

10. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2025)

Aufgabe 1 – Größte Clique

Beim Problem GRÖSSTE CLIQUE ist ein Graph $G = (V, E)$ gegeben und gesucht wird eine Teilmenge $V' \subseteq V$, sodass V' in G eine Clique ist und es keine größere Clique gibt.

- a) Beschreiben Sie einen Brute-Force-Ansatz, der dieses Problem löst, und schätzen Sie seine Laufzeit in Abhängigkeit von n scharf ab, wobei $n = |V|$. **2 Punkte**
- b) Der Maximalgrad von G sei nun Δ (es gilt also $\Delta = \max_{v \in V} \deg(v)$). Beschreiben Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe von G sowie einem Knoten $v \in V$ die größte Clique findet, an der v beteiligt ist. Dieser Algorithmus muss nicht effizient sein, jedoch schneller als der Brute-Force-Ansatz, wenn $\Delta \in o(n)$. Schätzen Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus scharf in Abhängigkeit von n und Δ ab. **2 Punkte**
- c) Zeigen Sie: GRÖSSTE CLIQUE ist festparameterberechenbar bezüglich des Maximalgrades Δ . **2 Punkte**

Aufgabe 2 – Geradenüberdeckung

Beim Problem GERADENÜBERDECKUNG ist eine Menge von Punkten in der Ebene gegeben und gesucht wird eine Menge von Geraden, die die Punkte *überdeckt*, d. h. jeder Punkt ist in mindestens einer Geraden enthalten. Im Folgenden entwickeln wir einen Algorithmus, der entscheidet, ob es für eine gegebene Punktmenge P und eine natürliche Zahl k eine Geradenüberdeckung mit Mächtigkeit $\leq k$ gibt. Dabei sei $n := |P|$.

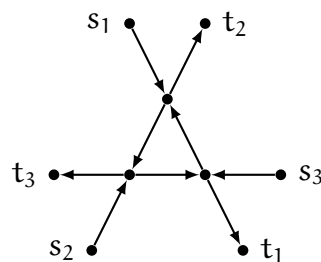
- a) Erläutern Sie, dass es (für $n \geq 2$) genügt, Geraden zu betrachten, auf denen mindestens zwei Punkte liegen. **1 Punkt**
- b) Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Anzahl an Geraden an, auf denen mindestens zwei Punkte liegen. **1 Punkt**
- c) Beschreiben Sie, wie mit Geraden umzugehen ist, die mehr als k Punkte enthalten. Begründen Sie Ihre Antwort. **1 Punkt**
- d) Angenommen es gibt keine Gerade, die mehr als k Punkte enthält. Für welche Werte des Parameters k können wir sicher sagen, dass es keine Geradenüberdeckung geben kann? **1 Punkt**
- e) Geben Sie einen FPT-Algorithmus für GERADENÜBERDECKUNG bezüglich des Parameters k (also der Größe der Geradenüberdeckung) in Worten an. Schätzen Sie seine Laufzeit sinnvoll ab. **5 Punkte**

Hinweis: Nutzen Sie die Beobachtungen aus den Teilaufgaben a)–d).

Aufgabe 3 – Mehrgüterfluss

Wir betrachten die Verallgemeinerung von Flüssen auf so genannte *Mehrgüterflüsse*, bei denen es mehrere Quellen und Senken geben kann. Gegeben ist auch hier ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Statt einer Quelle s und einer Senke t gibt es jetzt aber eine Menge $V_s = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq V$ von Quellen und eine Menge $V_t = \{t_1, \dots, t_k\} \subseteq V$ von Senken.

Das k -Tupel $f = (f_1, \dots, f_k)$ mit $f_i: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $1 \leq i \leq k$, ist ein *zulässiger Mehrgüterfluss*, wenn jedes f_i ein zulässiger s_i - t_i -Fluss ist und $\sum_i f_i(e) \leq c(e)$ für alle Kanten $e \in E$. Der Flusswert eines s_i - t_i -Flusses sei mit $F(f_i)$ bezeichnet. Der Gesamtflusswert ist definiert als $F(f) := \sum_i F(f_i)$.



- a) Betrachten Sie den abgebildeten Graphen. Es sei $c(e) = 1$ für alle $e \in E$. Geben Sie den maximalen Gesamtflusswert an (mit Begründung) unter der Bedingung, dass jede Kante einen ganzzahligen Flusswert besitzt. **2 Punkte**
- b) Betrachten Sie den abgebildeten Graphen. Es sei $c(e) = 1$ für alle $e \in E$. Geben Sie den maximalen Gesamtflusswert an (mit Begründung), wenn es keine weiteren Bedingungen gibt. **3 Punkte**

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 8. Juli 2025, 13:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim 10. Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller an, die das Übungsblatt bearbeitet haben (max. 2).

Begründen Sie Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit CPLEX gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch. Der Quellcode sollte von derselben Person abgegeben werden, die auch das pdf hochgeladen hat. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, wer den Quellcode hochgeladen hat.

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.