Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 20. Mai 2026

Prof. Dr. Alexander Wolff
Antonio Lauerbach, M. Sc.

5. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2026)

Aufgabe 1 – Paarungen (Matchings) in Bäumen

a) Beweisen oder widerlegen Sie: Besitzt ein Baum eine perfekte Paarung, so ist diese eindeutig. **3 Punkte**

Hinweis: Betrachten Sie die Blätter des Baumes, d. h. die Knoten $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$, und ihre jeweils (einzige) inzidente Kante.

b) Wie viele andere Probleme ist auch das Problem eine größte Paarung zu finden in Bäumen einfacher als in allgemeinen Graphen.

Geben Sie einen effizienten Algorithmus in Pseudocode an, der einen Baum $T = (V, E)$ entgegennimmt und für diesen eine größte (nicht notwendigerweise perfekte) Paarung berechnet. Zeigen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus und schätzen Sie die asymptotische Laufzeit möglichst genau ab. **5 Punkte**

Hinweis: Betrachten Sie wie in Teilaufgabe a) die Blätter des Baumes.

c) Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus, der auf einem Baum mit Kantengewichten eine gewichtsmaximale (nicht notwendigerweise perfekte) Paarung findet. Zeigen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus und schätzen Sie die asymptotische Laufzeit möglichst genau ab. **5 Punkte**

Hinweis: Das lässt sich mit dynamischer Programmierung umsetzen. Wurzeln Sie den Baum und betrachten Sie die Fälle, dass ein Knoten in der Paarung enthalten ist und dass er nicht enthalten ist. Sie müssen keinen Pseudocode angeben.

Aufgabe 2 – Hamiltonkreise

Ein sogenannter *Turniergraph*[1] $G = (V, E)$ ist ein gerichteter Graph mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $|V| \geq 3$, der für jedes Paar $v_i \neq v_j$ von Knoten entweder die gerichtete Kante (v_i, v_j) oder die umgekehrt gerichtete Kante (v_j, v_i) besitzt. Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *stark zusammenhängend*, wenn es für jedes Paar $(v, w) \in V \times V$ einen gerichteten Weg von v nach w in G gibt.

Gegeben sei nun ein stark zusammenhängender Turniergraph $G = (V, E)$. Zeigen Sie, dass G einen Hamiltonkreis besitzt. Gehen Sie dazu nach den folgenden Schritten vor. Alle Kreise in dieser Aufgabe sind einfach, d. h. kein Knoten liegt mehrfach in einem Kreis.

a) Zeigen Sie: jeder Knoten $v \in V$ liegt auf einem Kreis der Länge ≥ 3. **1 Punkt**

   Hinweis: Wählen Sie eine Kante und nutzen Sie den starken Zusammenhang von G.

b) Zeigen Sie: jeder Knoten $v \in V$ liegt auf einem Kreis der Länge $= 3$. **2 Punkte**

   Hinweis: Wählen Sie einen nach a) existierenden Kreis und machen Sie diesen schrittweise kürzer.

c) Betrachten Sie einen Kreis C in G. Sei $V(C)$ die Menge der Knoten in C. Nehmen Sie an, dass C maximal ist, aber kein Hamiltonkreis, d.h. es gibt in G keinen längeren Kreis als C, aber $V(C) \neq V$.

   Zeigen Sie: Für einen Knoten $v \notin V(C)$ und einen Knoten $w \in V(C)$ gilt, dass wenn $(w, v) \in E$, so ist auch $(w', v) \in E$ für den Nachfolger w' von w auf dem Kreis C. **1 Punkt**

d) Folgern Sie aus c), dass für jedes beliebige $v \in V \setminus V(C)$ gilt: (i) Entweder gilt für alle Knoten $w \in V(C)$, dass $(w, v) \in E$, oder (ii) für alle Knoten $w \in V(C)$ gilt, dass $(v, w) \in E$. **1 Punkt**

e) Sei nun V_1 die Menge aller Knoten $v \in V \setminus V(C)$, für die Bedingung (i) gilt, und V_2 die Menge aller Knoten $v \in V \setminus V(C)$, für die Bedingung (ii) gilt.

   Zeigen Sie: Ist $V(C) \neq V$, so sind weder V_1 noch V_2 leer. **1 Punkt**

   Hinweis: Verwenden Sie, dass G stark zusammenhängend ist.

f) Führen Sie nun mit Hilfe der Mengen V_1 und V_2 die Maximalität von C im Fall $V(C) \neq V$ zum Widerspruch. Damit haben Sie gezeigt, dass G einen Hamiltonkreis besitzt. **1 Punkt**

   Hinweis: Versuchen Sie den Kreis mit Hilfe einer geeignete Kanten zwischen Knoten aus V_1 und V_2 zu verlängern.

[1] Der Turniergraph heißt so, weil man sich den Graphen als das Ergebnis eines Turniers, z. B. eines Fußballturniers vorstellen kann: Die Mannschaften sind die Knoten. Jede Mannschaft hat einmal gegen jede andere Mannschaft gespielt und die Kantenrichtung zwischen den beiden zeigt den Gewinner dieses Spiels an (es gibt kein Unentschieden).

Aufgabe 3 – Perfekte Matchings in bipartiten Graphen

Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (A \dot{\cup} B, E)$, wobei $|A| = |B| = k$. Außerdem sei der Grad jedes Knotens in G mindestens $k/2$. Zeigen oder widerlegen Sie: G enthält ein perfektes Matching **5 Zusatzpunkte**

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Dienstag, 26. Mai 2026, 13:00 Uhr** einmal pro Gruppe über WueCampus als PDF-Datei ab. Geben Sie stets die Namen aller an, die das Übungsblatt bearbeitet haben (max. 2).

Begründen Sie Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.