Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 20. Mai 2025

Prof. Dr. Alexander Wolff
Samuel Wolf, M. Sc.

4. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2025)

Aufgabe 1 – Knotengrade

a) Gibt es einen Graphen mit 11 Knoten und den Knotengraden 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 10? Geben Sie einen Beispielgraphen an oder begründen Sie, warum es keinen solchen Graphen gibt. Wie sonst auch, wenn nicht anders angegeben, soll der Graph ungerichtet und einfach sein. *Einfach* heißt ohne Selbstkanten (auch Schleifen genannt) und ohne Mehrfachkanten. **3 Punkte**

b) Wir formalisieren das Problem aus Teilaufgabe a) und übertragen es auf gerichtete Graphen: Gegeben seien eine natürliche Zahl n, natürliche Zahlen $e_1, \dots, e_n$ und $a_1, \dots, a_n$. Gesucht ist ein gerichteter Graph mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, so dass für $i = 1, \dots, n$ der Knoten v_i Eingangsgrad e_i und Ausgangsgrad a_i hat.

Beschreiben Sie für dieses allgemeine Problem eine Modellierung als Maximalflussproblem, mit der ein solcher Graph gefunden werden kann, oder entschieden wird, dass es keine Lösung gibt. Machen Sie eine allgemeine Skizze Ihres Flussnetzwerks. **4 Punkte**

c) Zeigen Sie, dass Ihre Modellierung aus Teilaufgabe b) korrekt ist. **2 Punkte**

Aufgabe 2 – b-Flüsse

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, für den Kantenkapazitäten durch eine Funktion $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben sind. Zusätzlich sei $b : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die jedem Knoten $v \in V$ einen (möglicherweise negativen) Bedarfswert $b(v) \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $0 \leq f(e) \leq c(e)$ für jede Kante $e \in E$ ist ein *zulässiger b-Fluss*, falls

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = b(v) \text{ für jeden Knoten } v \in V.$$

Für Knoten mit $b(v) = 0$ entspricht das der Flusserhaltung. Es gibt allerdings keine ausgezeichneten Knoten s und t mehr, dafür aber Knoten mit $b(v) \neq 0$.

a) Sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ sowie Kantenkapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und eine Bedarfsfunktion $b : V \to \mathbb{R}$ gegeben. Modellieren Sie das Problem, zu entscheiden, ob es in G einen zulässigen b-Fluss gibt, als s-t-Fluss-Problem.

Hinweis: Fügen Sie Knoten und Kanten zum gegebenen Graphen hinzu und wählen Sie dabei geeignete Kapazitäten der Kanten. **4 Punkte**

b) Zeigen Sie, dass Ihre Lösung aus Teilaufgabe a) korrekt ist. **2 Punkte**

Aufgabe 3 – Minimale Schnitte

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie einen effizienten Algorithmus in Worten an, der einen minimalen s-t-Schnitt ermittelt. Zeigen Sie die Korrektheit des Algorithmus. Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Laufzeit Ihres Algorithmus an und begründen Sie diese.

5 Punkte

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 27. Mai 2025, 13:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim 4. Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller an, die das Übungsblatt bearbeitet haben (max. 2).

Begründen Sie Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit $\boxed{\text{CPLEX}}$ gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch. Der Quellcode sollte von derselben Person abgegeben werden, die auch das pdf hochgeladen hat. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, wer den Quellcode hochgeladen hat.

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.