Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 2. Februar 2026

Prof. Dr. Alexander Wolff

4. Präsenzübungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2025/26)

Aufgabe 1 – Funktionen Ordnen

Ordnen Sie die unten gelisteten Funktionen nach ihrem asymptotischen Wachstum. Eine Begründung Ihrer Ordnung ist nicht gefordert.

1. n^2
2. $\log_2(n)$
3. $\sqrt{n \log_2(n)}$
4. 1.01^n
5. $n^{\log_3 4}$
6. $\log_2(n \cdot 2^n)$
7. $4^{\log_3(n)}$
8. $n!$

Aufgabe 2 – O-Notation

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen. Arbeiten Sie mit der Definition aus der Vorlesung, nicht mit Grenzwertbetrachtungen.

a) Für $f\colon n \mapsto \log_2(n^2)$ gilt $f \in \Theta(\log_{10} n)$.

b) Für $f\colon n \mapsto 2^{n+1}$ gilt $f \in O(2^n)$.

Aufgabe 3 – Schlangen

Gegeben sei eine Schlange entsprechend der Definition in der Vorlesung.

a) Erweitern Sie die Datenstruktur um eine Methode *int* Rank(*key* k), die bestimmt, nach wie vielen Aufrufen der Methode Dequeue das gesuchte Element ausgegeben würde, ohne die Schlange dabei zu verändern. Schreiben Sie kommentierten Pseudocode mit Laufzeit $O(n)$.

b) Wieso ist es nicht möglich die Schlange mit $o(n)$ zusätzlichem Speicher so zu augmentieren, dass Rank-Anfragen in $o(n)$ Zeit beantwortet werden können?

c) Augmentieren Sie die ursprüngliche Schlange mit $O(n)$ zusätzlichem Speicher so, dass die Anfragen in $O(1)$ Zeit beantwortet werden können, ohne die Laufzeit anderer Methoden zu beeinflussen. Sie dürfen dafür annehmen, dass eine injektive Abbildung von *key* nach $\{1, 2, \ldots, O(n)\}$ existiert.

Aufgabe 4 – Nachbartupel

Im Folgenden sei das Feld A eine zufällige Permutation von $\langle 1, \ldots, n\rangle$, wobei n gerade sei.

Ein Tupel (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ heißt *passend*, wenn $A[i] + A[j] = n + 1$ gilt. Ein Tupel (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ und $j = i + 1$ heißt *benachbart*.

Geben Sie im Folgenden stets die einzelnen Rechenschritte an und vereinfachen Sie das Endergebnis so weit wie möglich.

a) Bestimmen Sie, unter der Voraussetzung $1 \leq x < y \leq n$, die Wahrscheinlichkeit, dass das Tupel (x, y) benachbart ist.

Verwenden Sie im Folgenden Zufallsvariablen und Indikator-Zufallsvariablen.

b) Was ist der Erwartungswert für die Anzahl passender Tupel, die benachbart sind?

c) Was ist der Erwartungswert für die Anzahl passender Tupel?

d) Was ist der Erwartungswert für die Anzahl passender Tupel (i, j) mit der Eigenschaft, dass $A[i] \leq i$?

Diese Aufgaben werden eventuell gemeinsam in den Übungen am 3. und 4. Februar 2026 gelöst. Sie brauchen Sie nicht vorher zu lösen und auch nicht abzugeben.