Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 27. Mai 2026

Prof. Dr. Alexander Wolff
Antonio Lauerbach, M. Sc.

6. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2026)

Aufgabe 1 – LP-Runden

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine *Knotenüberdeckung* ist eine Menge $V' \subseteq V$ von Knoten, sodass für jede Kante $e \in E$ mindestens einer der Endknoten in V' enthalten ist. Das Problem eine minimale Knotenüberdeckung (d. h. mit möglichst wenig Knoten) zu finden ist NP-schwer. Dieses Problem lässt sich wie folgt als ganzzahliges lineares Programm beschreiben:

$$\begin{array}{rll} \text{Minimiere} & \sum_{v \in V} x_v & \\ \text{Beschränkungen:} & x_u + x_v \geq 1 & \text{für jede Kante } \{u, v\} \in E \\ & x_v \in \{0, 1\} & \text{für jeden Knoten } v \in V \end{array}$$

Wir betrachten nun die zugehörige LP-Relaxierung, d. h. folgendes lineares Programm:

$$\begin{array}{rll} \text{Minimiere} & \sum_{v \in V} x_v & \\ \text{Beschränkungen:} & x_u + x_v \geq 1 & \text{für jede Kante } \{u, v\} \in E \\ & 0 \leq x_v \leq 1 & \text{für jeden Knoten } v \in V \end{array}$$

a) Wir betrachten eine optimale Lösung für die LP-Relaxierung. Seien dazu die Mengen $U = \left\{v \in V \mid 0 < x_v < \frac{1}{2}\right\}$ und $W = \left\{v \in V \mid \frac{1}{2} < x_v < 1\right\}$.

   Wir nehmen an, dass $|U| + |W| \geq 1$ und $|W| \geq |U|$ gilt. Zeigen Sie, wie sich in linearer Zeit eine neue optimale Lösung finden lässt, so dass $|U| + |W|$ kleiner wird.
   4 Punkte

   Hinweis: Suchen sie ein geeignetes $\varepsilon > 0$ und ändern sie manche Werte um ε.

   Für den Fall, dass $|U| + |W| \geq 1$ und $|W| < |U|$ ist, lässt sich ebenfalls eine solche Transformation finden; das müssen Sie hier aber nicht tun.

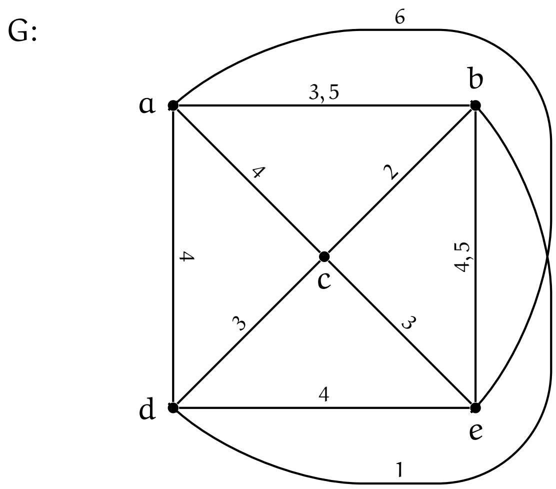
b) Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus, der eine optimale Lösung für die LP-Relaxierung findet, in der als Variablenwerte nur 0, $\frac{1}{2}$ und 1 vorkommen. Zeigen Sie, dass Ihr Algorithmus korrekt ist und schätzen Sie seine Laufzeit scharf ab.
   3 Punkte

c) Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus, der eine 2-Approximation für eine minimale Knotenüberdeckung liefert. **2 Punkte**

   Hinweis: Runden Sie geschickt.

Aufgabe 2 – Christofides' Algorithmus

Gegeben sei folgender vollständiger und ungerichteter Graph G mit Kantenkosten, sodass G metrisch ist.



a) Wenden Sie den Algorithmus von Christofides auf G an, um eine Lösung für das Problem des Handlungsreisenden (TSP) zu finden. Geben Sie bei allen Schritten des Algorithmus genau und nachvollziehbar an, was getan wird. Wie lange ist Ihre gefundene TSP-Tour? **4 Punkte**

b) Christofides' Algorithmus liefert nicht immer eine optimale Lösung, allerdings eine gültige Lösung, die höchstens 3/2 Mal die Länge einer optimalen TSP-Tour hat. Geben Sie für G eine TSP-Tour an, die kürzer ist als die von Ihnen gefundene und nicht mit dem Algorithmus von Christofides gefunden werden kann. **1 Punkt**

Aufgabe 3 – Matchings in allgemeinen Graphen

Das Problem MAXIMUM MATCHING (d. h. größte Paarung) in ungerichteten Graphen ist zwar nicht NP-schwer, dennoch ist der Algorithmus mit der besten Worst-Case-Laufzeit für dieses Problem, nämlich $O(E\sqrt{V})$ [Micali und Vazirani, FOCS'80], so kompliziert, dass es kaum Implementierungen gibt. Stattdessen benutzt man einfachere, aber langsamere Algorithmen – oder schnelle Approximationsalgorithmen. Für das Problem MAXIMUM MATCHING könnte man einen Greedy-Algorithmus nutzen, der beginnend mit einem leeren Matching M in jedem Schritt eine Kante $e \notin M$ zu M hinzufügt, so dass $M \cup \{e\}$ wieder ein Matching ist. Der Algorithmus bricht ab, wenn es keine solche Kante mehr gibt.

a) Geben Sie den Greedy-Algorithmus in Pseudocode an. Zeigen Sie, dass er für jeden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ in $O(V + E)$ Zeit ein nicht-erweiterbares Matching liefert. **3 Punkte**

b) Zeigen Sie, dass der Greedy-Algorithmus aus Teilaufgabe a) eine 1/2-Approximation für ein größtes Matching liefert. **3 Punkte**

c) Zeigen Sie, dass die Abschätzung aus Teilaufgabe b) scharf ist, indem Sie eine unendliche Familie von Graphen angeben, in denen ein größtes Matching existiert, das genau doppelt so viele Kanten besitzt wie ein nicht-erweiterbares Matching.
2 Zusatzpunkte

Betrachten Sie nun das Problem MINIMUM MAXIMAL MATCHING, das in einem ungerichteten Graphen ein nicht-erweiterbares Matching kleinster Kardinalität sucht.

d) Formulieren Sie für dieses Problem ein ganzzahliges lineares Programm.
3 Zusatzpunkte

e) Zeigen Sie, dass der Greedy-Algorithmus aus Teilaufgabe a) auch eine 2-Approximation für ein kleinstes nicht-erweiterbares Matching liefert. **2 Zusatzpunkte**

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Dienstag, 2. Juni 2026, 13:00 Uhr** einmal pro Gruppe über WueCampus als PDF-Datei ab. Geben Sie stets die Namen aller an, die das Übungsblatt bearbeitet haben (max. 2).

Begründen Sie Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.