

Probeklausur zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommersemester 2026)

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise!

1. **Personalien:** Bitte tragen Sie Ihre Daten **auf jedem Blatt** gut lesbar ein.

Nachname	
Vorname	
Matrikelnummer	

2. **Papier:** Tragen Sie Ihre Lösungen direkt unterhalb der Aufgaben ein. Verwenden Sie kein eigenes Papier. Sollten Sie **zusätzliches Papier** benötigen, wenden Sie sich an die Klausuraufsicht. Falls Sie dieses Blatt für Ihre Lösung nutzen, weisen Sie bitte bei der entsprechenden Aufgabe deutlich darauf hin.
3. Sie dürfen ein einseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt mit Notizen verwenden. **Weitere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.**
4. Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift oder einem roten Stift.
5. Die Bearbeitungszeit beträgt 100 Minuten. Es können 90 Punkte und darüber hinaus 10 **Zusatzpunkte (ZP)** erreicht werden.

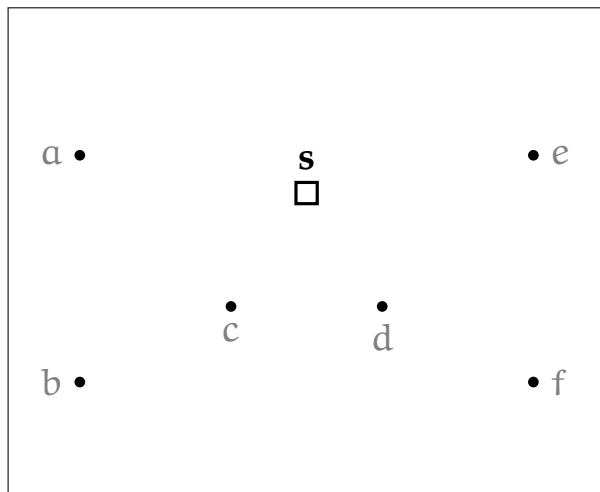
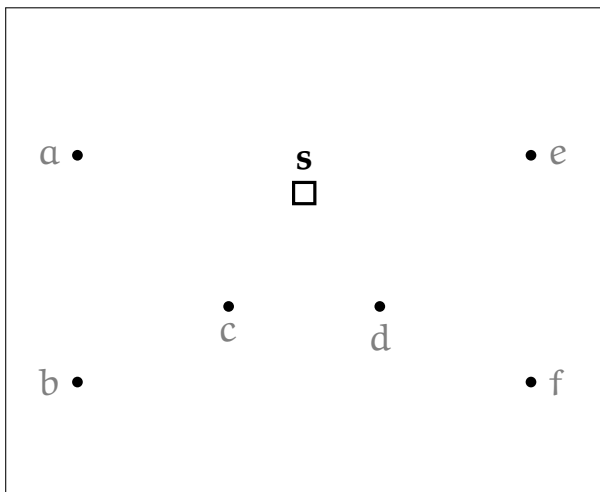
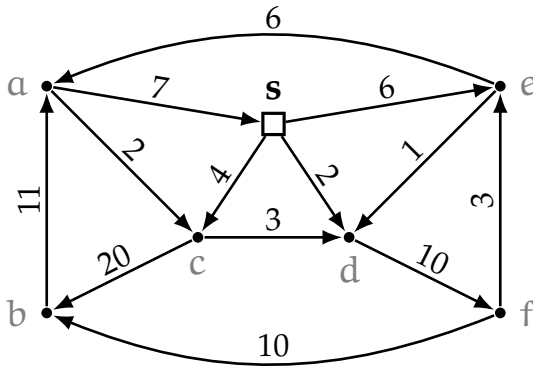
Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	12	21 (+ 3)	14	18	10 (+ 7)	15	90 (+ 10)
Ergebnis							

Aufgabe 1 — Wurzelspannbäume

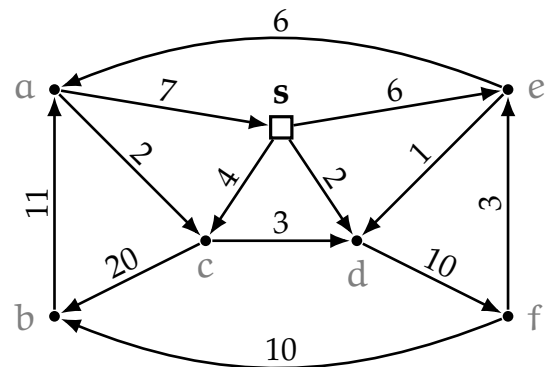
/ 12 P.

Gegeben sei der gerichtete Graph G mit Kantenkosten c und ausgezeichnetem Knoten s . Wenden Sie hierauf den Algorithmus von Edmonds zum Finden eines minimalen s -Wurzelspannbaums an. Geben Sie jeden Schritt des Algorithmus nachvollziehbar an.



Zeichnen Sie den minimalen s -Wurzelspannbaum rechts ein.

Dieser hat Kosten _____.



Aufgabe 2 — Verständnisfragen

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

- (a) Für jeden maximalen s - t -Fluss f und minimalen s - t -Schnitt (S, T) gilt, dass

/ 5 P.

$$\text{Abfluss}_f(T) = 0$$

☐ Wahr ☐ Falsch

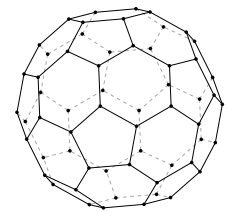
Begründung:

- (b) Das Skelett des Ikosaederstumpfs (auch bekannt als Fußball) ist planar.

/ 2 P.

☐ Wahr ☐ Falsch

Begründung:



- (c) Wenn ein Kreis ein perfektes Matching enthält, so ist dieses nicht eindeutig.

/ 4 P.

☐ Wahr ☐ Falsch

Begründung:

(d) Jeder planare chordale Graph ist 3-färbbar.

/ 2 P.

☐ Wahr ☐ Falsch

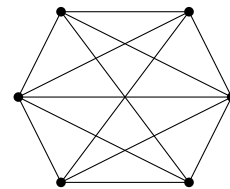
Begründung:

(e) Folgender Graph ist chordal:

/ 4 P.

☐ Wahr ☐ Falsch

Begründung:

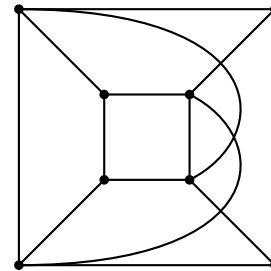


(f) Folgender Graph ist planar:

/ 4 P.

☐ Wahr ☐ Falsch

Begründung:



(g) Es gibt einen Graphen G mit 5 Kanten und $\chi(G) = 4$.

/ 3 ZP.

☐ Wahr ☐ Falsch

Begründung:

Aufgabe 3 — Kursbelegung

Sie sind dafür verantwortlich die Kursbelegung zu planen. Jeder Student hat eine Liste an Kursen, die er belegen möchte, und jeder Kurs hat eine maximale Anzahl an Teilnehmern. Ihr Ziel ist es, die Anzahl an Belegungen zu maximieren, wobei ein Student mehrere Kurse belegen darf.

- (a) Modellieren Sie das Problem als Flussproblem.

/ 7 P.

(b) Modellieren Sie das Problem als ILP.

/ 4 P.

(c) Ein Student kann für einen Kurs eine Präferenz in Form einer Zahl angeben, die angibt, wie gerne er diesen Kurs belegen möchte (je größer die Zahl, desto eher möchte er den Kurs belegen). Wie können Sie Ihr ILP aus Teilaufgabe (b) anpassen, um die Gesamtpräferenz der Belegungen zu maximieren? Außerdem soll sichergestellt werden, dass jeder Student mindestens einen Kurs belegt.

/ 3 P.

Aufgabe 4 — Unabhängige Knotenüberdeckungen

- (a) Wir betrachten das Problem eine größte unabhängige Knotenüberdeckung zu finden. Formulieren Sie dieses Problem als ILP.

/ 4 P.

- (b) Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder Graph hat eine unabhängige Knotenüberdeckung.

/ 3 P.

- (c) Beweisen oder widerlegen Sie: Sei C eine Knotenüberdeckung eines Graphen G . Dann ist $V(G) \setminus C$ eine unabhängige Menge in G .

/ 3 P.

- (d) Sei $G = (A \cup B, E)$ ein zusammenhängender bipartiter Graph mit $A, B \neq \emptyset$. Dann hat G genau zwei unabhängige Knotenüberdeckungen.

/ 4 P.

- (e) Entwickeln Sie einen Algorithmus, der eine größte unabhängige Knotenüberdeckung in Linearzeit findet. Begründen Sie Korrektheit und Laufzeit Ihres Algorithmus.

/ 4 P.

Aufgabe 5 — Längste Wege

Wir betrachten nun das Problem in einem Graphen G mit Knoten s und t zu entscheiden, ob es einen einfachen s - t -Weg bestehend aus k Knoten (inkl. s und t) gibt.

- (a) Betrachten Sie folgende Variante des Problems: Gegeben ist eine nicht notwendigerweise gültige k -Färbung c der Knoten (d.h. benachbarte Knoten können dieselbe Farbe haben). Wir wollen nun entscheiden, ob ein einfacher s - t -Weg der jede der k Farben genau einmal enthält existiert. Entwickeln Sie ein dynamisches Programm um dieses Problem in FPT-Zeit bezüglich k zu lösen.

/ 7 ZP.

Nutzen Sie dabei folgende Tabelle: Für jeden Knoten v und Teilmenge an Farben $C \subseteq \{1, \dots, k\}$ soll der Eintrag $T[v, C]$ angeben, ob es einen einfachen Weg von s nach v gibt, der jede Farbe aus C genau einmal enthält.

- (b) Gegeben sei ein Pfad bestehend aus k Knoten und eine zufällige (nicht notwendigerweise gültige) k -Färbung der Knoten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält jeder Knoten des Pfades eine andere Farbe? Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von k an. Berechnen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit für $k = 2$.

/ 4 P.

- (c) Entwickeln Sie einen randomisierten Algorithmus der mit Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{1}{2}$ korrekt entscheidet, ob es einen einfachen s - t -Pfad der Länge k gibt. Die Laufzeit soll dabei FPT bezüglich k sein.

/ 6 P.

Aufgabe 6 — Blockgraphen

Ein Blockgraph ist ein Graph in dem jede Zweifachzusammenhangskomponente eine Clique ist.

- (a) Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder Blockgraph in dem jede Zweifachzusammenhangskomponente eine ungerade Anzahl Knoten enthält ist eulersch.

/ 4 P.

- (b) Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder Blockgraph ist planar.

/ 3 P.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder Blockgraph ist perfekt.

/ 4 P.

(d) Entwickeln Sie einen Algorithmus der in Linearzeit bestimmt, ob ein gegebener Blockgraph hamiltonsch ist. Begründen Sie Korrektheit und Laufzeit Ihres Algorithmus.

/ 4 P.