Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 10. Juni 2025

Prof. Dr. Alexander Wolff
Samuel Wolf, M. Sc.

7. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2025)

Aufgabe 1 – Wurzelspannbäume und ungerichtete Bäume

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und s ein ausgezeichneter Knoten. Zeigen Sie:

Der gerichtete Graph G ist genau dann ein s-Wurzelspannbaum, wenn der G zugrunde liegende ungerichtete Graph ein Baum ist, für jedes $v \in V \setminus \{ s \}$: $\text{indeg}(v) = 1$ gilt und $\text{indeg}(s) = 0$. **4 Punkte**

Hinweis: Verwenden Sie die genaue Definition eines s-Wurzelspannbaums aus der Vorlesung und denken Sie daran beide Richtungen zu zeigen.

Aufgabe 2 – Eigenschaften von Wurzelspannbäumen

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $s \in V$ ein ausgezeichneter Knoten.

Ein Knoten w ist von einem Knoten v *erreichbar*, wenn es einen v–w-Weg gibt. Die *Erreichbarkeitsmenge* $E(v)$ eines Knotens v ist die Menge aller Knoten, die von v erreichbar sind. Insbesondere ist $v \in E(v)$.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Falls $E(s) = V$, dann besitzt G einen s-Wurzelspannbaum. **3 Punkte**

b) Wenn G kreisfrei ist (d. h. ohne gerichtete Kreise) und einen Wurzelspannbaum besitzt, dann ist dieser eindeutig bestimmt. **2 Punkte**

c) Wenn G kreisfrei ist (d. h. ohne gerichtete Kreise) und zwei Wurzelspannbäume besitzt, dann haben beide dieselbe Wurzel. **2 Punkte**

Aufgabe 3 – Wurzelspannbäume in azyklischen Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter *azyklischer* Graph, d. h. ein Graph ohne gerichtete Kreise, und $s \in V$ ein Knoten, von dem aus alle anderen Knoten erreichbar sind. Sei $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion, die jeder Kante ein nichtnegatives Gewicht zuordnet.

a) Zeigen Sie: Der Algorithmus von Jarník-Prim mit Startknoten s berechnet im Allgemeinen keinen minimalen s-Wurzelspannbaum von G, selbst wenn er die Kantenrichtungen beachtet und immer nur ausgehende Kanten erkundet. **2 Punkte**

b) Um den Algorithmus von Kruskal auf G anwenden zu können, ignorieren wir die Kantenrichtungen. Zeigen Sie: Der Algorithmus von Kruskal berechnet im Allgemeinen keinen minimalen s-Wurzelspannbaum von G. **2 Punkte**

Betrachten Sie nun den folgenden Algorithmus (wie oben beschrieben ist von s aus jeder Knoten in G erreichbar). Dabei gibt $\arg\min_{x \in X} f(x)$ ein $x \in X$ aus, für das der Funktionswert $f(x)$ unter allen Elementen aus X minimal ist.

DAG_MST(gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$, Knoten s, Kantenkostenfkt. c)

```
E' = ∅
foreach v ∈ V \ { s } do
    e(v) = arg min_{(u,v)∈E} c((u, v))
    E' = E' ∪ {e(v)}
return T = (V, E')
```

c) Zeigen Sie: DAG_MST berechnet einen s-Wurzelspannbaum von G. **3 Punkte**

d) Zeigen Sie: Der von DAG_MST berechnete Wurzelspannbaum ist *minimal*. **2 Punkte**

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 17. Juni 2025, 13:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim 7. Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller an, die das Übungsblatt bearbeitet haben (max. 2).

Begründen Sie Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit CPLEX gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch. Der Quellcode sollte von derselben Person abgegeben werden, die auch das pdf hochgeladen hat. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, wer den Quellcode hochgeladen hat.

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.