

7. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2025/26)

Aufgabe 1 – Bäume transformieren

Als ADS-Hörer:in stellen Sie sich zu Hause natürlich nicht irgendeine Zimmerpflanze auf, sondern einen binären Suchbaum. Ihr Suchbaum heißt B_1 und hat n Knoten. Ihr:e Übungspartner:in hat auch einen binären Suchbaum, der B_2 genannt wird und zufälligerweise genau dieselben Schlüssel wie Ihr Suchbaum enthält. Er sieht aber schöner aus. Deshalb möchten Sie Ihren Suchbaum so transformieren, dass er am Ende wie B_2 aussieht.

Zeigen Sie hierzu, dass Sie stets in der Lage sind, B_1 durch $O(n)$ Rotationen in B_2 zu transformieren, egal wie die beiden binären Suchbäume konkret aussehen.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $n - 1$ Rotationen ausreichen, um einen beliebigen Suchbaum in einen Suchbaum zu transformieren, in dem kein Knoten ein linkes Kind hat.

4 Punkte

Aufgabe 2 – Höhe von Rot-Schwarz-Bäumen

Im Folgenden beziehen sich die Anzahl der Knoten und die Höhe eines Rot-Schwarz-Baums auf den Baum *ohne* die nil-Blätter.

Stellen Sie sicher, dass rote und schwarze Knoten klar voneinander unterscheidbar sind. Sie brauchen die nil-Blätter nicht zu zeichnen.

- a) Zeichnen Sie einen gültigen Rot-Schwarz-Baum der Höhe 3, bei dem die Anzahl der Knoten minimal ist. **2 Punkte**
- b) Zeichnen Sie einen binären Suchbaum der Höhe 3, für den es keine Färbung gibt, welche die Eigenschaften eines Rot-Schwarz-Baums erfüllt. Dieser Suchbaum soll die maximale Anzahl von Knoten enthalten. **2 Punkte**

Aufgabe 3 – Listen-Augmentierung

Die Datenstruktur *doppelt verkettete Liste* soll um eine Methode *Invert* erweitert werden, nach deren Ausführung sich die Methoden der Liste so verhalten, als ob die Listenelemente in umgekehrter Reihenfolge in der Liste stehen würden, beispielsweise durchsucht *Search* die Liste nun von hinten nach vorne. Nach erneutem Aufruf von *Invert* soll die Reihenfolge wieder umgekehrt werden.

Beispiel: Gegeben sei die Liste $A = \langle 1, 2, 3 \rangle$. Führt man die Operation $A.\text{Insert}(4)$ aus, so ergibt sich die Liste $\langle 4, 1, 2, 3 \rangle$. Nachdem man nun nacheinander die Operationen $A.\text{Invert}$, $A.\text{Insert}(5)$, $A.\text{Invert}$ ausgeführt hat, ergibt sich die Liste $\langle 4, 1, 2, 3, 5 \rangle$.

Skizzieren Sie in Worten, wie man die aus der Vorlesung bekannte Liste augmentieren kann, so dass *Invert* nur $O(1)$ Zeit benötigt und sich die asymptotische Worst-Case-Laufzeiten von *Search*, *Insert* und *Delete* nicht ändern. Erklären Sie, wie Sie *Invert* implementieren und wie Sie die genannten Operationen der Liste anpassen um die Anforderungen zu erfüllen. **5 Punkte**

Aufgabe 4 – Rot-Schwarz-Baum augmentieren

Ein Rot-Schwarz-Baum zur Verwaltung einer dynamischen Menge verschiedener ganzer Zahlen soll so augmentiert werden, dass man zu jeder Zeit bestimmen kann, für welche zwei Zahlen i, j der Menge mit $i < j$ die Differenz $j - i$ am kleinsten ist.

- a) Geben Sie die Methode *MinGap* in Pseudocode an, die das gesuchte Zahlenpaar in konstanter Zeit liefern soll.

Benennen Sie die Extrainformation, die dafür zu speichern ist, und geben Sie an, wie Sie diese in den Methoden *Insert*, *Delete* und *Search* aufrechterhalten können, ohne deren asymptotische Worst-Case-Laufzeiten zu verschlechtern. **4 Punkte**

- b) Können Sie das Problem auch mit konstantem Speicher für Extrainformation lösen, wenn Sie auf die Methode *Delete* verzichten (also nur eine *halbdynamische* Menge verwalten)? **3 Punkte**

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Donnerstag, 18. Dezember 2025, 14:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit PABS gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (sXXXXXX-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.