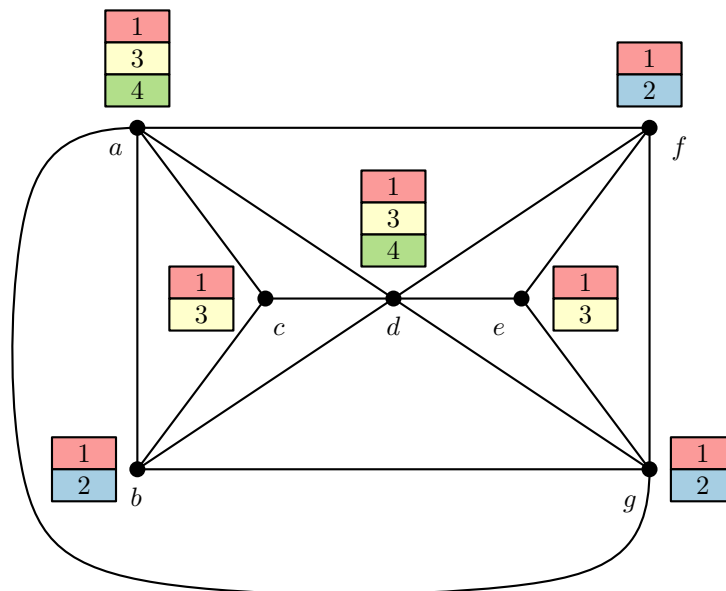


12. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2025)

Aufgabe 1 – Listenfärbung

Geben Sie für den folgenden Graphen und für die folgenden Listen von Farben für jeden Knoten eine gültige Listenfärbung an. **3 Punkte**



Aufgabe 2 – Graphenmodellierung

Ein Mobilfunkbetreiber braucht Ihre Hilfe. Ein bereits existierendes Funknetz muss neu eingerichtet werden. Gegeben ist eine Menge von Funkmasten. Für jeden Funkmast ist aufgrund der geographischen Lage und dem Höhenprofil der Umgebung genau bekannt, wie sein Sendegebiet aussieht. Wenn sich die Sendegebiete zweier Funkmasten überlappen, so müssen diese auf verschiedenen Frequenzbändern senden, damit sie sich nicht gegenseitig stören.

Der Mobilfunkbetreiber kann beliebig viele Frequenzbänder mieten. Um Kosten zu sparen, will er jedoch so wenige Frequenzbänder wie möglich mieten und trotzdem jedem Funkmast ein Frequenzband zuweisen, sodass es nirgendwo zu Störungen kommt.

Modellieren Sie dieses Problem als Graphenproblem. Geben Sie an, ob Ihr Graph ungerichtet oder gerichtet ist, was Ihre Knoten und Kanten sind und welchem algorithmischen Graphenproblem die Zuweisung der Frequenzbänder entspricht. Gibt es effiziente Algorithmen für dieses Problem im Allgemeinen? **3 Punkte**

Aufgabe 3 – Separierende Kreise und Störgraphen

Geben Sie einen separierenden Kreis (inklusive Teilstücken und deren Einbettung) des Petersengraphen (Abbildung 1) und den dazugehörigen Störgraphen an.

4 Punkte

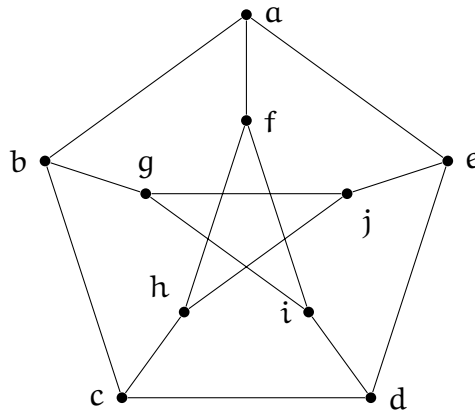


ABBILDUNG 1: Petersengraph

Aufgabe 4 – Planarität

In der Vorlesung haben wir den Planaritätstest nach Auslander und Parter kennengelernt. Wir wollen die Lücken in der Argumentation der Korrektheit noch schließen.

Beweisen Sie die folgenden drei Aussagen.

- a) Ein zweifach knotenzusammenhängender Graph G mit separierendem Kreis C ist genau dann planar, wenn die zwei folgenden Bedingungen gelten:

(B1) Für jedes Teilstück P von G bezüglich C ist der Graph $C + P$ planar.

(B2) Der Störgraph der Teilstücke von G bezüglich C ist bipartit.

3 Punkte

- b) Ein zweifach knotenzusammenhängender Graph ohne separierenden Kreis ist planar.

4 Punkte

- c) Sei P ein Teilstück eines zweifach knotenzusammenhängenden Graphen G bezüglich eines separierenden Kreises C .

Der Graph $C + P$ ist zweifach knotenzusammenhängend.

3 Punkte

Aufgabe 5 – Leichteste Kreise

Gegeben sei ein ungerichteter planarer Graph G mit positiven Kantengewichten. Das Gewicht eines Kreises in G ist die Summe seiner Kantengewichte. In einer Menge von Kreisen ist ein Kreis mit kleinstem Gewicht ein *leichtester Kreis*. (Sie können wie immer Algorithmen aus der Vorlesung „Algorithmen und Datenstrukturen“ als Unterrouinen nutzen.)

- a) Sei s ein Knoten in G . Finden Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen leichtesten Kreis durch s . Geben Sie den Algorithmus dazu in Worten an und begründen Sie Korrektheit sowie Laufzeit. **5 Zusatzpunkte**

Hinweis: Nutzen Sie Dijkstras Algorithmus von s ausgehend und betrachten Sie die verschiedenen Teilbäume von s im entstehenden Kürzeste-Wege-Baum. Wie sehen leichteste Kreise bezüglich dieser Teilbäume aus?

- b) Finden Sie in $O(n^{3/2} \log n)$ Zeit einen leichtesten Kreis in G ! Sie können dazu Teilaufgabe (a) benutzen, auch wenn Sie sie nicht gelöst haben. **5 Zusatzpunkte**

Hinweis: Zerlegen Sie den planaren Graphen G geeignet.

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 22. Juli 2025, 13:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim 12. Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller an, die das Übungsblatt bearbeitet haben (max. 2).

Begründen Sie Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit CPLEX gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch. Der Quellcode sollte von derselben Person abgegeben werden, die auch das pdf hochgeladen hat. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, wer den Quellcode hochgeladen hat.

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.