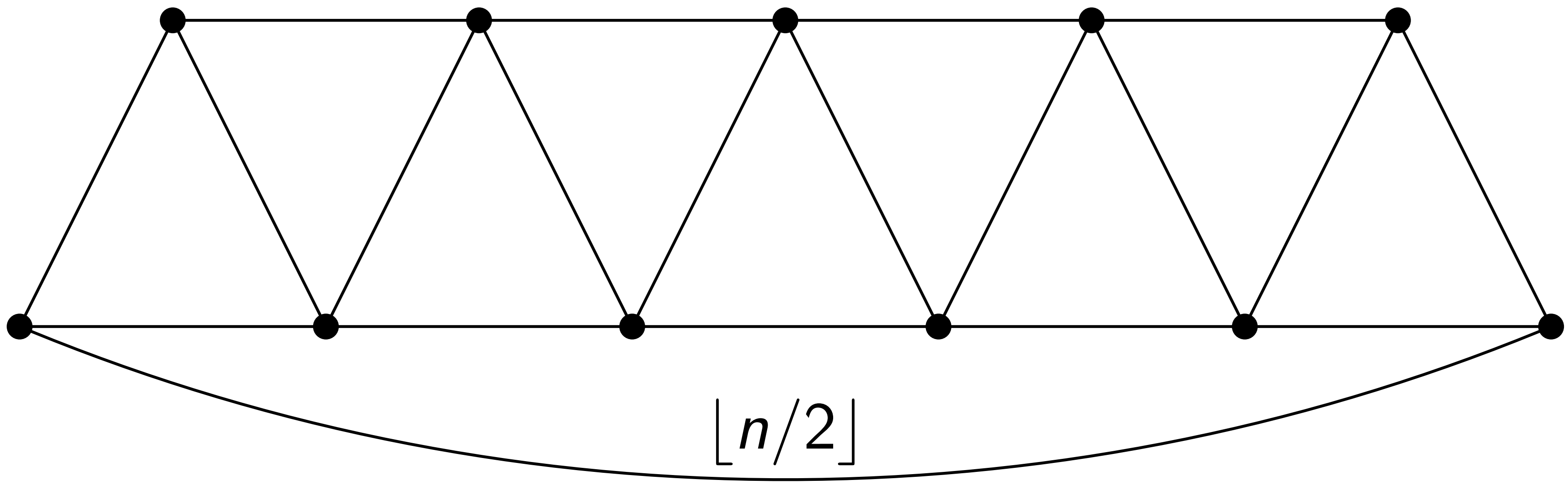
Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:



Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

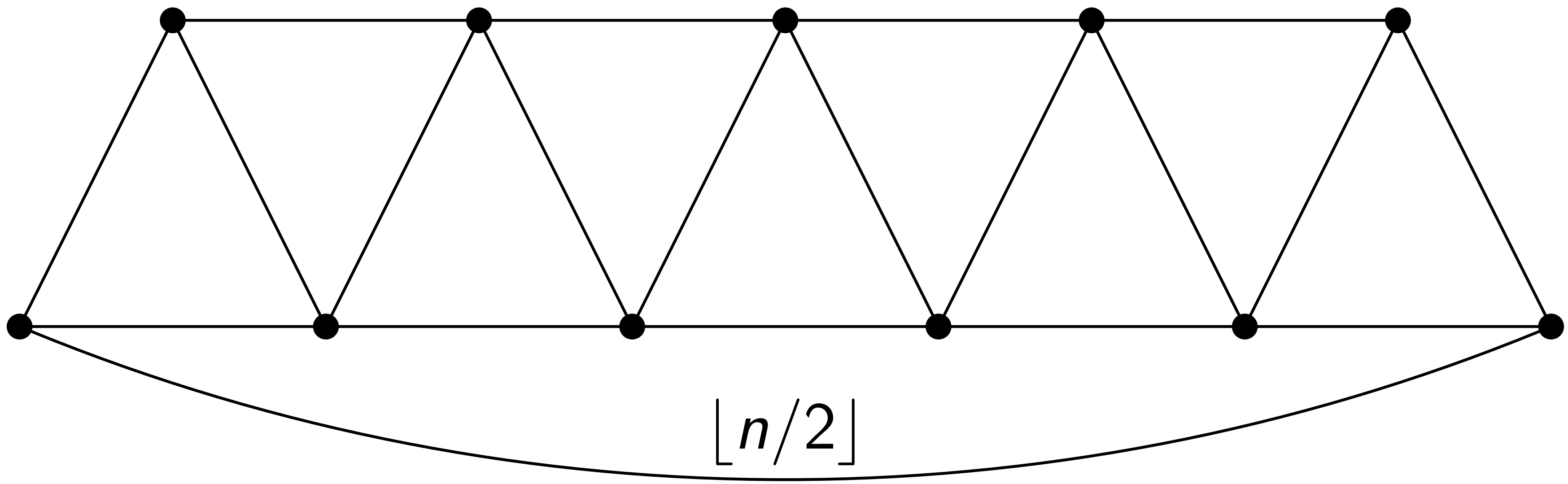


Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...

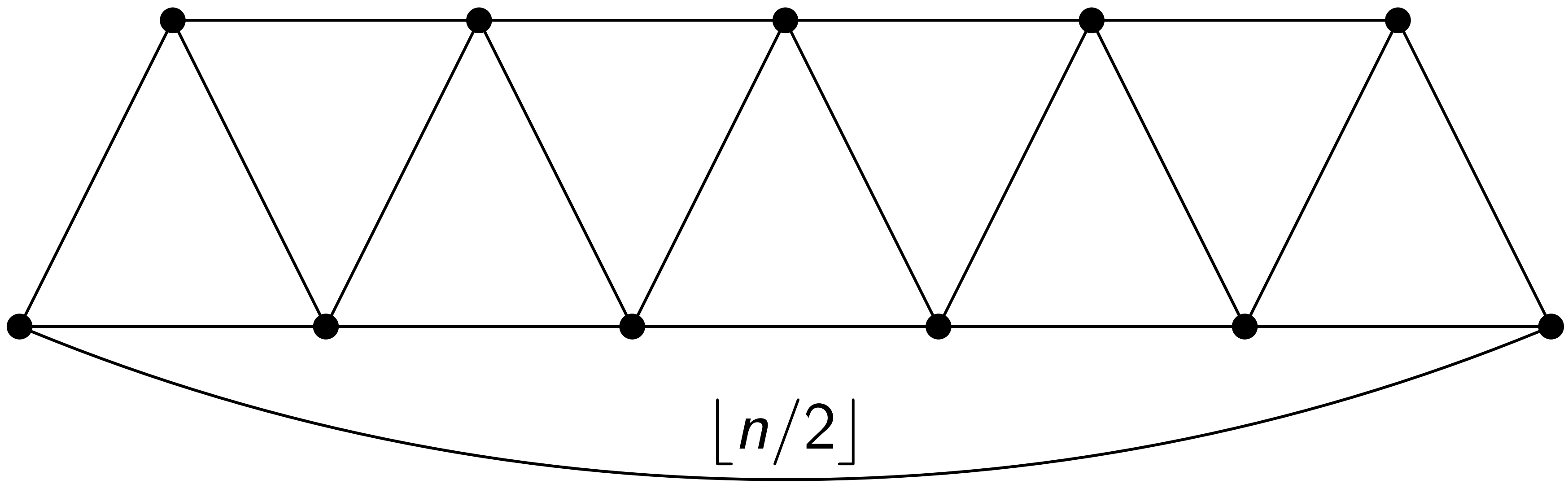


Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

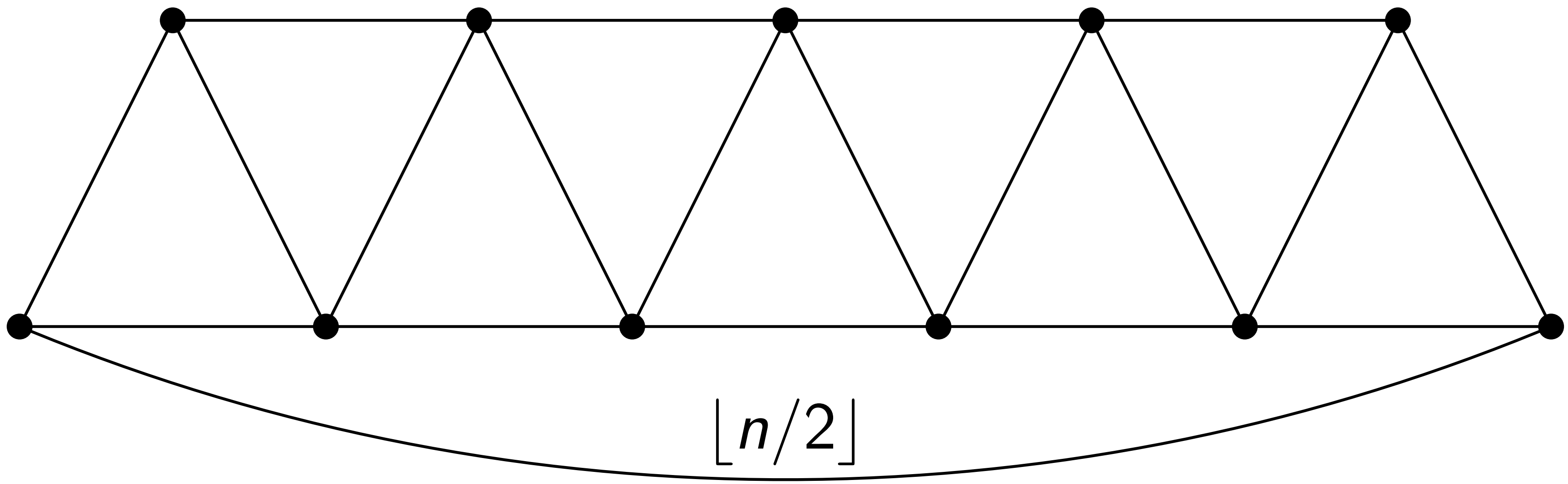
– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
Länge eines kürzesten u-v-Weges



Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

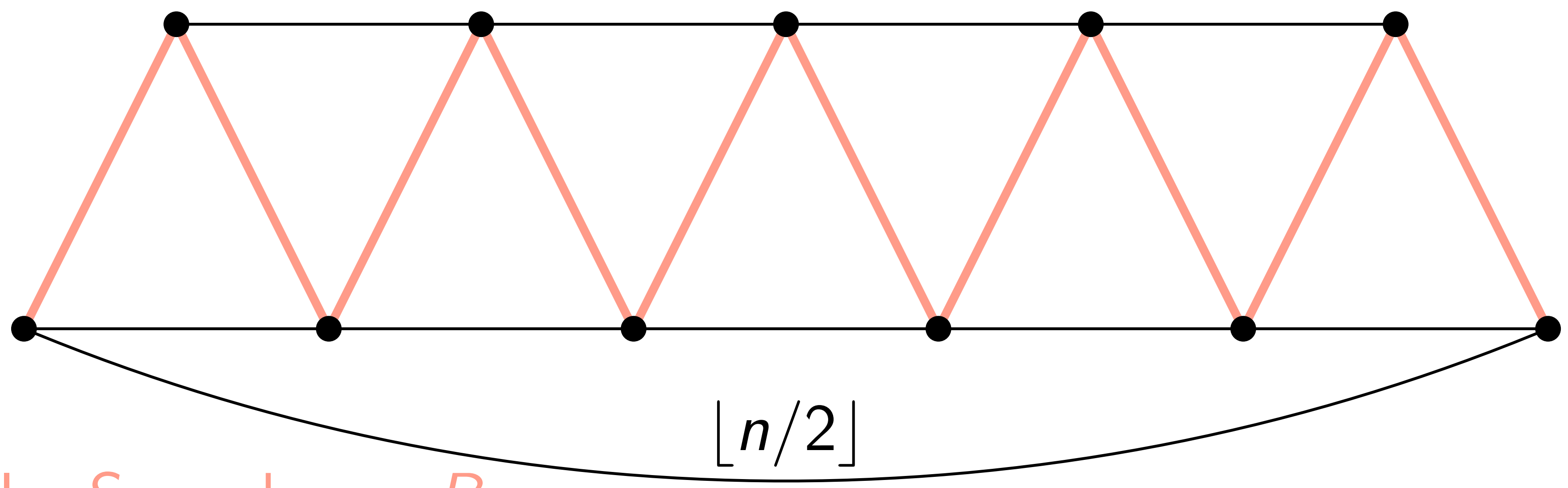
- Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.
- Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
  Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

- Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.
- Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
  Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



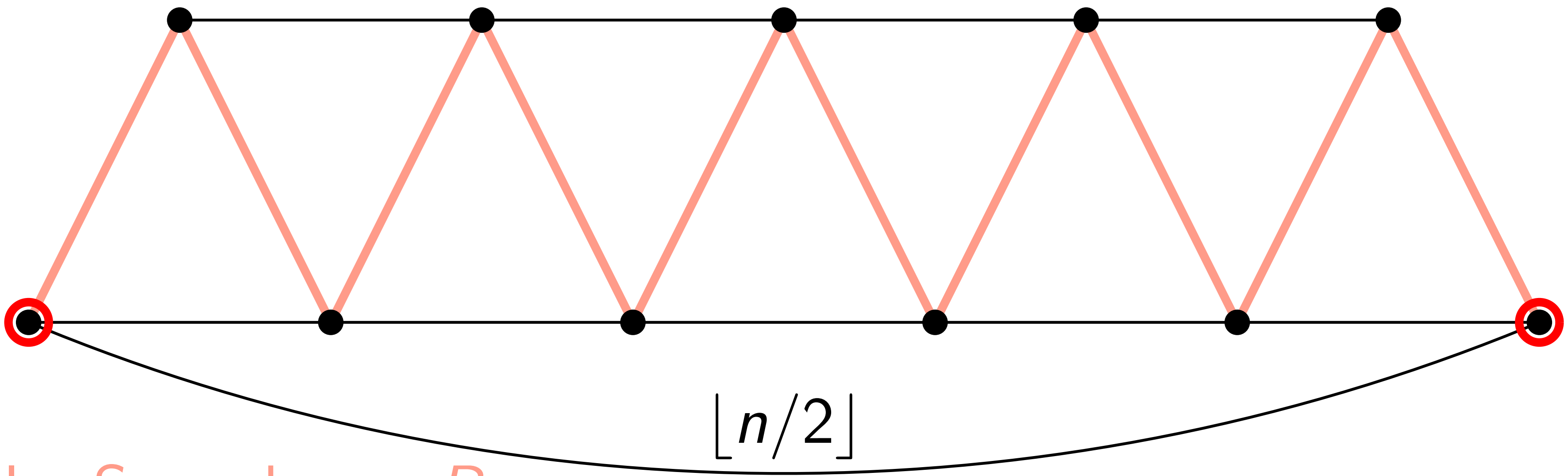
minimaler Spannbaum B

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)

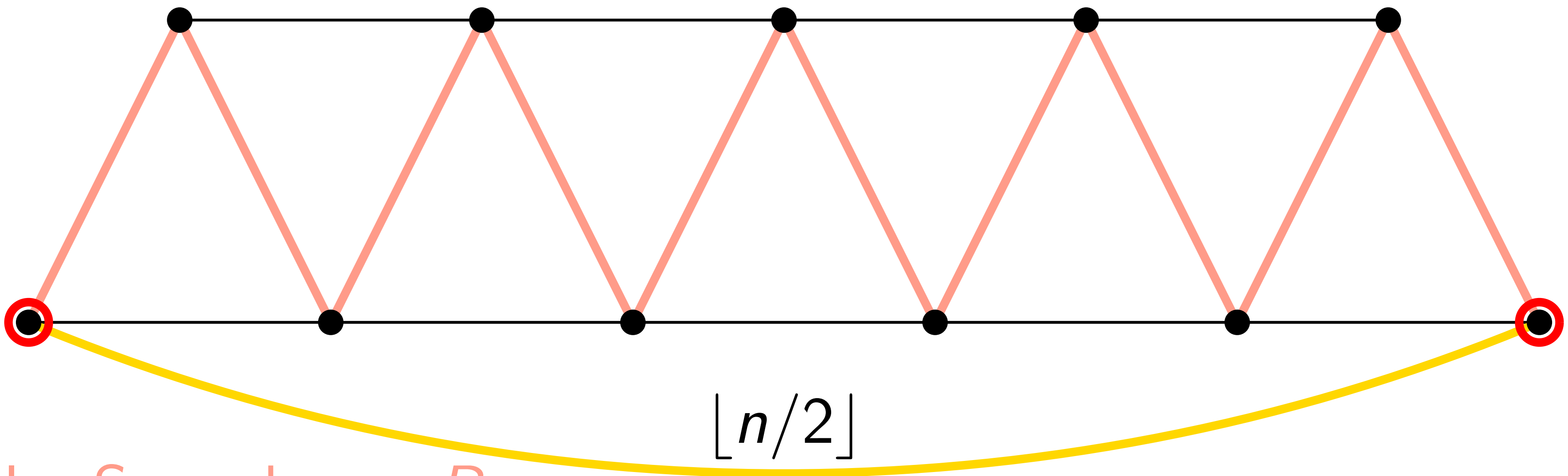


minimaler Spannbaum B

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.
– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)

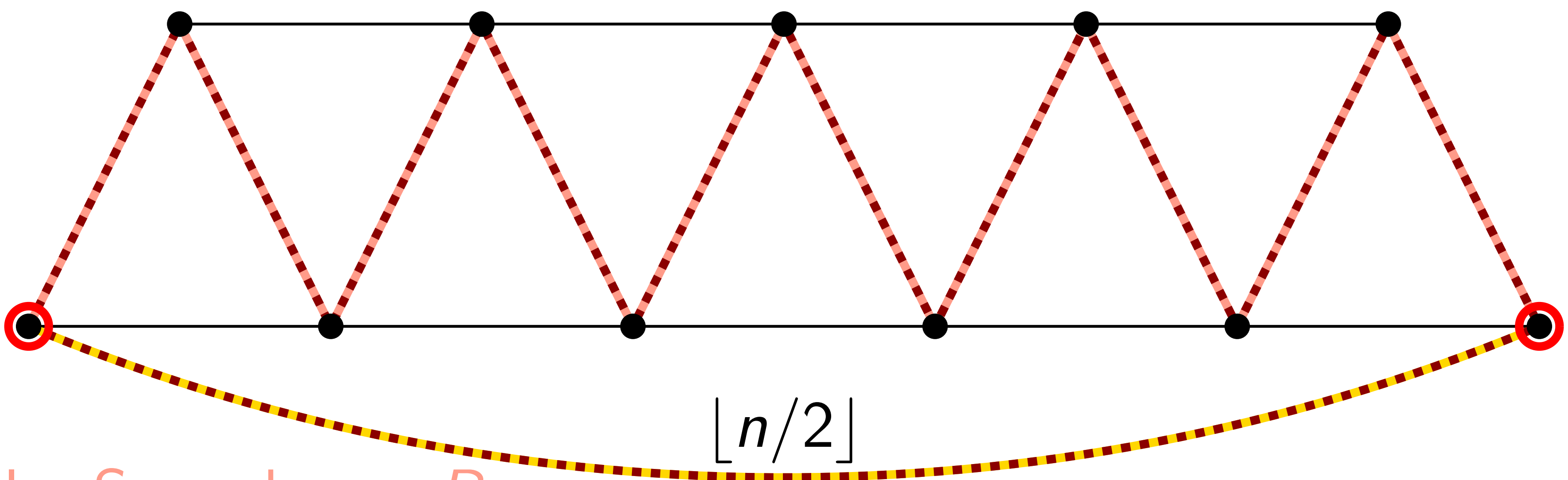


minimaler Spannbaum B
perfektes Matching M in $G[U]$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.
– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten…
Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)

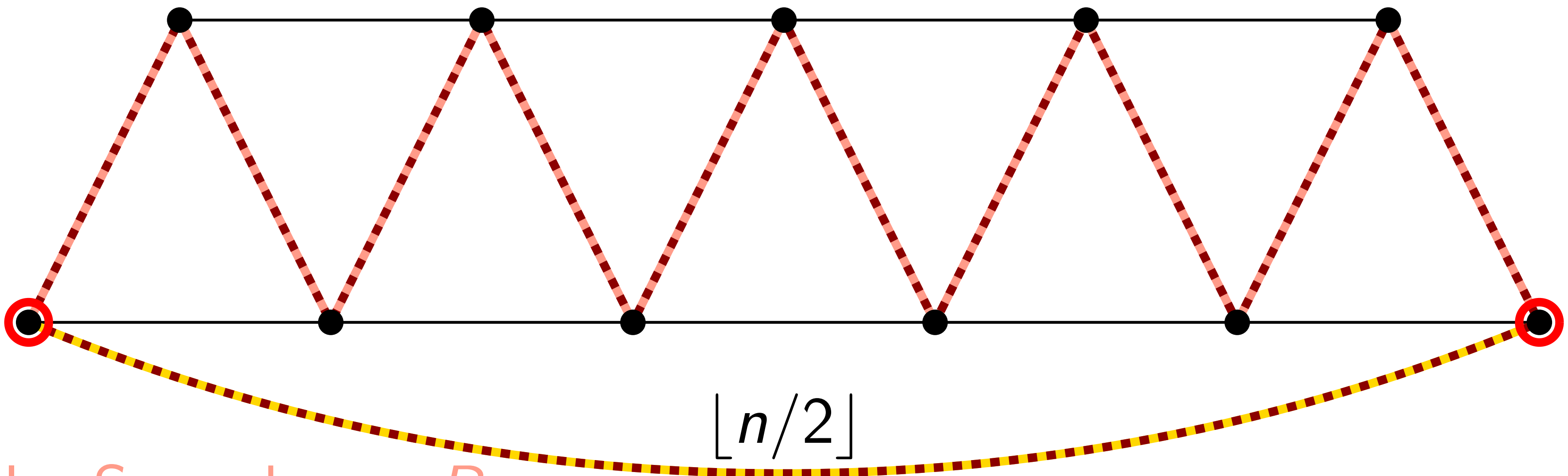


minimaler Spannbaum B
perfektes Matching M in $G[U]$
Christofides-Tour T mit Kosten ALG $=$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.
– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
  Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)

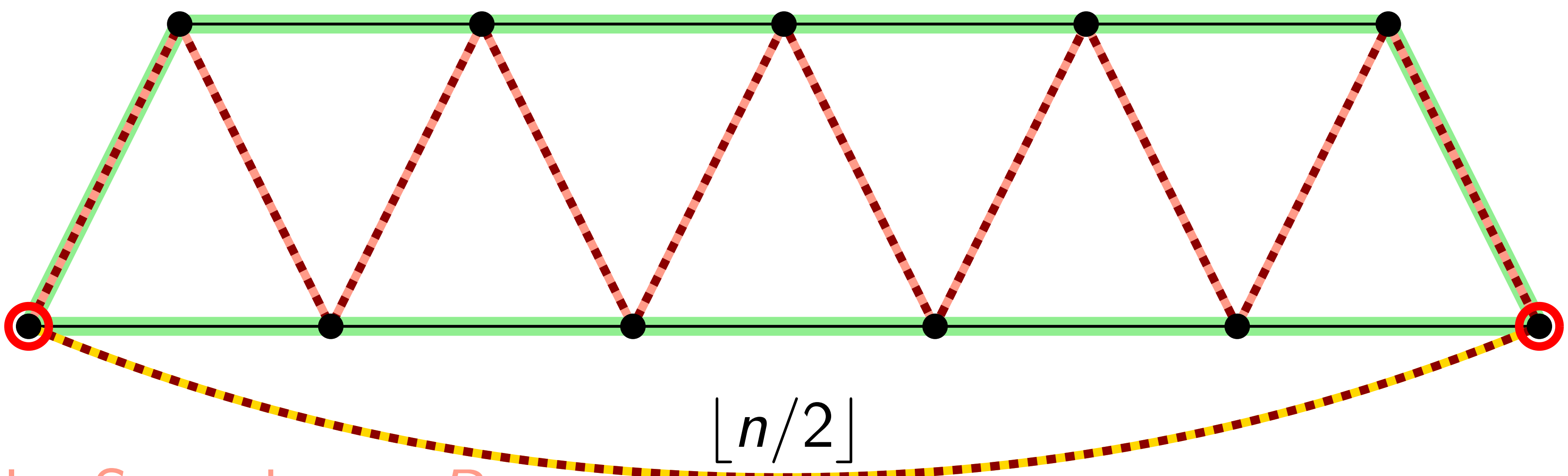


minimaler Spannbaum B
perfektes Matching M in $G[U]$
Christofides-Tour T mit Kosten ALG $= n + \lfloor n/2 \rfloor - 1$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.
– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



minimaler Spannbaum B

perfektes Matching M in $G[U]$

Christofides-Tour T mit Kosten ALG $= n + \lfloor n/2 \rfloor - 1$

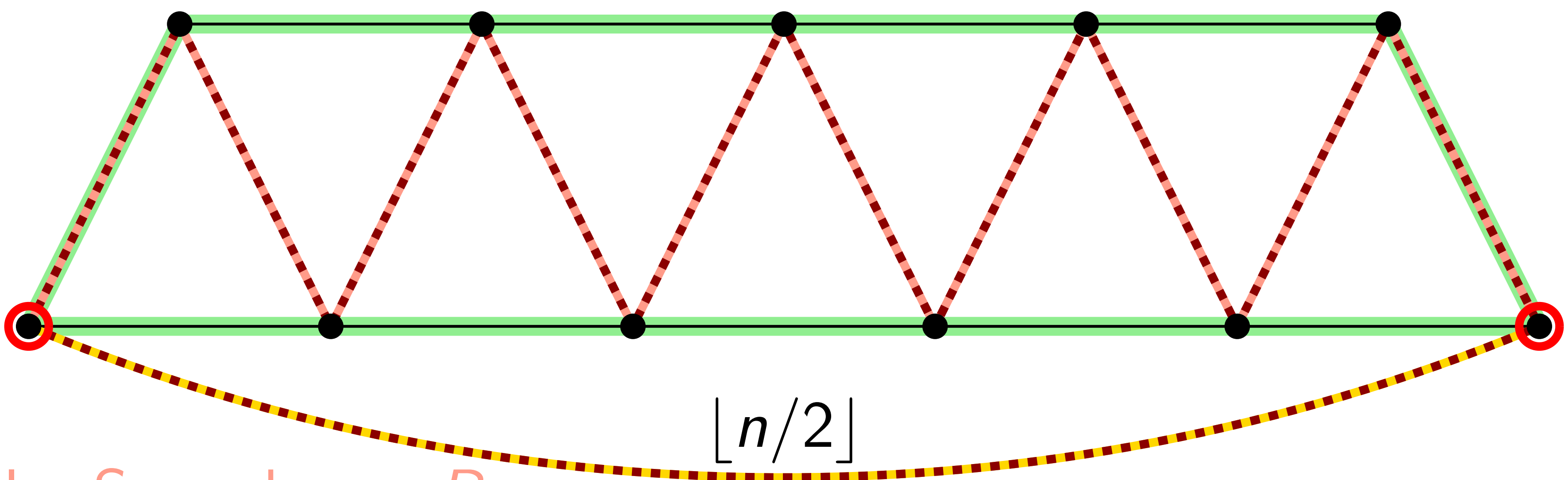
OPT $=$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



minimaler Spannbaum B

perfektes Matching M in $G[U]$

Christofides-Tour T mit Kosten ALG $= n + \lfloor n/2 \rfloor - 1$

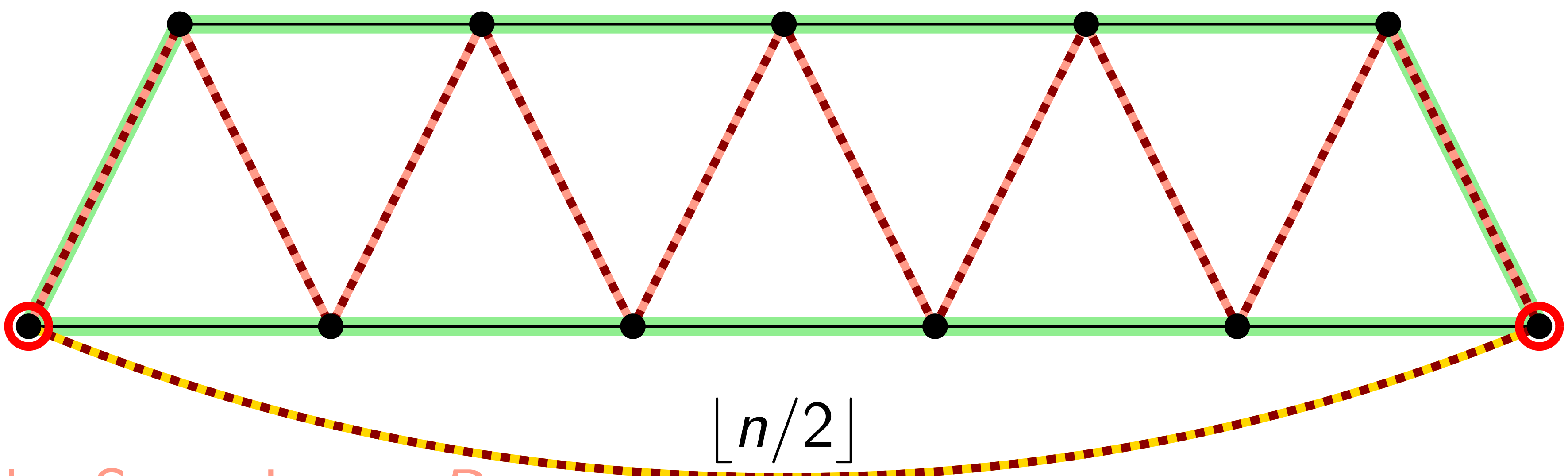
OPT $= n$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



minimaler Spannbaum B

perfektes Matching M in $G[U]$

Christofides-Tour T mit Kosten ALG $= n + \lfloor n/2 \rfloor - 1$

OPT $= n$

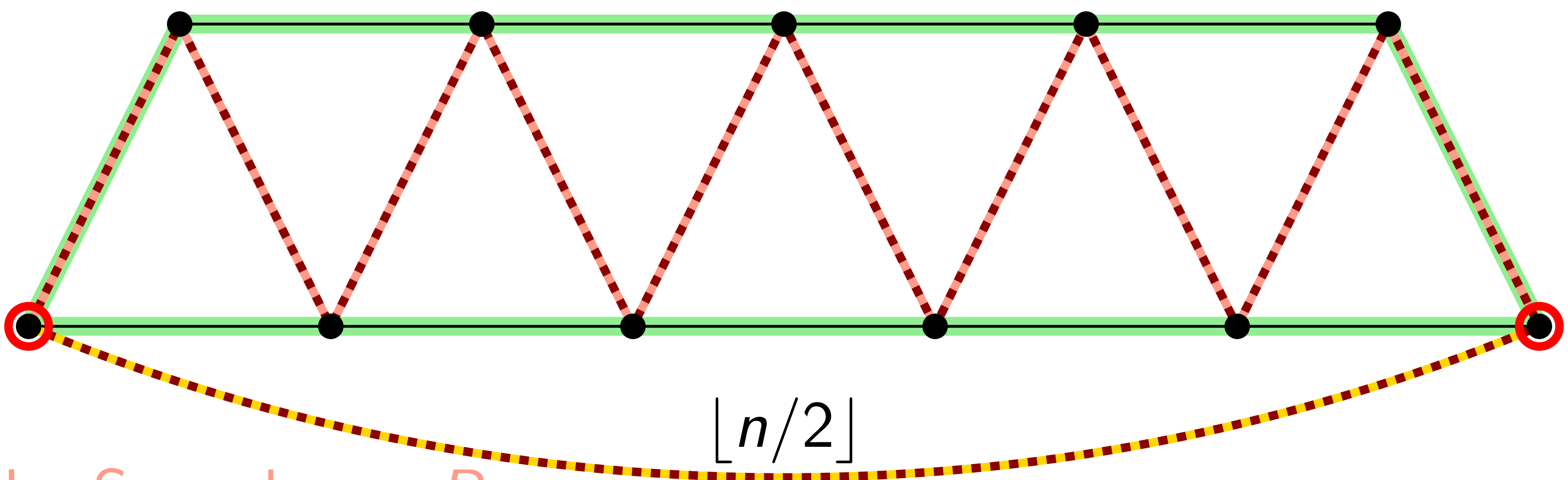
ALG / OPT $= (n + \lfloor n/2 \rfloor - 1)/n \rightarrow$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
  Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



minimaler Spannbaum B

perfektes Matching M in $G[U]$

Christofides-Tour T mit Kosten ALG $= n + \lfloor n/2 \rfloor - 1$

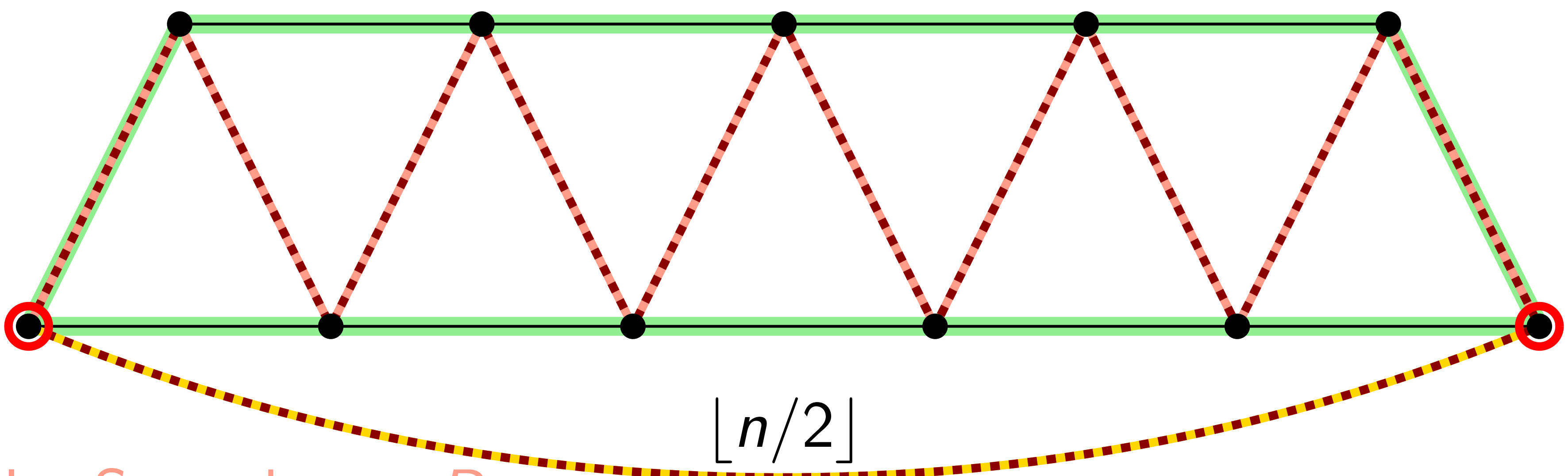
OPT $= n$

ALG / OPT $= (n + \lfloor n/2 \rfloor - 1)/n \rightarrow 3/2$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

- Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.
- Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
  Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



minimaler Spannbaum B

perfektes Matching M in $G[U]$

Christofides-Tour T mit Kosten ALG $= n + \lfloor n/2 \rfloor - 1$

OPT $= n$

ALG / OPT $= (n + \lfloor n/2 \rfloor - 1)/n \rightarrow 3/2$

Also:
Nicht die Analyse ist schlecht –
sondern der Algorithmus!

Kostenminimale perfekte Matchings

Def. Gegeben: vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Gesucht: perfektes Matching M mit minimalen Kosten $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$.

Kostenminimale perfekte Matchings

Def. Gegeben: vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Gesucht: perfektes Matching M mit minimalen Kosten $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$.

Satz. Ein kostenminimales perfektes Matching kann in $O(V^3)$ Zeit berechnet werden.

Kostenminimale perfekte Matchings

Def. Gegeben: vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Gesucht: perfektes Matching M mit minimalen Kosten $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$.

Satz. Ein kostenminimales perfektes Matching kann in $O(V^3)$ Zeit berechnet werden.

Beweis. Siehe [Edmonds '65]; ziemlich kompliziert :-($\square$

Kostenminimale perfekte Matchings

Def. Gegeben: vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Gesucht: perfektes Matching M mit minimalen Kosten $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$.

Satz. Ein kostenminimales perfektes Matching kann in $O(V^3)$ Zeit berechnet werden.

Beweis. Siehe [Edmonds '65]; ziemlich kompliziert :-($\square$

Im Folgenden betrachten wir das Problem nur in *bipartiten* Graphen $G = (A \cup B, E)$.

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP!

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP!

Minimiere

unter den Nebenbed.

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP!

Minimiere

unter den Nebenbed.

$$x_{uv} \in \{0, 1\} \qquad \text{für } uv \in E$$

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP!

Minimiere $$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$$

unter den Nebenbed.

$$x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \text{für } uv \in E$$

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP!

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
 & x_{uv} \in \{0,1\} & \text{für } uv \in E
\end{array}
$$

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP!

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
 & x_{uv} \in \{0, 1\} & \text{für } uv \in E
\end{array}
$$

- Effizient lösbar?

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP!

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
& x_{uv} \in \{0, 1\} & \text{für } uv \in E
\end{array}
$$

- Effizient lösbar? I.A. nicht – VC is Spezialfall von ILP.

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP!

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
 & \cancel{x_{uv} \in \{0,1\}} & \text{für } uv \in E \\
 & x_{uv} \geq 0 &
\end{array}
$$

- Effizient lösbar? I.A. nicht – VC is Spezialfall von ILP.
- Betrachte sogenannte *LP-Relaxierung* $\Rightarrow$ effizient lösbar!

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP!

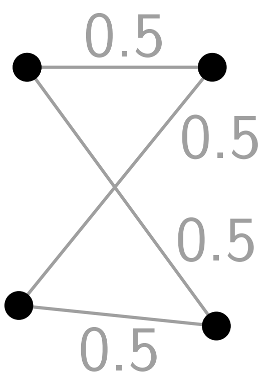
Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$\cancel{x_{uv} \in \{0, 1\}}$	für $uv \in E$

$x_{uv} \geq 0$

- Effizient lösbar? I.A. nicht – VC is Spezialfall von ILP.
- Betrachte sogenannte *LP-Relaxierung* $\Rightarrow$ effizient lösbar!
  Bei Minimierungsproblemen gilt $\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}} \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{ILP}}$.

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP!



$\mathbf{x} \equiv 0.5$

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
 & \cancel{x_{uv} \in \{0, 1\}} & \text{für } uv \in E \\
 & x_{uv} \geq 0 &
\end{array}
$$

- Effizient lösbar? I.A. nicht – VC is Spezialfall von ILP.
- Betrachte sogenannte *LP-Relaxierung* $\Rightarrow$ effizient lösbar!
  Bei Minimierungsproblemen gilt $\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}} \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{ILP}}$.
- Problem: *fraktionale* Lösungen!

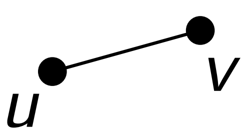
LP-Runden

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
& x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E
\end{array}
$$

LP-Runden

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

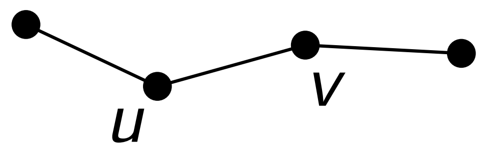


LP-Runden

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
 & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E
\end{array}
$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.



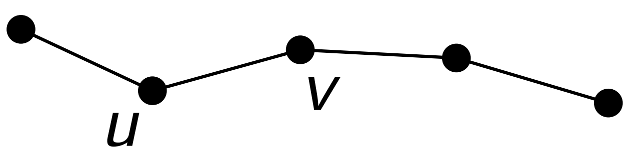
LP-Runden

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



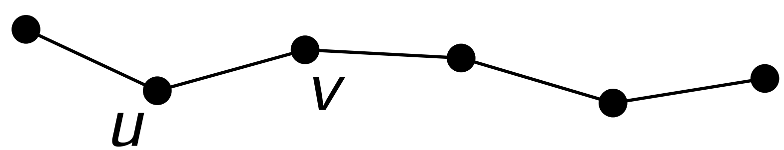
LP-Runden

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



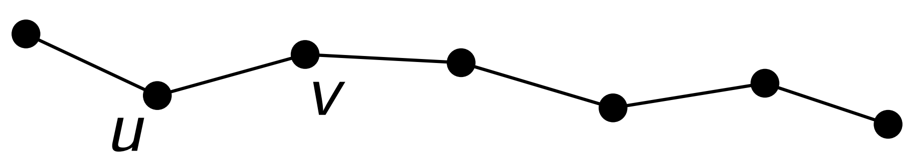
LP-Runden

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
& x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E
\end{array}
$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



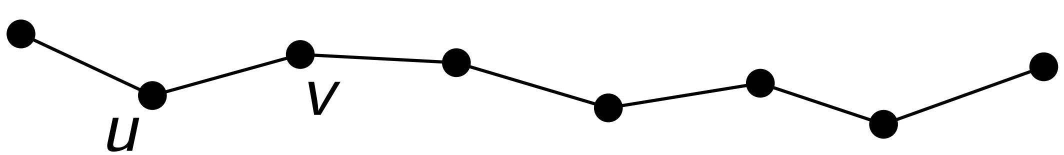
LP-Runden

$$\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
 & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E
\end{array}$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



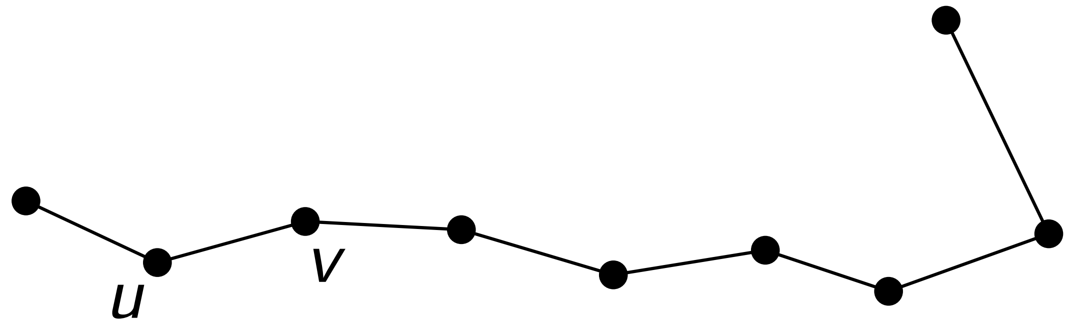
LP-Runden

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



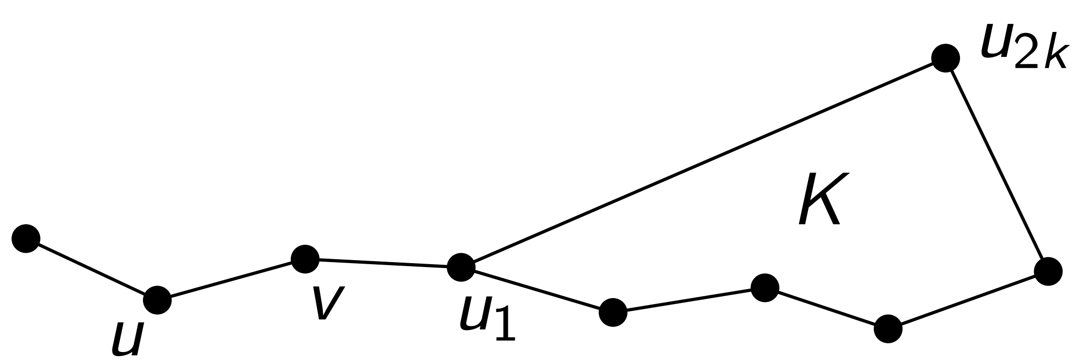
LP-Runden

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
 & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E
\end{array}
$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



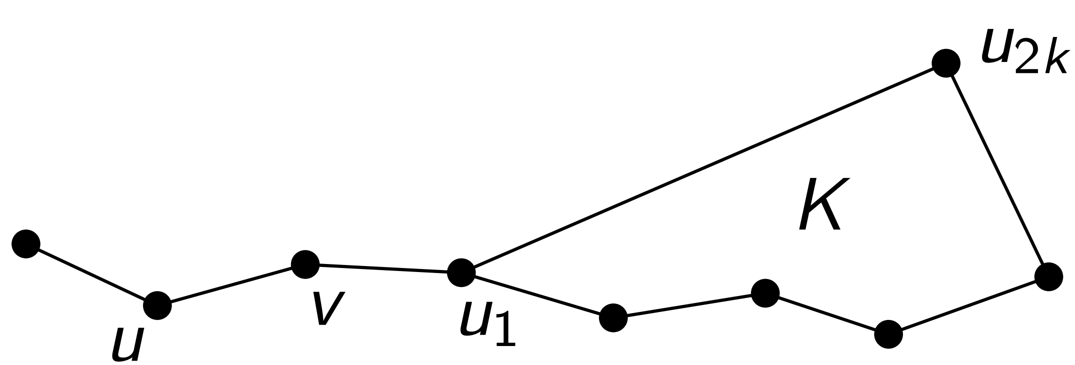
LP-Runden

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

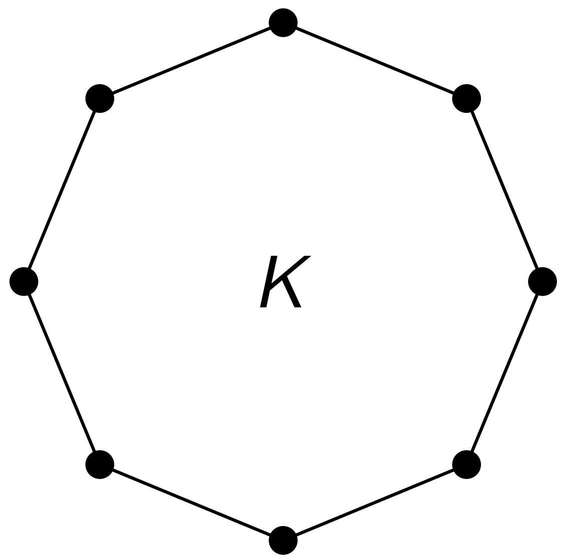
Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



Kreis gerade, da Graph bipartit (siehe ÜA).

LP-Runden – Fortsetzung (I)

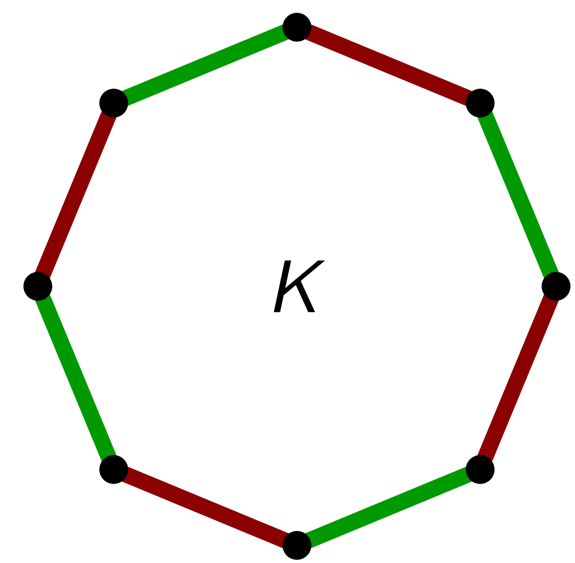
Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$



LP-Runden – Fortsetzung (I)

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}$$

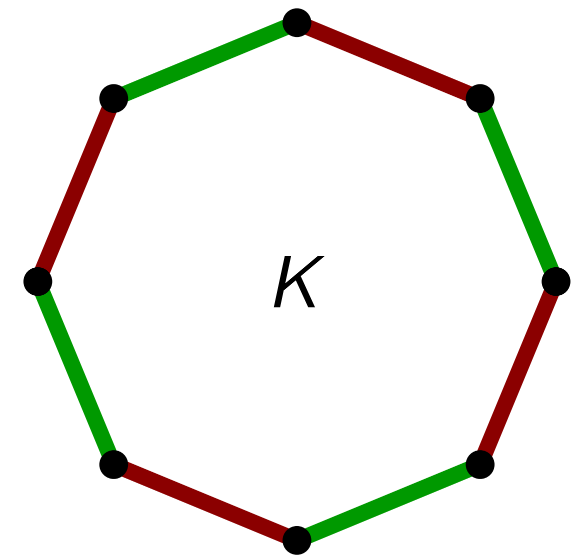
Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.



LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

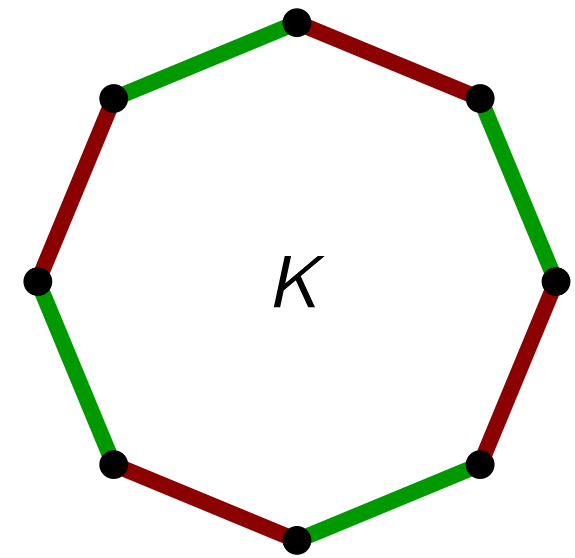
Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.



LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.
Wähle $\varepsilon := \min\{\, x_e \mid e \in M_2 \}$.



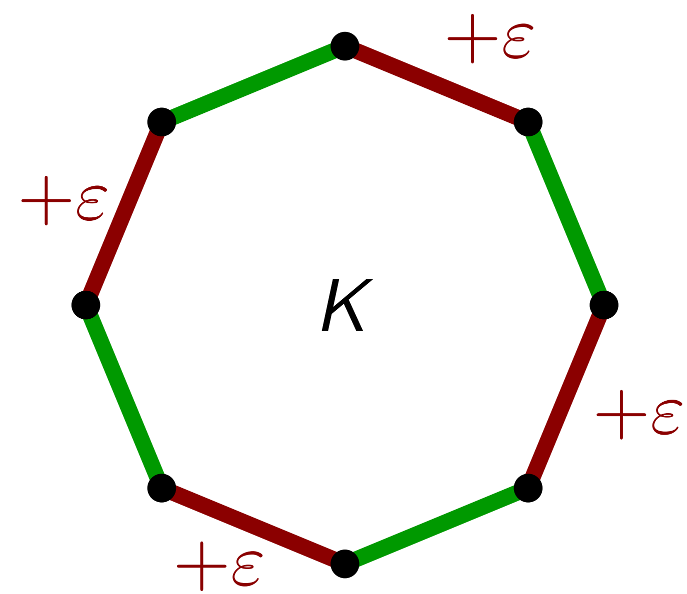
LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{\, x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze $x'_e := x_e + \varepsilon$ für $e \in M_1$,

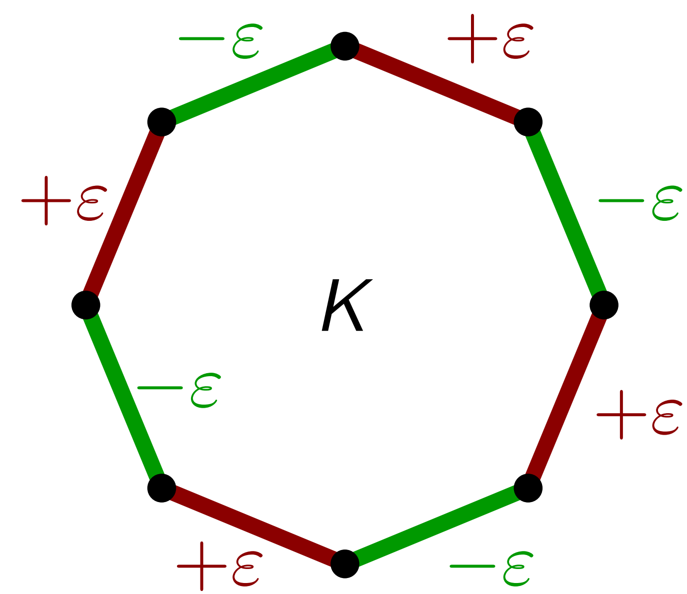


LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.
Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze $x'_e := x_e + \varepsilon$ für $e \in M_1$,
$x'_e := x_e - \varepsilon$ für $e \in M_2$,



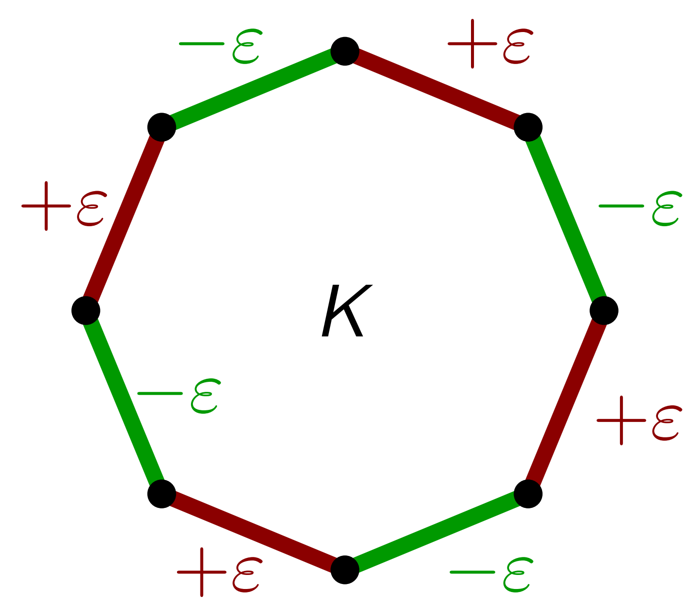
LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze
$$\boxed{\begin{aligned} x'_e &:= x_e + \varepsilon \text{ für } e \in M_1, \\ x'_e &:= x_e - \varepsilon \text{ für } e \in M_2, \\ x'_e &:= x_e \quad\;\;\, \text{ für } e \in E \setminus K. \end{aligned}}$$



LP-Runden – Fortsetzung (I)

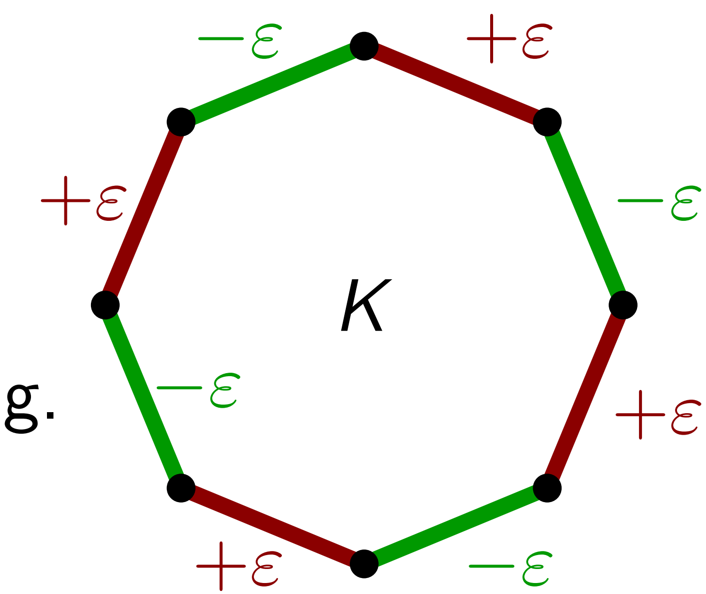
$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{\, x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze $\boxed{\begin{array}{ll} x'_e := x_e + \varepsilon & \text{für } e \in M_1, \\ x'_e := x_e - \varepsilon & \text{für } e \in M_2, \\ x'_e := x_e & \text{für } e \in E \setminus K. \end{array}}$

– Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.

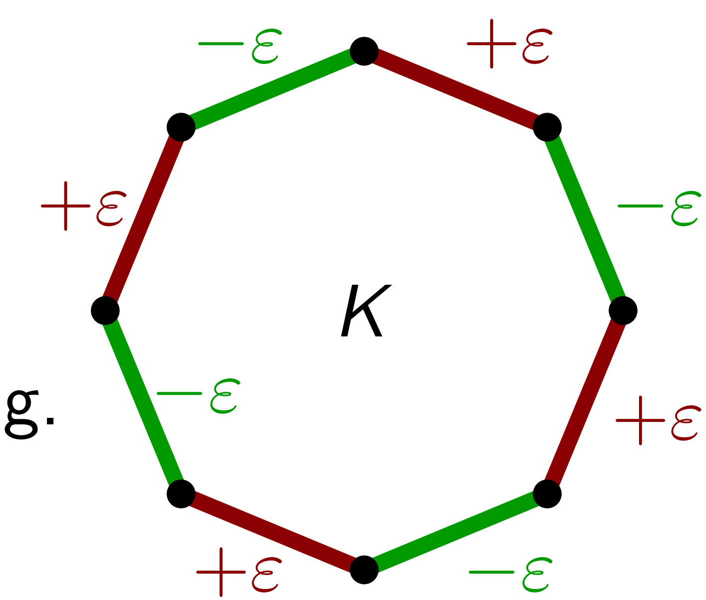


LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.
Wähle $\varepsilon := \min\{\, x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze
$$\boxed{\begin{array}{ll} x'_e := x_e + \varepsilon & \text{für } e \in M_1, \\ x'_e := x_e - \varepsilon & \text{für } e \in M_2, \\ x'_e := x_e & \text{für } e \in E \setminus K. \end{array}}$$



- Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.
- Kostenänderung:

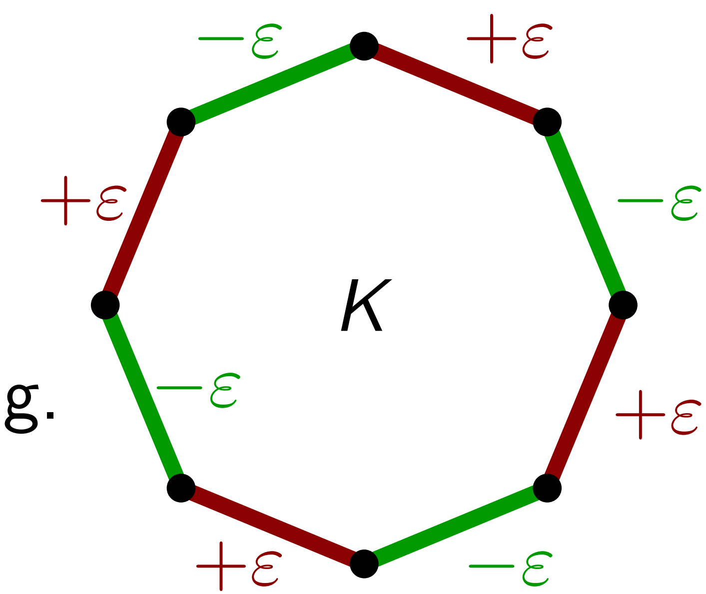
LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze $\boxed{\begin{array}{l} x'_e := x_e + \varepsilon \text{ für } e \in M_1, \\ x'_e := x_e - \varepsilon \text{ für } e \in M_2, \\ x'_e := x_e \quad\quad \text{für } e \in E \setminus K. \end{array}}$



– Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.

– Kostenänderung: $\varepsilon \cdot c(M_1)$

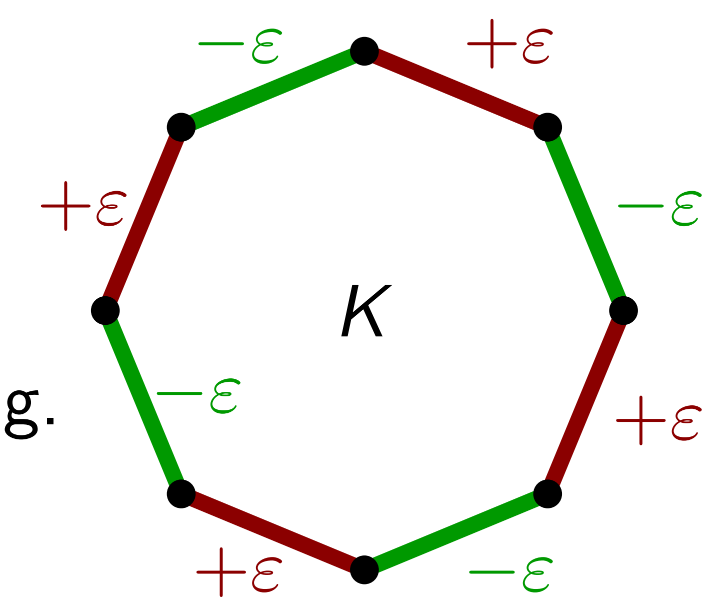
LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze $\boxed{\begin{array}{ll} x'_e := x_e + \varepsilon & \text{für } e \in M_1, \\ x'_e := x_e - \varepsilon & \text{für } e \in M_2, \\ x'_e := x_e & \text{für } e \in E \setminus K. \end{array}}$



- Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.
- Kostenänderung: $\varepsilon \cdot c(M_1) - \varepsilon \cdot c(M_2)$

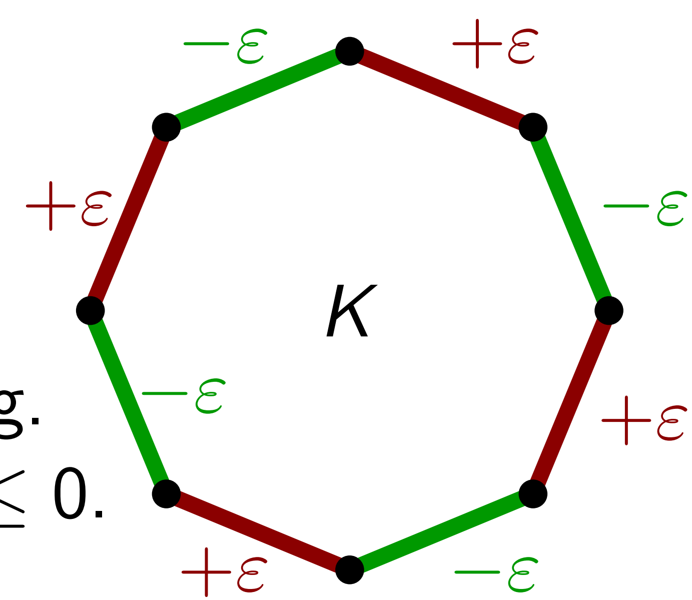
LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{\, x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze $\boxed{\begin{array}{ll} x'_e := x_e + \varepsilon & \text{für } e \in M_1, \\ x'_e := x_e - \varepsilon & \text{für } e \in M_2, \\ x'_e := x_e & \text{für } e \in E \setminus K. \end{array}}$



– Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.
– Kostenänderung: $\varepsilon \cdot c(M_1) - \varepsilon \cdot c(M_2) \leq 0$.

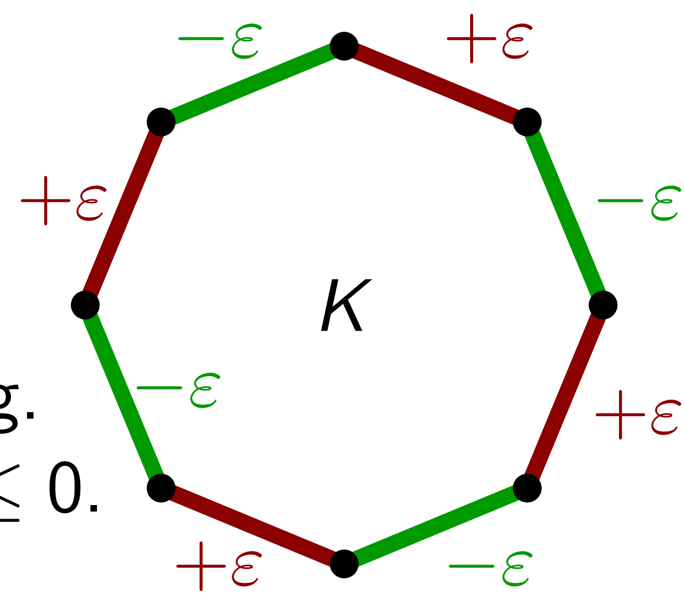
LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{\, x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze
$$\boxed{\begin{aligned} x'_e &:= x_e + \varepsilon \text{ für } e \in M_1, \\ x'_e &:= x_e - \varepsilon \text{ für } e \in M_2, \\ x'_e &:= x_e \quad\;\; \text{ für } e \in E \setminus K. \end{aligned}}$$



– Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.

– Kostenänderung: $\varepsilon \cdot c(M_1) - \varepsilon \cdot c(M_2) \leq 0$.

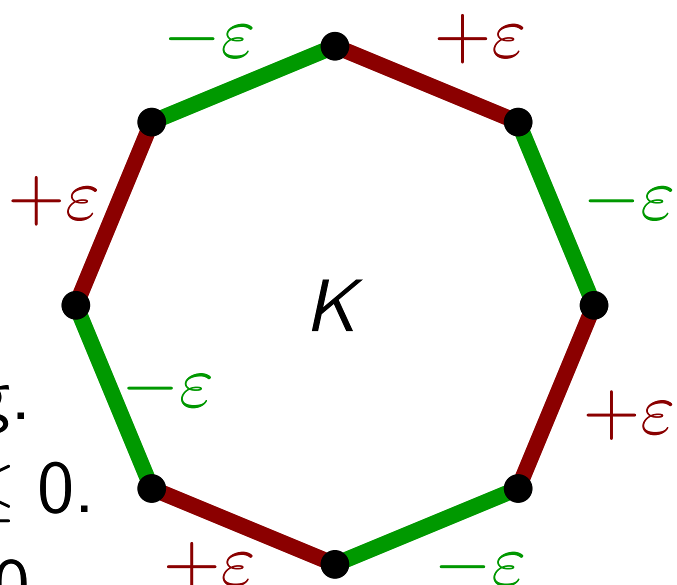
$\Rightarrow$ $\mathbf{x}'$ ist auch optimal

LP-Runden – Fortsetzung (I)

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.
Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2\}$.

Setze
$$\begin{array}{ll} x'_e := x_e + \varepsilon & \text{für } e \in M_1, \\ x'_e := x_e - \varepsilon & \text{für } e \in M_2, \\ x'_e := x_e & \text{für } e \in E \setminus K. \end{array}$$



– Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.
– Kostenänderung: $\varepsilon \cdot c(M_1) - \varepsilon \cdot c(M_2) \leq 0$.
– Für mind. eine Kante $e \in M_2$ gilt $x'_e = 0$.

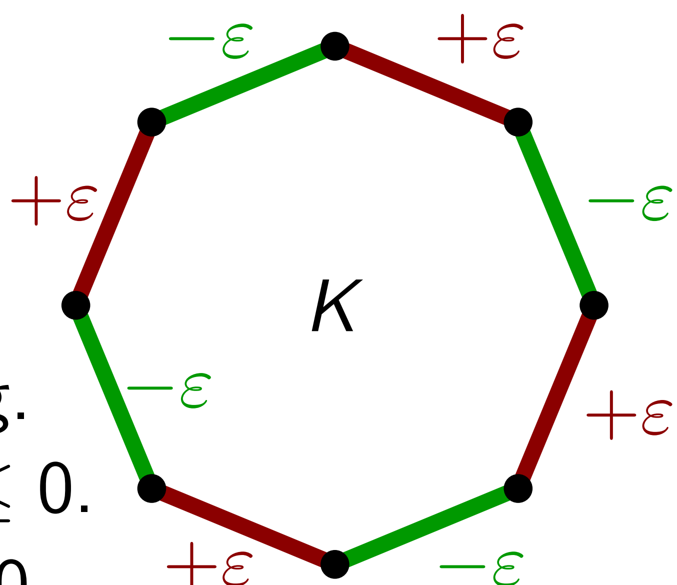
$\Rightarrow \mathbf{x}'$ ist auch optimal

LP-Runden – Fortsetzung (I)

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.



Setze $\boxed{\begin{array}{ll} x'_e := x_e + \varepsilon & \text{für } e \in M_1, \\ x'_e := x_e - \varepsilon & \text{für } e \in M_2, \\ x'_e := x_e & \text{für } e \in E \setminus K. \end{array}}$

- Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.
- Kostenänderung: $\varepsilon \cdot c(M_1) - \varepsilon \cdot c(M_2) \leq 0$.
- Für mind. eine Kante $e \in M_2$ gilt $x'_e = 0$.

$\Rightarrow \mathbf{x}'$ ist auch optimal und hat mehr integrale Variable als $\mathbf{x}$!!

LP-Runden – Fortsetzung (II)

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
 & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E
\end{array}
$$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

LP-Runden – Fortsetzung (II)

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
 & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E
\end{array}
$$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

Beob. – Integrale Kanten werden nicht weiter verändert.

LP-Runden – Fortsetzung (II)

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
& x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E
\end{array}
$$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

Beob. – Integrale Kanten werden nicht weiter verändert.
– Zielfunktion erhöht sich nicht.

LP-Runden – Fortsetzung (II)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

Beob. – Integrale Kanten werden nicht weiter verändert.
– Zielfunktion erhöht sich nicht.

$\Rightarrow$ Algorithmus terminiert nach ______ Iterationen mit ganzzahliger und optimaler (!) Lösung.

LP-Runden – Fortsetzung (II)

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
& x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E
\end{array}
$$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

Beob. – Integrale Kanten werden nicht weiter verändert.
– Zielfunktion erhöht sich nicht.

$\Rightarrow$ Algorithmus terminiert nach $\leq |E|$ Iterationen mit ganzzahliger und optimaler (!) Lösung.

LP-Runden – Fortsetzung (II)

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
 & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E
\end{array}
$$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

Beob. – Integrale Kanten werden nicht weiter verändert.
– Zielfunktion erhöht sich nicht.

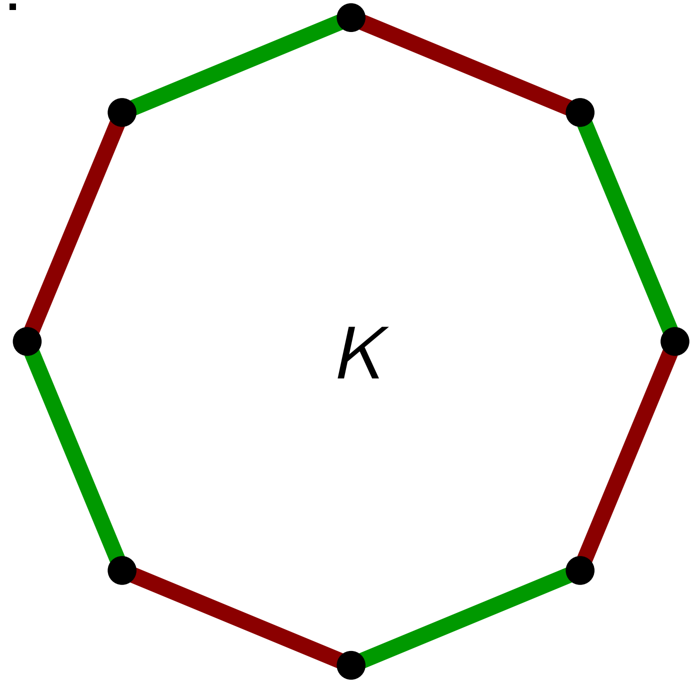
$\Rightarrow$ Algorithmus terminiert nach $\leq |E|$ Iterationen mit ganzzahliger und optimaler (!) Lösung.

Satz. In bipartiten Graphen kann man kostenminimale perfekte Matchings in Polynomialzeit ermitteln.

Extrempunkt-Lösungen (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.

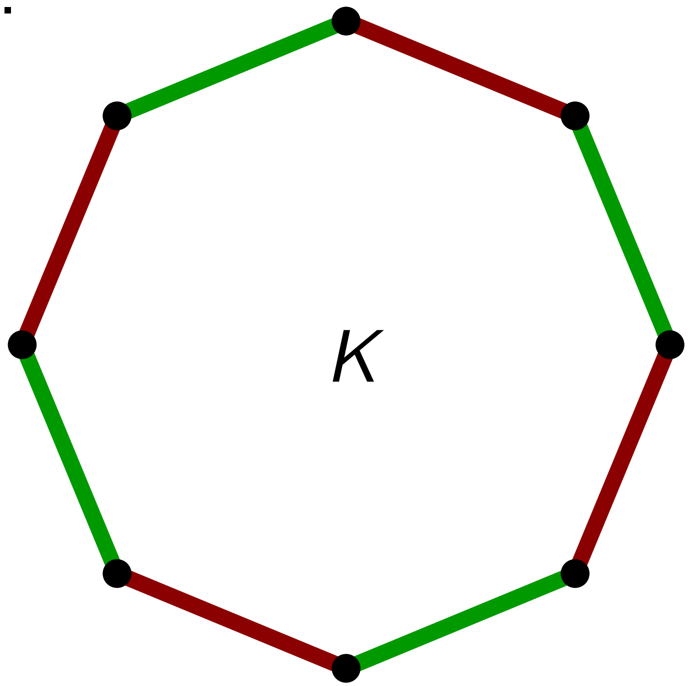


Extrempunkt-Lösungen (I)

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.

Wähle $\varepsilon := \min\{\, x_e \mid e \in K \,\}$.



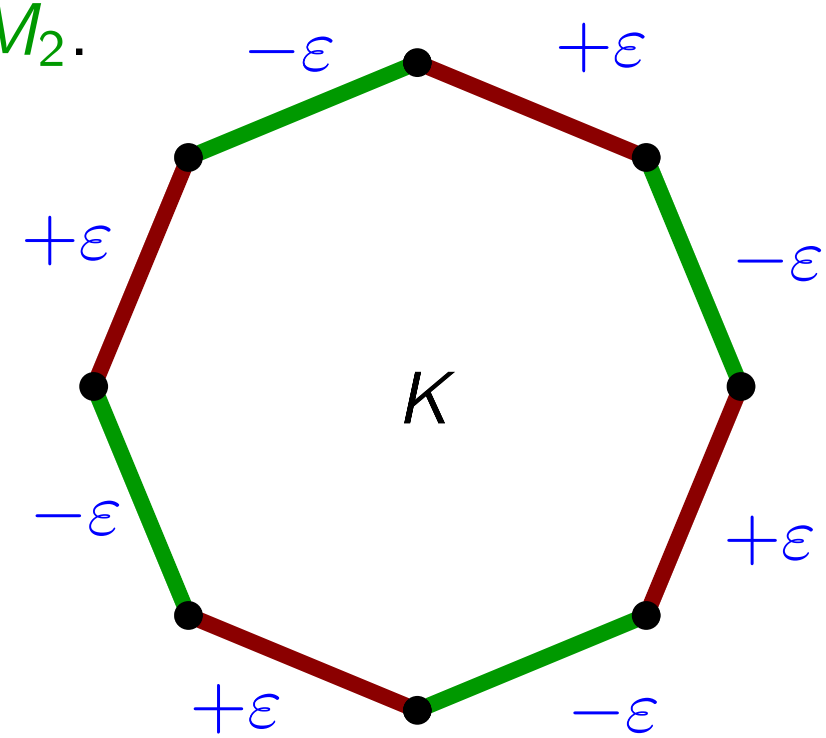
Extrempunkt-Lösungen (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in K \}$.

Setze
$$\begin{aligned} x'_e &:= x_e \boxed{+} \varepsilon \text{ für } x_e \in M_1, \\ x'_e &:= x_e \boxed{-} \varepsilon \text{ für } x_e \in M_2, \\ x'_e &:= x_e \quad \text{ für } e \in E \setminus K. \end{aligned}$$



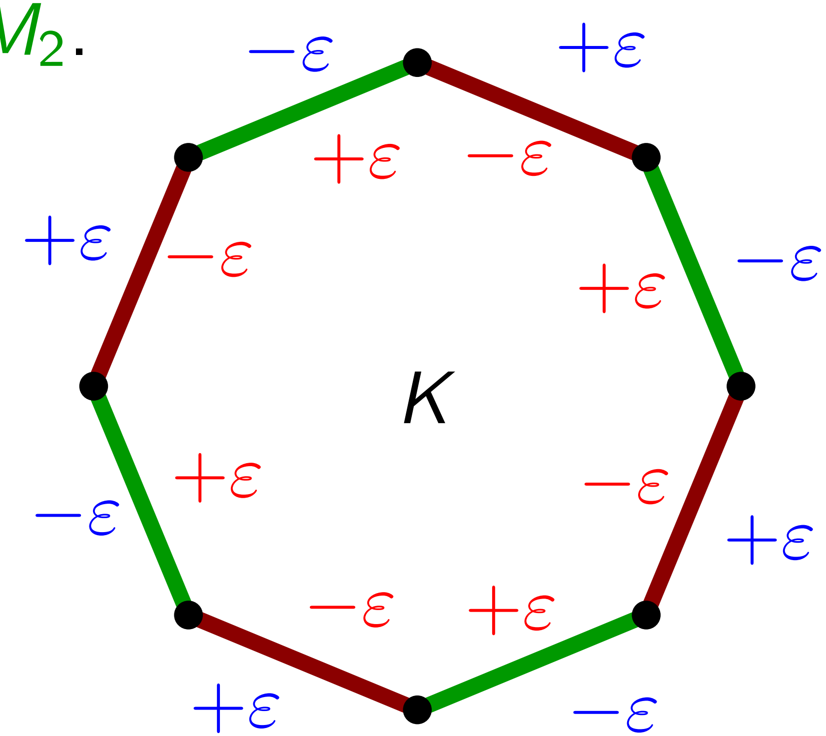
Extrempunkt-Lösungen (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.
Wähle $\varepsilon := \min\{\, x_e \mid e \in K \}$.

Setze
$$\begin{aligned} x'_e &:= x_e \boxed{+} \varepsilon && \text{für } x_e \in M_1, \\ x'_e &:= x_e \boxed{-} \varepsilon && \text{für } x_e \in M_2, \\ x'_e &:= x_e && \text{für } e \in E \setminus K. \end{aligned}$$

Setze
$$\begin{aligned} x''_e &:= x_e \boxed{-} \varepsilon && \text{für } x_e \in M_1, \\ x''_e &:= x_e \boxed{+} \varepsilon && \text{für } x_e \in M_2. \\ x''_e &:= x_e && \text{für } e \in E \setminus K. \end{aligned}$$



Extrempunkt-Lösungen (I)

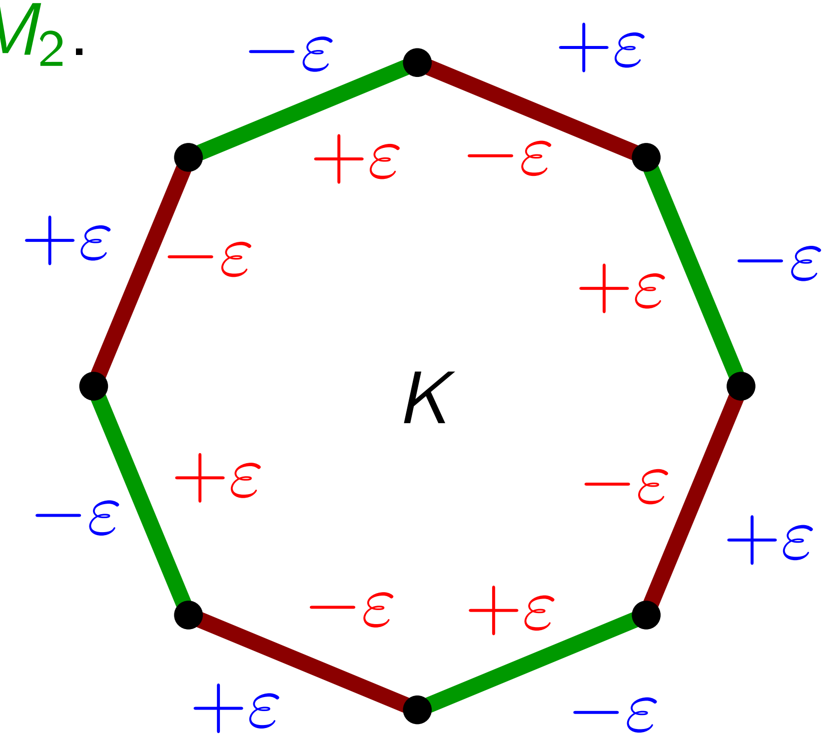
$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.

Wähle $\varepsilon := \min\{\, x_e \mid e \in K \,\}$.

Setze
$$\begin{array}{ll} x'_e := x_e \boxed{+} \varepsilon & \text{für } x_e \in M_1, \\ x'_e := x_e \boxed{-} \varepsilon & \text{für } x_e \in M_2, \\ x'_e := x_e & \text{für } e \in E \setminus K. \end{array}$$

Setze
$$\begin{array}{ll} x''_e := x_e \boxed{-} \varepsilon & \text{für } x_e \in M_1, \\ x''_e := x_e \boxed{+} \varepsilon & \text{für } x_e \in M_2. \\ x''_e := x_e & \text{für } e \in E \setminus K. \end{array}$$



Beob.: Lösungen $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ sind beide zulässig

Extrempunkt-Lösungen (I)

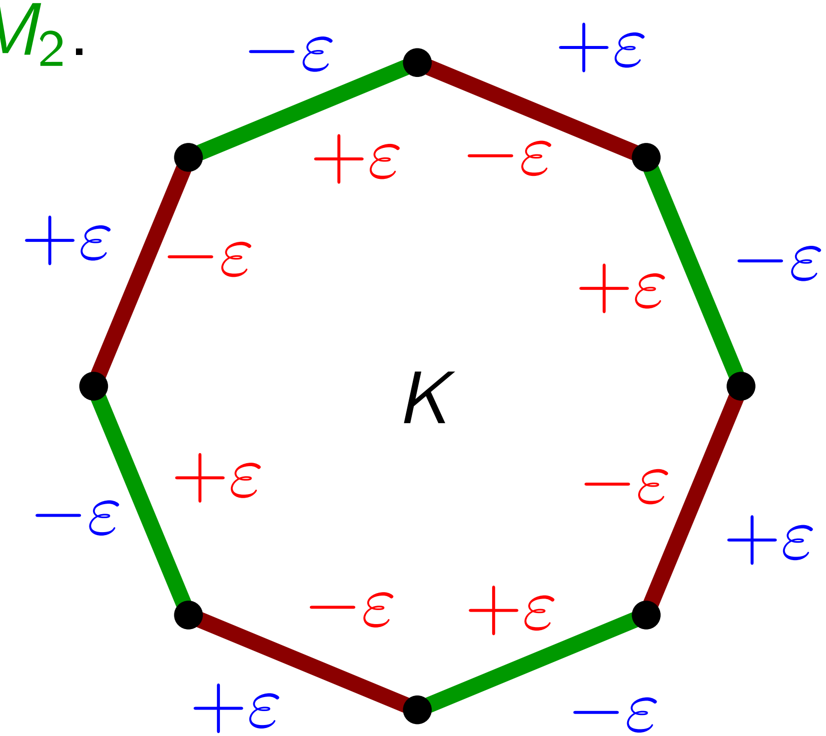
$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.

Wähle $\varepsilon := \min\{\, x_e \mid e \in K \}$.

Setze
$$\begin{array}{ll} x'_e := x_e \boxed{+} \varepsilon & \text{für } x_e \in M_1, \\ x'_e := x_e \boxed{-} \varepsilon & \text{für } x_e \in M_2, \\ x'_e := x_e & \text{für } e \in E \setminus K. \end{array}$$

Setze
$$\begin{array}{ll} x''_e := x_e \boxed{-} \varepsilon & \text{für } x_e \in M_1, \\ x''_e := x_e \boxed{+} \varepsilon & \text{für } x_e \in M_2. \\ x''_e := x_e & \text{für } e \in E \setminus K. \end{array}$$



Beob.: Lösungen $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ sind beide zulässig und $\mathbf{x} =$

Extrempunkt-Lösungen (I)

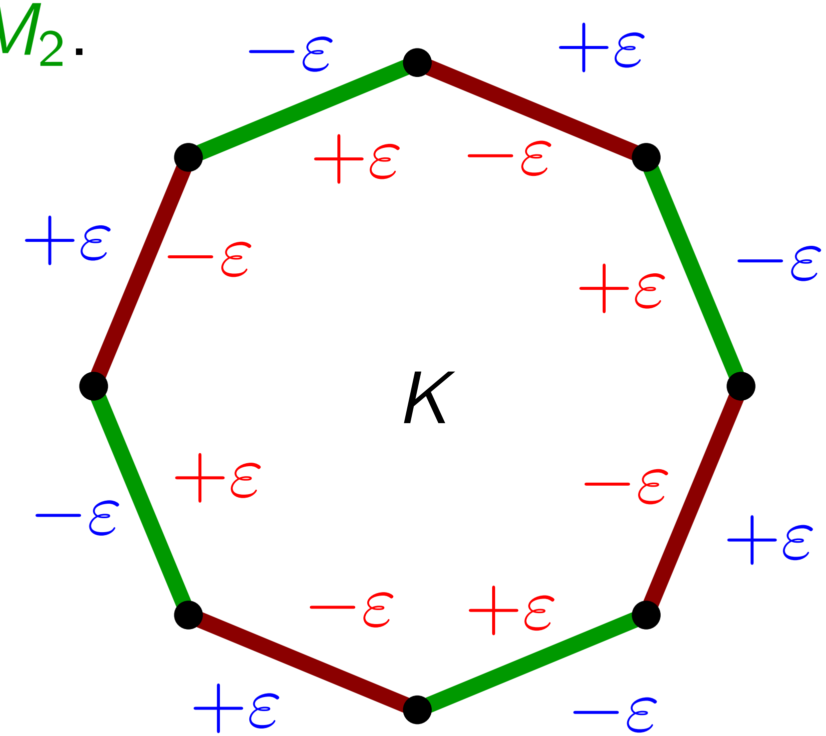
$$\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\
 & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E
\end{array}$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.

Wähle $\varepsilon := \min\{\, x_e \mid e \in K \}$.

Setze
$$\begin{array}{ll}
x'_e := x_e \boxed{+} \varepsilon & \text{für } x_e \in M_1, \\
x'_e := x_e \boxed{-} \varepsilon & \text{für } x_e \in M_2, \\
x'_e := x_e & \text{für } e \in E \setminus K.
\end{array}$$

Setze
$$\begin{array}{ll}
x''_e := x_e \boxed{-} \varepsilon & \text{für } x_e \in M_1, \\
x''_e := x_e \boxed{+} \varepsilon & \text{für } x_e \in M_2. \\
x''_e := x_e & \text{für } e \in E \setminus K.
\end{array}$$



Beob.: Lösungen $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ sind beide zulässig und $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'')$**!**

Extrempunkt-Lösungen (II)

Minimiere	$\displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \;\Rightarrow\; \mathbf{x}$ liegt

Extrempunkt-Lösungen (II)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \Rightarrow \mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Extrempunkt-Lösungen (II)

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}$$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \;\Rightarrow\; \mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

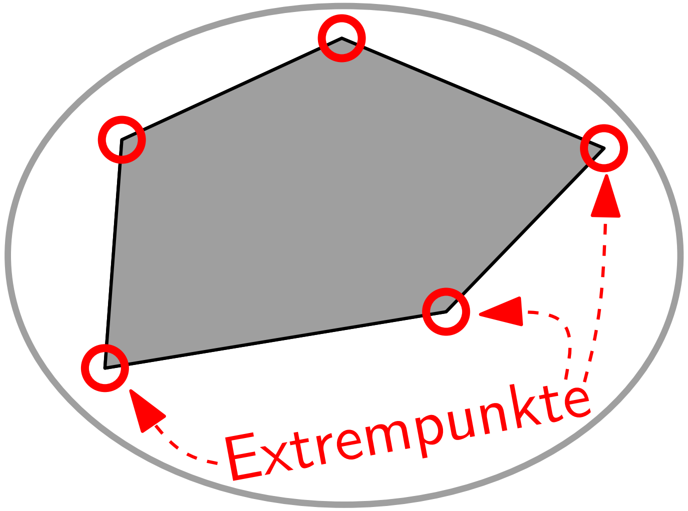
Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.

Extrempunkt-Lösungen (II)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \;\Rightarrow\; \mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.

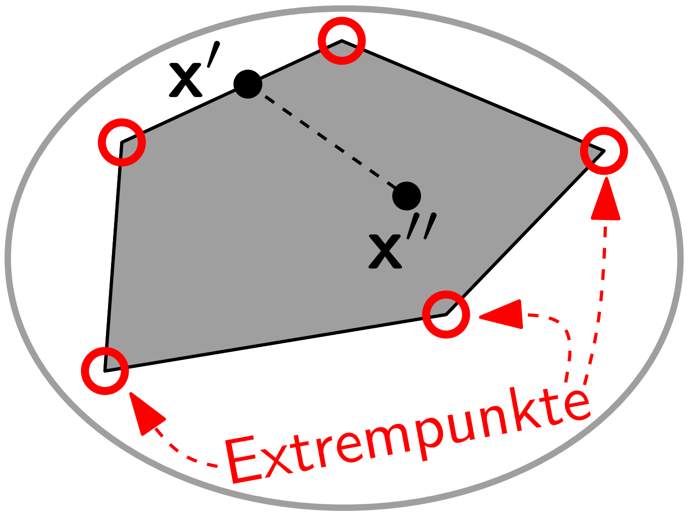


Extrempunkt-Lösungen (II)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \;\Rightarrow\; \mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.

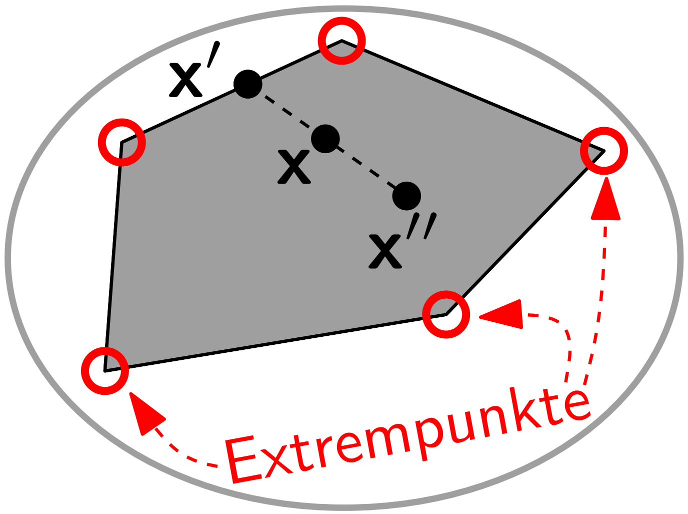


Extrempunkt-Lösungen (II)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \;\Rightarrow\; \mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.



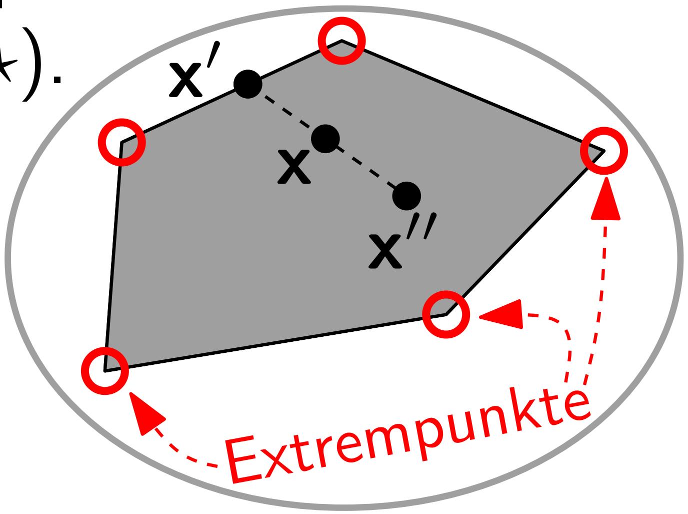
Extrempunkt-Lösungen (II)

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}\right\} (\star)$$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \Rightarrow \mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.

$\Rightarrow$ Die fraktionale Lösung $\mathbf{x}$ ist *kein* Extrempunkt des Lösungsraums (konvexes Polytop) von $(\star)$.



Extrempunkt-Lösungen (II)

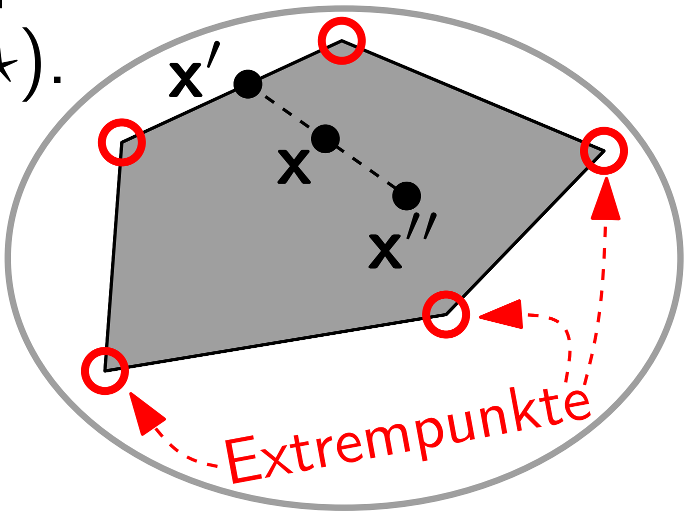
$$\left.\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv\in E} c_{uv}x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{uv\in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}\right\} (\star)$$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \;\Rightarrow\; \mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.

$\Rightarrow$ Die fraktionale Lösung $\mathbf{x}$ ist *kein* Extrempunkt des Lösungsraums (konvexes Polytop) von $(\star)$.

Satz. Polytop $(\star)$ für bipartite Matchings hat nur *ganzzahlige* Extrempunkte.



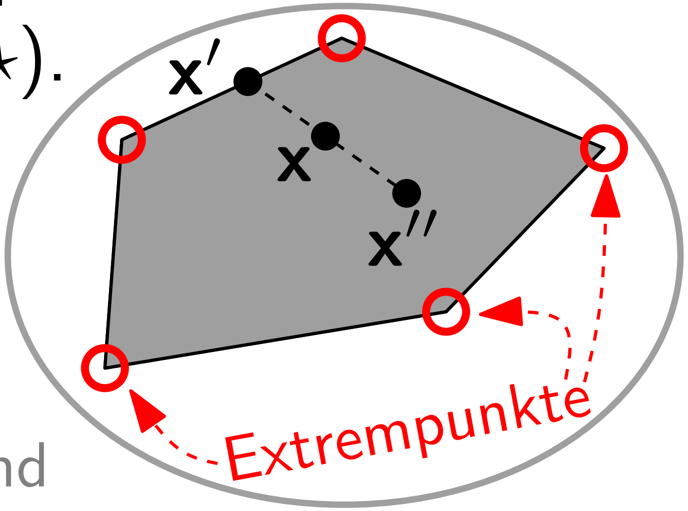
Extrempunkt-Lösungen (II)

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \sum\limits_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} & \\ \text{unter den Nebenbed.} & \sum\limits_{uv \in E} x_{uv} = 1 & \text{für } u \in A \cup B \\ & x_{uv} \geq 0 & \text{für } uv \in E \end{array}\right\} (\star)$$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \Rightarrow \mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.

$\Rightarrow$ Die fraktionale Lösung $\mathbf{x}$ ist *kein* Extrempunkt des Lösungsraums (konvexes Polytop) von $(\star)$.



Satz. Polytop $(\star)$ für bipartite Matchings hat nur *ganzzahlige* Extrempunkte.

Bem. Gängige LP-Algorithmen terminieren mit Extrempunkt-Lösungen (sofern existent) und erfordern für obiges ILP *kein* anschließendes LP-Runden!!