Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 07. Mai 2025

Prof. Dr. Alexander Wolff
Samuel Wolf, M. Sc.

# 3. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2025)

### Aufgabe 1 – Triangulierungen und Dynamische Programmierung

Ein *Polygon* ist ein geschlossener Streckenzug in der Ebene – eine Folge von $n$ verbundenen Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_n$, die wieder am Startpunkt $p_1$ endet. Die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des Polygons werden *Ecken* genannt und die Strecken zwischen den Ecken *Polygonkanten*. Ein Polygon ist *konvex*, wenn jede Strecke mit Start- und Endpunkt im Polygon auch selbst vollständig im Polygon enthalten ist; siehe Abbildung 1.

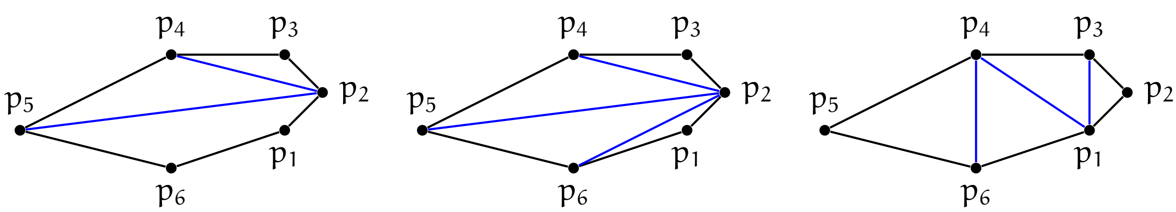

(A) nicht-konvexes Polygon

(B) konvexes Polygon

ABBILDUNG 1: Beispiele für Polygone.

Eine *Triangulierung* eines Polygons ist eine nicht-erweiterbare Menge von Strecken, die nicht-benachbarte Ecken verbinden, im Inneren des Polygons liegen, keine Polygonkanten schneiden und sich nicht gegenseitig schneiden. Wir nennen diese Strecken *Diagonalen*.

Wenn wir ein konvexes Polygon triangulieren, so müssen wir offensichtlich nur darauf achten, dass sich die Diagonalen nicht gegenseitig schneiden. Die *Kosten* einer Triangulierung sind die Summe der euklidischen Längen aller ihrer Diagonalen. Entsprechend heißt die Triangulierung mit den geringsten Kosten *kostenminimal*; siehe Abbildung 2.




(A) keine Triangulierung

(B) Triangulierung, die nicht kostenminimal ist

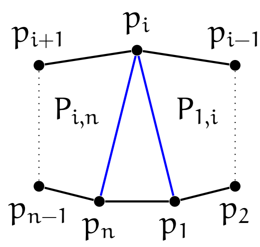
(C) kostenminimale Triangulierung

ABBILDUNG 2: Triangulierungen eines konvexen Polygons. Die Diagonalen sind blau gefärbt.

Wir entwickeln nun schrittweise ein dynamisches Programm, um die Kosten einer kostenminimale Triangulierung eines gegebenen konvexen Polygons $P$ zu bestimmen.

Sie können annehmen, dass wir die Länge $d(p_i, p_j)$ einer Diagonalen $(p_i, p_j)$ in konstanter Zeit bestimmen können und dass es keine drei Ecken des Polygons gibt, die auf einer Geraden liegen.

a) In einer kostenminimalen Triangulierung von $P$ ist die Polygonkante $(p_1, p_n)$ Teil eines Dreiecks $\Delta p_1 p_i p_n$, wobei $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. Das Dreieck $\Delta p_1 p_i p_n$ trennt von $P$ zwei (konvexe) Teilpolygone $P_{1,i}$ und $P_{i,n}$ ab.
Angenommen wir würden die Kosten für eine kostenminimale Triangulierung von $P_{1,i}$ und $P_{i,n}$ kennen, wie könnten wir daraus die Kosten einer kostenminimalen Triangulierung von $P$ berechnen?
Beachten Sie auch die Spezialfälle $i = 2$ und $i = n - 1$. **2 Punkte**




b) Beschreiben Sie ein dynamisches Programm in Worten, welches für ein gegebenes konvexes Polygon die Kosten einer kostenminimalen Triangulierung berechnet.

Das dynamische Programm soll polynomielle Laufzeit haben und eine Tabelle $A[\cdot, \cdot]$ verwenden, welche für jedes Teilpolygon $P_{i,j}$ von $P$ mit Ecken $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_{j-1}, p_j$ und $1 \leq i < j \leq n$ einen Eintrag $A[i, j]$ für die Kosten einer kostenminimalen Triangulierung enthält. **4 Punkte**

c) Geben Sie scharfe obere Schranken für die asymptotische Laufzeit und den asymptotischen Speicherbedarf Ihres dynamischen Programms an. **2 Punkte**

## Aufgabe 2 – TSP mit Wiederholungen

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass sich das Metrische TSP-Problem approximieren lässt, während das allgemeine TSP-Problem nicht approximierbar ist (falls P≠NP). In dieser Aufgabe betrachten wir eine andere Variante von TSP, die ebenfalls eine Approximation zulässt. Gegeben sei ein ungerichteter vollständiger Graph $G$ mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Gesucht ist eine Rundreise $K$ in $G$, die jeden Knoten *mindestens* einmal besucht und minimale Kosten $\sum_{e \in K} c(e)$ hat. Im Gegensatz zu TSP dürfen hier also Knoten mehrfach besucht werden.

Beschreiben Sie einen Algorithmus, der eine 2-Approximation für dieses Problem liefert.

*Hinweis:* Reduzieren Sie dieses Problem auf Metrisches TSP. **6 Punkte**

## Aufgabe 3 – Metrisches TSP

In der Vorlesung wurde ein Approximationsalgorithmus auf Basis von Spannbäumen für das metrische TSP vorgestellt. Dieser besitzt *Güte* 2, d. h. die Rundreise, die der Algorithmus liefert, ist höchstens doppelt so lang wie eine optimale Rundreise.

Sei $G$ ein vollständiger, metrischer, ungerichteter Graph mit Kantengewichten. Betrachten Sie den folgenden Algorithmus:

CompleteHamilton(Graph $G$, Kostenfunktion $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

```
wähle s ∈ V(G) beliebig
wähle eine Kante {s, t} ∈ E(G) mit c({s, t}) minimal
C ← ⟨{s, t}, {t, s}⟩
while V(C) ≠ V(G) do
    wähle einen Knoten v ∈ V(G) \ V(C), dessen Abstand zu C am geringsten ist
    sei w ein Knoten in C mit c({v, w}) minimal
    sei u einer der beiden Nachbarn von w auf C
    ersetze in C die Kante {u, w} durch die Kantenfolge ⟨{u, v}, {v, w}⟩
return C
```

a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Prim (beginnend mit Startknoten $s$) in jedem Schritt denselben Knoten zum aktuellen Baum hinzufügt wie Algorithmus CompleteHamilton zum Kreis $C$. **2 Punkte**

   *Hinweis:* Sie dürfen vernachlässigen, dass es in einem Schritt mehrere gleich gute Wahlmöglichkeiten geben kann.

b) Zeigen Sie, dass der Algorithmus CompleteHamilton Güte 2 besitzt. **4 Punkte**

   *Hinweis:* Verwenden Sie Teilaufgabe a) sowie die *Dreiecksungleichung*.

---

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 20. Mai 2025, 13:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim 3. Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller an, die das Übungsblatt bearbeitet haben (max. 2).

Begründen Sie Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.