

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

10. Vorlesung

Festparameter-Berechenbarkeit

Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

- Exponentialzeit-Algorithmen, z.B. Backtracking
- Approximationsalgorithmen:
Tausche Qualität gegen Laufzeit
- Heuristiken: empirische Untersuchung auf Benchmarks
- Randomisierung: Suche nach der Nadel im Heuhaufen
- Entwurf von parametrisierten Algorithmen



NEU

Ein Beispiel: Vertex Cover

Def. (Zur Erinnerung)

Sei G ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge $V(G)$.
 $C \subseteq V(G)$ heißt *Knotenüberdeckung* (eng. *vertex cover*)
von G , falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.

Prob. *Kleinste Knotenüberdeckung* – Optimierungsproblem

Gegeben: Graph G

Gesucht: eine kleinste Knotenüberdeckung von G

Prob. *k-Knotenüberdeckung (k-VC)* – Entscheidungsproblem

Gegeben: Graph G , natürliche Zahl k

Gesucht: Knotenüberdeckung der Größe $\leq k$ von G –
falls eine solche existiert
(sonst gib „nein“ zurück)

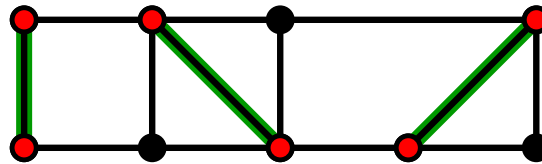
Previous Work



- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde ($\text{SAT} \preceq_p \text{CLIQUE} \preceq_p \text{VC} \preceq_p \dots$) [Karp, 1972]

- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

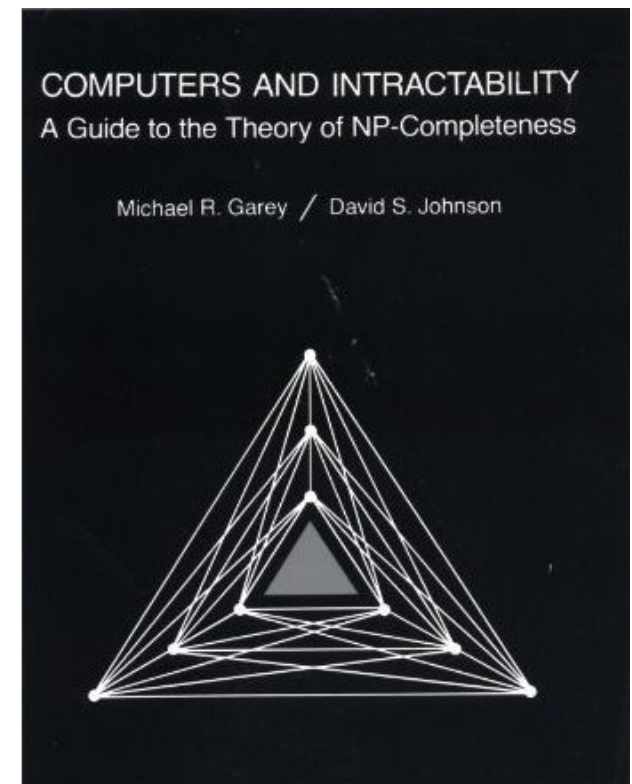
- approximierbar:



Nicht-erweiterbares **Matching** „liefert“ Faktor-2-Approximation für **VC**.

- ..., aber nicht beliebig gut:

Es gibt keine Faktor-1,3606-Approximation für VC, falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
[Dinur & Safra, 2004]



Ein exakter Algorithmus für k -VC

BruteForceVC(Graph G , Integer k)

```

foreach  $C \in \binom{V(G)}{k}$  do
    // teste, ob  $C$  VC
     $vc = true$ 
    foreach  $uv \in E(G)$  do
        if  $\{u, v\} \cap C = \emptyset$  then
             $vc = false$ 
    if  $vc$  then
        return ("yes",  $C$ )
return ("no",  $\emptyset$ )
  
```

$$\begin{aligned}
 \left| \binom{V(G)}{k} \right| &= \binom{|V(G)|}{k} = \binom{n}{k} \\
 &= O(n^k)
 \end{aligned}$$

Warum?

$$O(E(G)) = O(m)$$

Laufzeit. $O(n^k m)$ – Dies ist *nicht* polynomiell in der Größe der Eingabe ($= n + m$), da k keine Konstante, sondern Teil der Eingabe ist.

Ein neues Ziel

Bemerkung.

Die Klasse \mathcal{FPT} ändert sich nicht, wenn statt $+$ hier \cdot steht.

Finde einen Algorithmus für k -VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c) =: O_{\{ \}}^{\star}(f(k))$$

ignoriert polynomielle Faktoren!

wobei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von I),
 I gegebene Instanz, c Konstante (unabh. von I)

D.h. die Laufzeit soll abhängen

- beliebig vom Parameter k ,
- polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz I .

Schwierigkeit der Instanz

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. k .

\mathcal{FPT} = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

Bem. BruteForceVC hat *nicht* die gewünschte Laufzeit.

Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei G Graph, C ein VC für G , v Knoten, der nicht in C liegt.
Welche Knoten liegen dann sicher in C ?

Beob. 1. Sei G ein Graph, C ein VC für G , v ein Knoten.
Dann gilt: $v \in C$ oder $N_G(v) \subseteq C$.

Betrachte Entscheidungsproblem k -VC.
Was gilt für Knoten mit $\text{Grad} > k$?

Beob. 2. Jeder Knoten mit $\text{Grad} > k$ ist in jedem k -VC von G enthalten.

Was gilt, falls $|E(G)| > k^2$ und alle Knoten $\text{Grad} \leq k$ haben?

Beob. 3. Falls $|E(G)| > k^2$ und $\Delta(G) \leq k$ (wobei $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg(v)$), so hat G kein k -VC.

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$ if $ C > k$ then return ("no", \emptyset) $G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten) if $ E(G') > k^2$ then return ("no", \emptyset)	}	$O(n + m)$ Zeit
--	---	--------------------

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

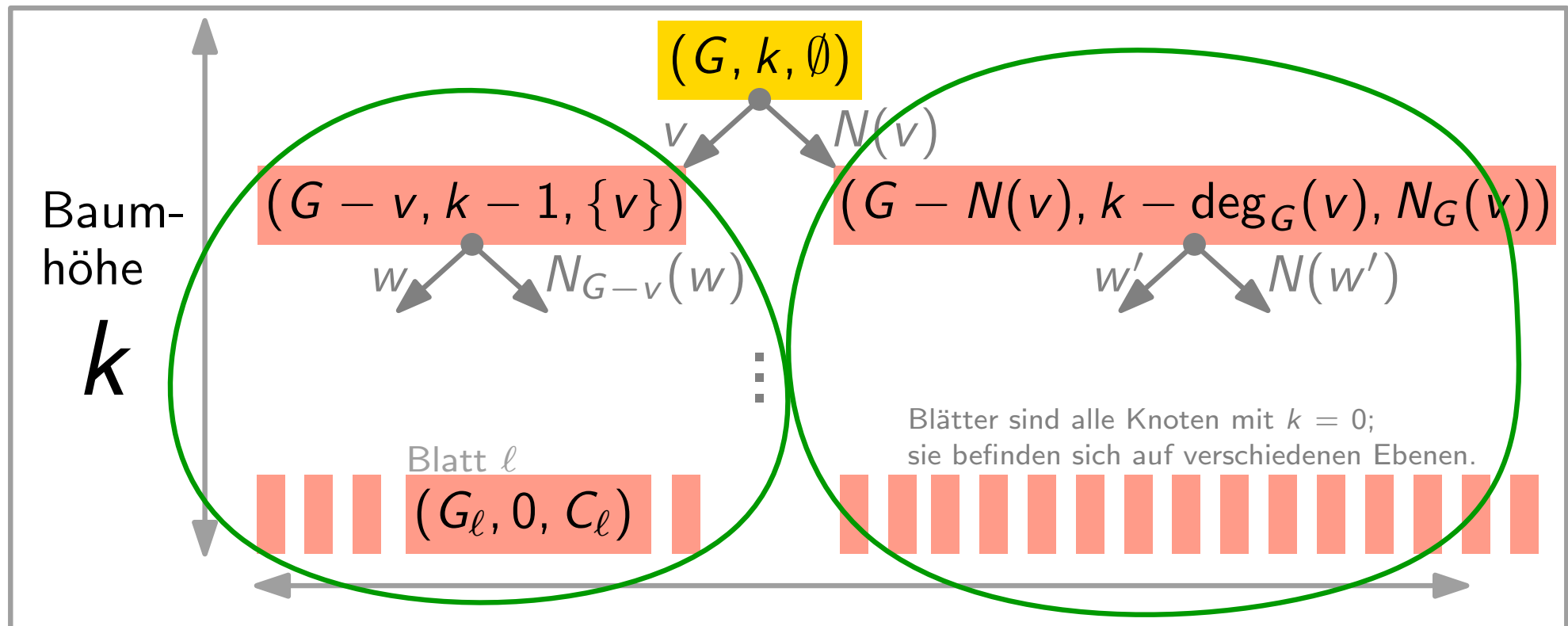
$k' = k - C $ $(\text{yesorno}, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$ return $(\text{yesorno}, C \cup C')$	}	$O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit wobei $m' := E(G') \leq k^2$ $\Rightarrow n' := V(G') \leq 2k^2$
---	---	---

Laufzeit. $O(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k) = O(\underbrace{n + m}_{|I|^1} + \underbrace{k^2 2^k k^{2k}}_{f(k)})$

Also: $k\text{-VC} \in \mathcal{FPT}!$

Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



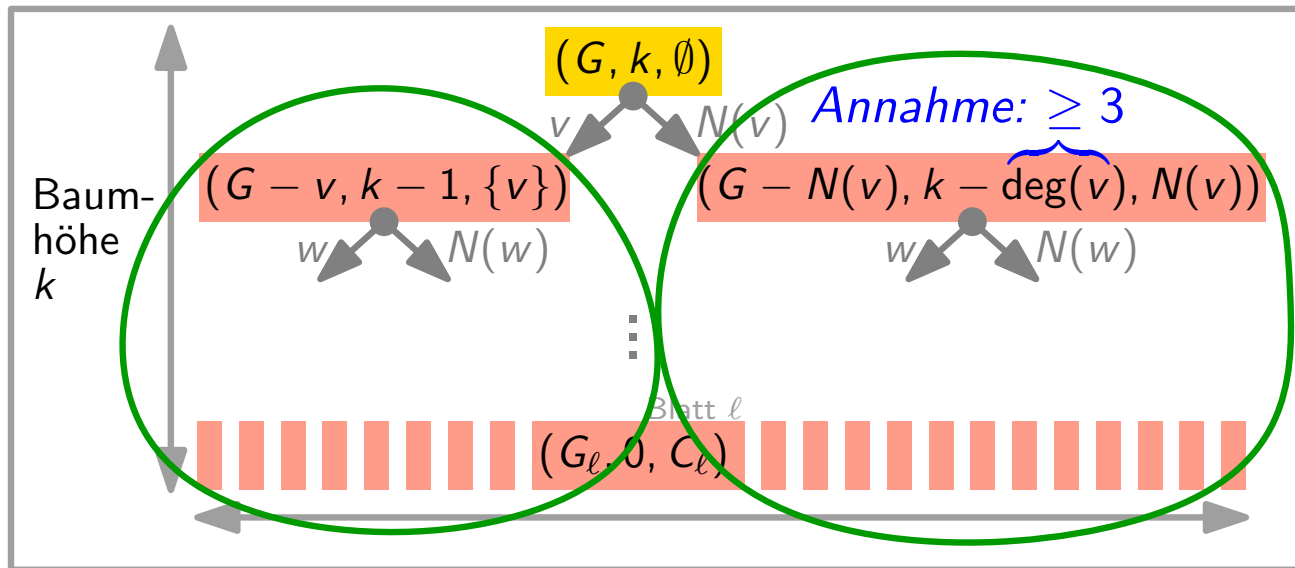
#Knoten: $T(k) \leq 2T(k-1) + 1$, $T(0) = 1 \Rightarrow T(k) \leq 2^{k+1} - 1 \in O(2^k)$
 \Rightarrow **Laufzeit:** $O^*(2^k)$

JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat G kein k -VC. (Warum?)

Der Grad-3-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



$$\Rightarrow T(k) = T(k - 3) + T(k - 1) + 1, \quad T(\leq 3) = \text{const.}$$

Verzweigungsvektor (3, 1)

$$\text{Teste } T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-3} + z^{k-1} \quad \cdot \frac{1}{z^{k-3}}$$

$$\Rightarrow \text{Charakteristisches Polynom: } z^3 = 1 + z^2$$

$$\Rightarrow \text{Größte positive Lösung: } z \approx 1,47 \quad (\text{Verzweigungszahl})$$

$$\Rightarrow T(k) \in O(1,47^k). \quad \text{Aber wie stellen wir } \deg(v) \geq 3 \text{ sicher?}$$

Kernbildung II

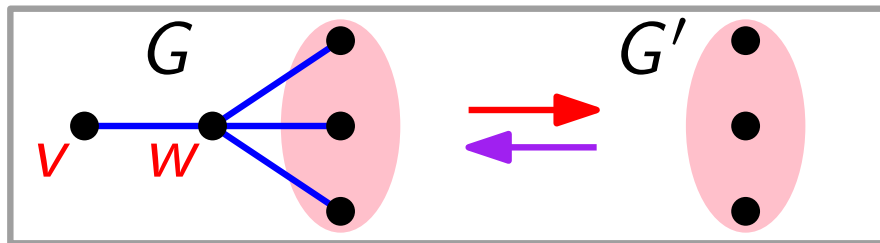
Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} > k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} 0$

Verbesserte Kernbildung:

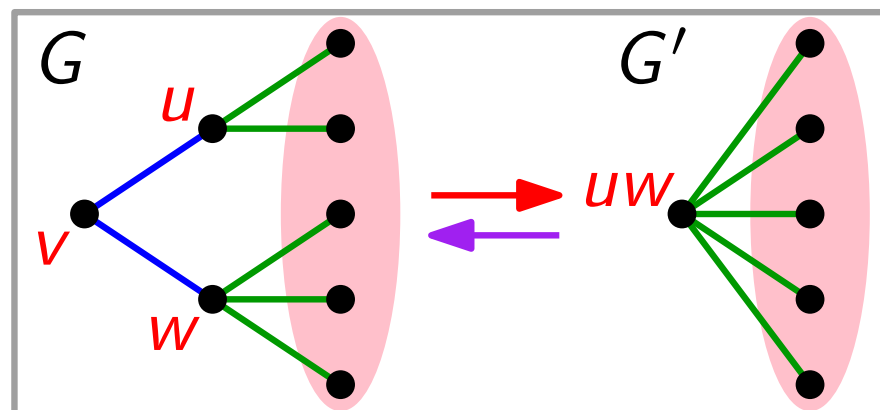
Regel 1: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} 1$



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' in G' .

$$C = C' \cup \{w\}$$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} 2$



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' in G' .

Falls $uw \in C'$,
nimm u und w in C ,
sonst v . ($\Rightarrow k = k' + 1$)

Der Grad-3-Algorithmus

Idee: Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

⇒ **Laufzeit:** $O(\boxed{nk} + \boxed{k^2} \cdot 1,47^k) \subseteq O^*(1,47^k)$

↑
Vorverarbeitung

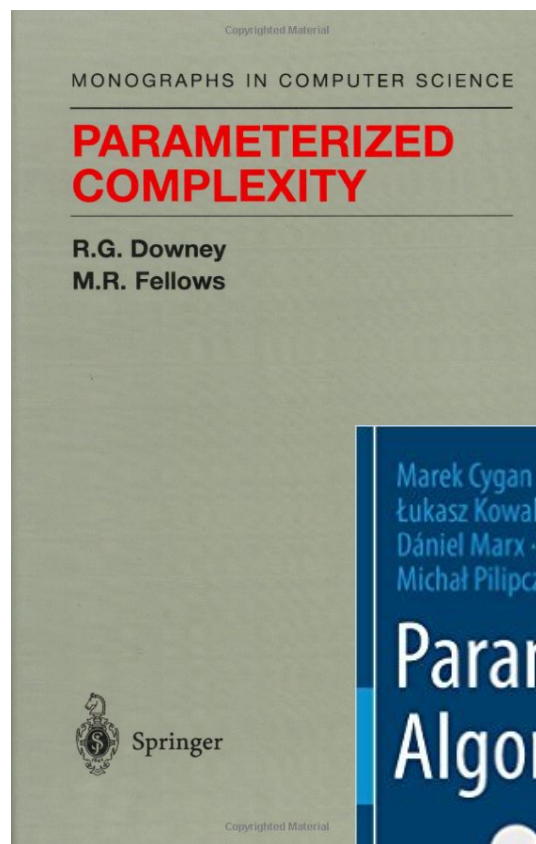
↑
Kernbildung in jedem Knoten
des Suchbaums

Der Grad-3-Algorithmus ist also ein Fest-Parameter-Algorithmus.

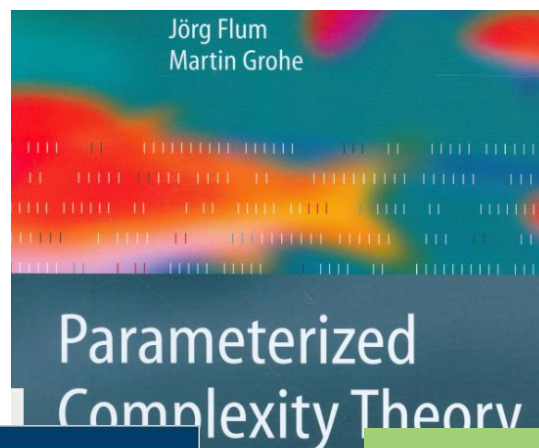
Fazit

- k -VC kann in $O(nk + 1,47^k k^2)$ Zeit gelöst werden.
Der momentan beste FPT-Algo läuft in $O^*(1,27^k)$ Zeit.
[Chen, Kanj, Jia, 2001]
- Parametrisierte Komplexität =
neuer Werkzeugkasten für schwere Probleme:
Kernbildung, Suchbäume, dynamische Programmierung, ...
- Es ist immer sinnvoll, beschränkte Parameter zu identifizieren – FPT nutzt sie!
- Hoffnung:
„natürliches“ Problem $P \in \mathcal{FPT} \Rightarrow f(k)$ erträglich.

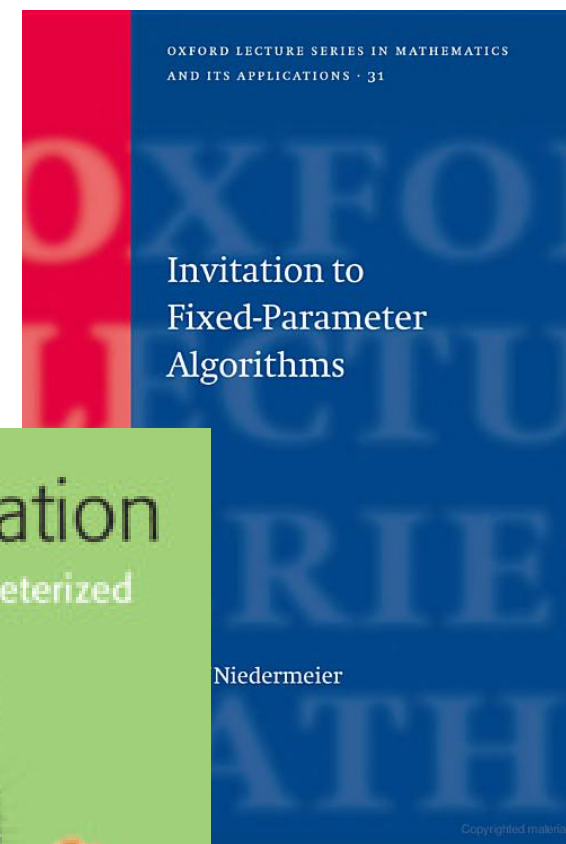
Bücher zum Thema



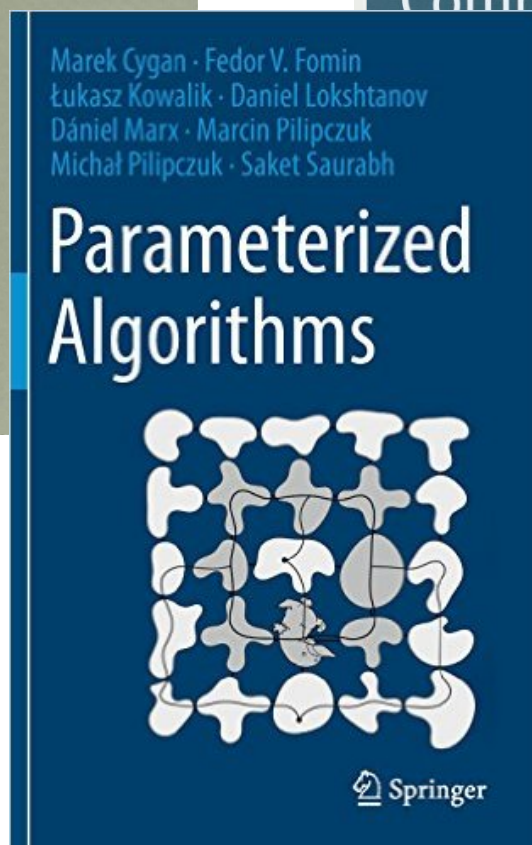
1999



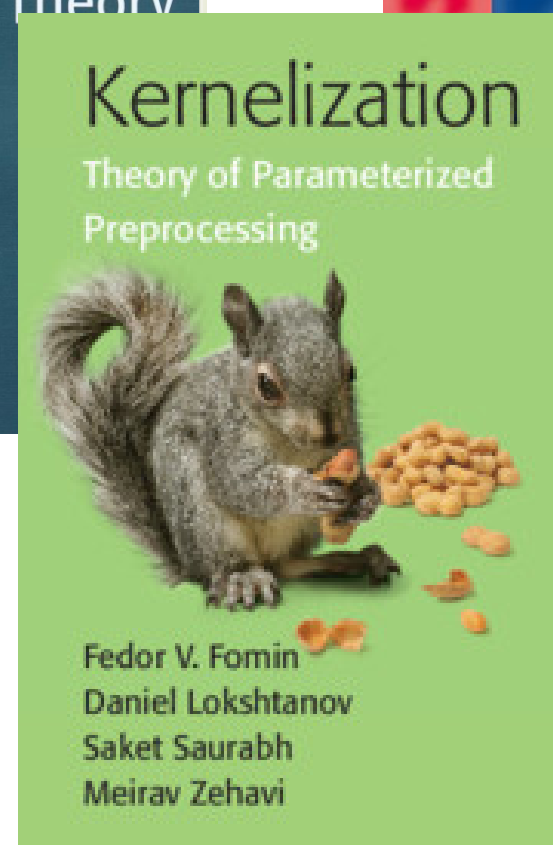
2006



2006



2015



2019