

11. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2025)

Aufgabe 1 – Maximal planare und nicht-planare Graphen

a) Sei $G = (V, E)$ ein einfacher zusammenhängender planarer Graph mit $|V| \geq 3$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Es gilt $|E| = 3|V| - 6$.
- (ii) Es gibt kein Paar $u, v \in V$ von Knoten mit $\{u, v\} \notin E$, so dass $G + \{u, v\}$ planar ist.
- (iii) In einer ebenen Zeichnung von G wird jede Facette von einem Kreis mit genau drei Kanten begrenzt.

6 Punkte

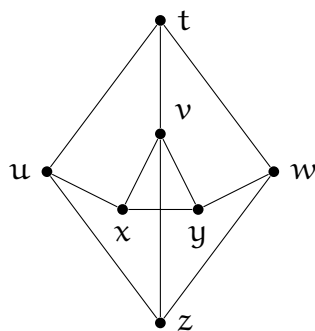
b) Zeigen Sie, dass ein Graph $G = (V, E)$ mit $|E| \leq 3|V| - 6$ nicht notwendigerweise planar ist.

1 Punkt

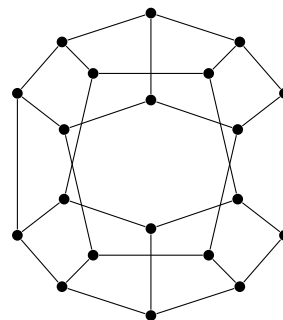
Aufgabe 2 – Planare Zeichnungen

a) Betrachten Sie die Graphen G_1 und G_2 in Abbildung 1. Entscheiden Sie für jeden dieser Graphen, ob er planar ist, und zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Behauptung.

3 Punkte



G_1



G_2

ABBILDUNG 1: Graphen für Aufgabe 2a).

- b) Gegeben sei eine Platine mit vier Bauelementen vom Typ A und fünf Elementen vom Typ B. Jedes Bauelement hat Anschlüsse für Leitungen auf beiden Seiten der Platine (Ober- und Unterseite). Ziel ist es, jedes Element vom Typ A mit jedem Element vom Typ B mit jeweils *einer* Leitung auf einer der beiden Seiten der Platine so zu verbinden, dass sich keine zwei Leitungen kreuzen.

Beweisen oder widerlegen Sie, dass dies möglich ist.

3 Punkte

- c) Ist es möglich die Leitungen geradlinig zu verlegen, ohne dass sich Leitungen kreuzen? Falls ja, geben Sie eine Skizze an

1 Punkt

Aufgabe 3 – Planare Graphen

- a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit mindestens elf Knoten und sei $G' := (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Zeigen Sie: Höchstens einer der beiden Graphen G und G' ist planar.

3 Punkte

- b) Zeigen Sie, dass der K_7 überschneidungsfrei auf die Oberfläche eines Torus (siehe Abbildung 2) gezeichnet werden kann.

Hinweis: Finden Sie eine Möglichkeit den Torus „aufzuschneiden“, so dass eine Fläche entsteht. Verteilen Sie die Knoten in geeigneter Weise und zeichnen Sie dann alle benötigten Kanten überschneidungsfrei ein.

3 Punkte

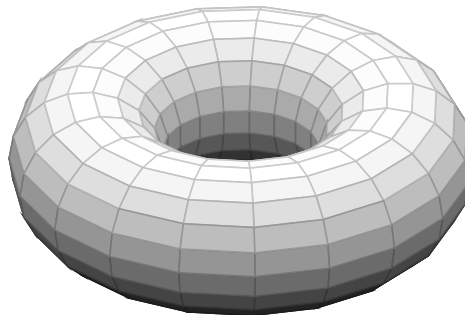


ABBILDUNG 2: Ein Torus.

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 15. Juli 2025, 13:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim 11. Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller an, die das Übungsblatt bearbeitet haben (max. 2).

Begründen Sie Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit CPLEX gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch. Der Quellcode sollte von derselben Person abgegeben werden, die auch das pdf hochgeladen hat. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, wer den Quellcode hochgeladen hat.

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.