Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

4. Vorlesung

Flussalgorithmen

Lehrstuhl für Informatik I

Alexander Wolff

Aufgabe

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert.

Aufgabe

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert, also eine Funktion $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

Aufgabe

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert, also eine Funktion $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

– den Fluss erhält

– zulässig ist

– maximal ist

Aufgabe

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert, also eine Funktion $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

– den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten $v \notin \{s, t\}$ sicherstellt:

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) \;-\; \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

– zulässig ist

– maximal ist

Aufgabe

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert, also eine Funktion $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

– den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten $v \notin \{s, t\}$ sicherstellt:

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) \; - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

– zulässig ist, d.h. für jede Kante e von G garantiert:

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

– maximal ist

Aufgabe

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert, also eine Funktion $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

– den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten $v \notin \{s, t\}$ sicherstellt:

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{u\colon\ v \in \text{Adj}[u]} f(uv) \ - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

– zulässig ist, d.h. für jede Kante e von G garantiert:

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

– maximal ist, d.h. unter allen zulässigen s-t-Flüssen

$$|f| = \text{Nettozufluss}_f(t) \text{ maximiert.}$$

Aufgabe

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert, also eine Funktion $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

Variable

– den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten $v \notin \{s, t\}$ sicherstellt:

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) \;-\; \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

– zulässig ist, d.h. für jede Kante e von G garantiert:

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

– maximal ist, d.h. unter allen zulässigen s-t-Flüssen

$$|f| = \text{Nettozufluss}_f(t) \text{ maximiert.}$$

Aufgabe

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert, also eine Funktion $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

– den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten $v \notin \{s, t\}$ sicherstellt:

Variable

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) \; - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

– zulässig ist, d.h. für jede Kante e von G garantiert:

Konstante

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

– maximal ist, d.h. unter allen zulässigen s-t-Flüssen

$$|f| = \text{Nettozufluss}_f(t) \text{ maximiert.}$$

Aufgabe

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert, also eine Funktion $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

– den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten $v \notin \{s, t\}$ sicherstellt:

Variable

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{u\colon\ v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

– zulässig ist, d.h. für jede Kante e von G garantiert:

Konstante

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

– maximal ist, d.h. unter allen zulässigen s-t-Flüssen

$$|f| = \text{Nettozufluss}_f(t) \text{ maximiert.}$$

Aufgabe

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert, also eine Funktion $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

Variable

– den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten $v \notin \{s, t\}$ sicherstellt:

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{u\colon v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

– zulässig ist, d.h. für jede Kante e von G garantiert:

Konstante

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

$|V| - 2 + |E|$ lineare Beschränkungen!

– maximal ist, d.h. unter allen zulässigen s-t-Flüssen

$$|f| = \text{Nettozufluss}_f(t) \text{ maximiert.}$$

Aufgabe

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert, also eine Funktion $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

Variable

– den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten $v \notin \{s, t\}$ sicherstellt:

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{u\colon v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

– zulässig ist, d.h. für jede Kante e von G garantiert:

Konstante

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

$|V| - 2 + |E|$ lineare Beschränkungen!

– maximal ist, d.h. unter allen zulässigen s-t-Flüssen

$$|f| = \text{Nettozufluss}_f(t) \text{ maximiert.}$$

Aufgabe

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert, also eine Funktion $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

Variable

– den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten $v \notin \{s, t\}$ sicherstellt:

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

– zulässig ist, d.h. für jede Kante e von G garantiert:

Konstante

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

$|V| - 2 + |E|$ lineare Beschränkungen!

– maximal ist, d.h. unter allen zulässigen s-t-Flüssen

$$|f| = \text{Nettozufluss}_f(t) \text{ maximiert.}$$

lineare Zielfunktion!

Aufgabe

Indeed, it's an LP!

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert, also eine Funktion $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

Variable

– den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten $v \notin \{s, t\}$ sicherstellt:

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

– zulässig ist, d.h. für jede Kante e von G garantiert:

Konstante

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

$|V| - 2 + |E|$ lineare Beschränkungen!

– maximal ist, d.h. unter allen zulässigen s-t-Flüssen

$$|f| = \text{Nettozufluss}_f(t) \text{ maximiert.}$$

lineare Zielfunktion!

Flussalgorithmen

Kann man maximale Flüsse ($=$ Spezialfall eines LPs) auch mit maßgeschneiderten kombinatorischen Algorithmen berechnen?

Flussalgorithmen

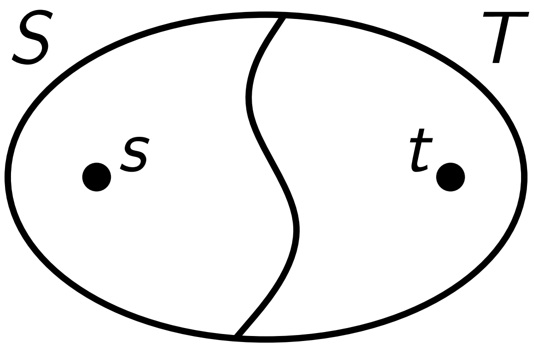
Kann man maximale Flüsse ($=$ Spezialfall eines LPs) auch mit maßgeschneiderten kombinatorischen Algorithmen berechnen?

Hoffnung: Das könnte schneller gehen –
und strukturelle Einsichten liefern.

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie

Def. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.

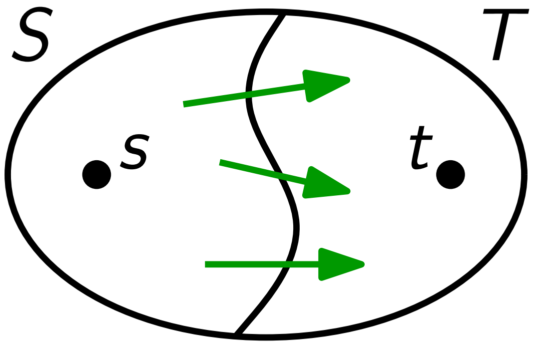
Eine Zerlegung (S, T) von $V(G)$ ist ein *s-t-Schnitt*, falls $s \in S$ und $t \in T$.



Nichts ist praktischer als eine gute Theorie

Def. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.

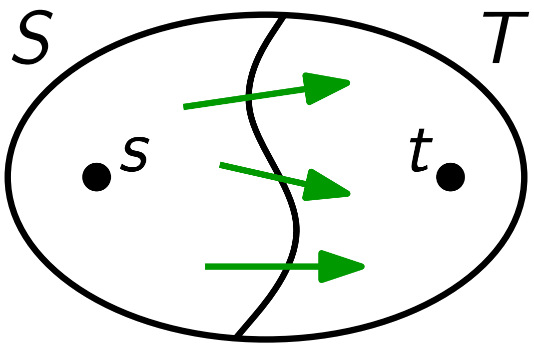
Eine Zerlegung (S, T) von $V(G)$ ist ein *s-t-Schnitt*, falls $s \in S$ und $t \in T$.



Nichts ist praktischer als eine gute Theorie

Def. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.

Eine Zerlegung (S, T) von $V(G)$ ist ein *s-t-Schnitt*, falls $s \in S$ und $t \in T$.

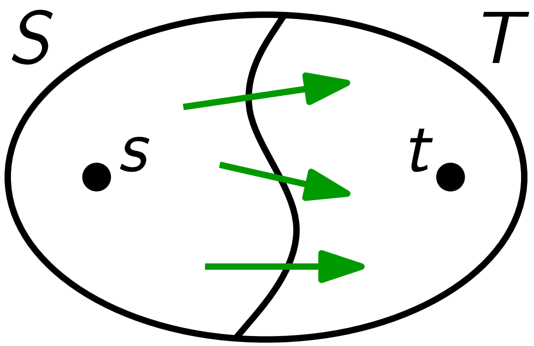


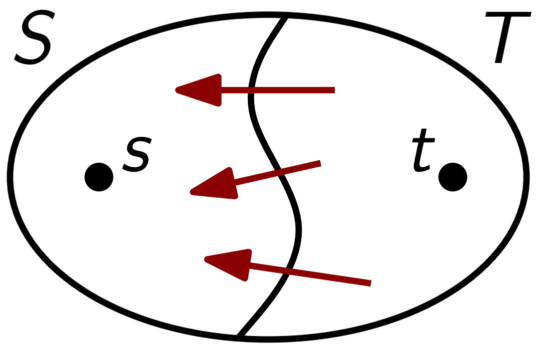
$\text{Raus}(S) = \{uv \in E(G) \mid u \in S, v \in T\}$

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie

Def. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.

Eine Zerlegung (S, T) von $V(G)$ ist ein *s-t-Schnitt*, falls $s \in S$ und $t \in T$.



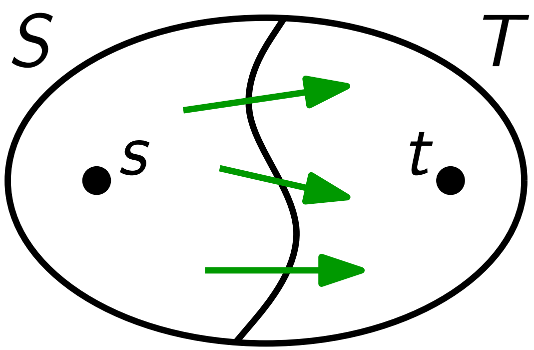


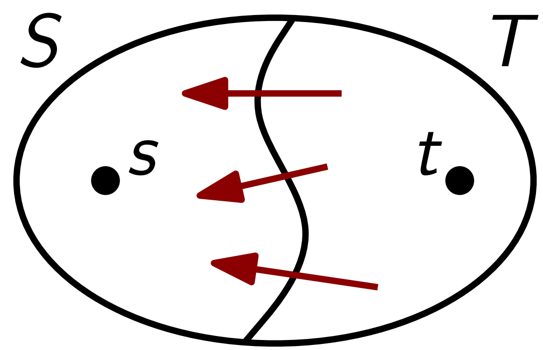
$\mathrm{Raus}(S) = \{uv \in E(G) \mid u \in S, v \in T\}$

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie

Def. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.

Eine Zerlegung (S, T) von $V(G)$ ist ein *s-t-Schnitt*, falls $s \in S$ und $t \in T$.





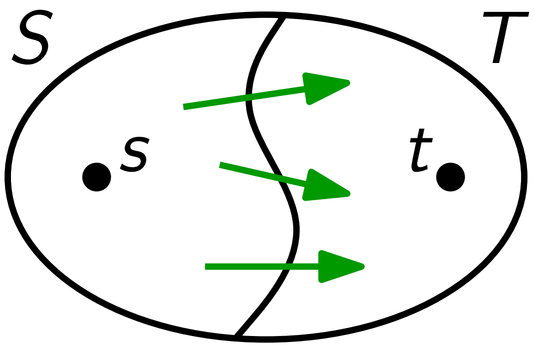
$$\text{Raus}(S) = \{uv \in E(G) \mid u \in S, v \in T\}$$

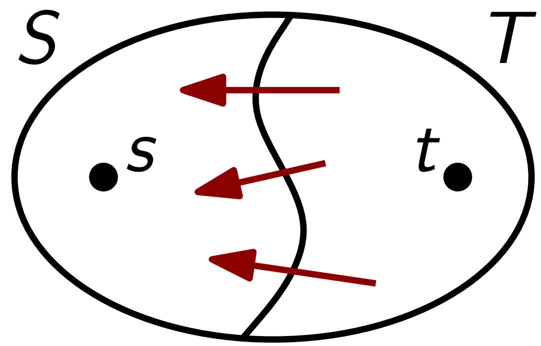
$$\{uv \in E(G) \mid u \in T, v \in S\} = \text{Rein}(S)$$

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie

Def. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.

Eine Zerlegung (S, T) von $V(G)$ ist ein *s-t-Schnitt*, falls $s \in S$ und $t \in T$.





$$\text{Raus}(S) = \{uv \in E(G) \mid u \in S, v \in T\}$$

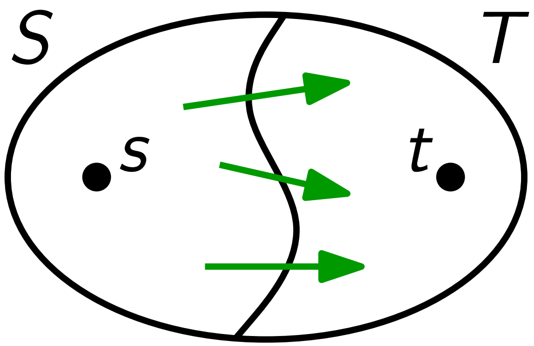
$$\{uv \in E(G) \mid u \in T, v \in S\} = \text{Rein}(S)$$

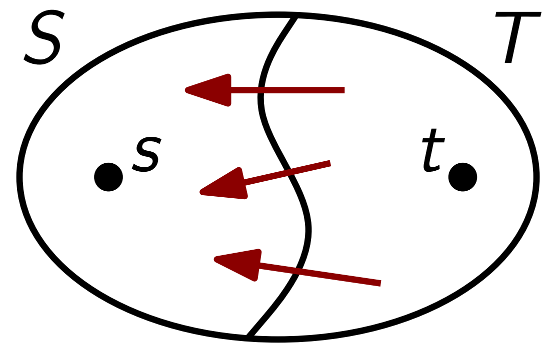
$$\text{Zufluss}_f(S) = f(\text{Rein}(S))$$

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie

Def. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.

Eine Zerlegung (S, T) von $V(G)$ ist ein *s-t-Schnitt*, falls $s \in S$ und $t \in T$.





$$\text{Raus}(S) = \{uv \in E(G) \mid u \in S, v \in T\}$$

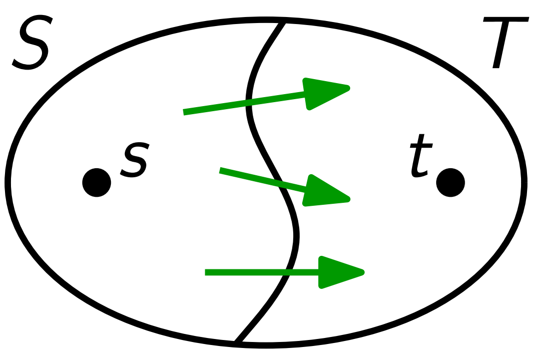
$$\{uv \in E(G) \mid u \in T, v \in S\} = \text{Rein}(S)$$

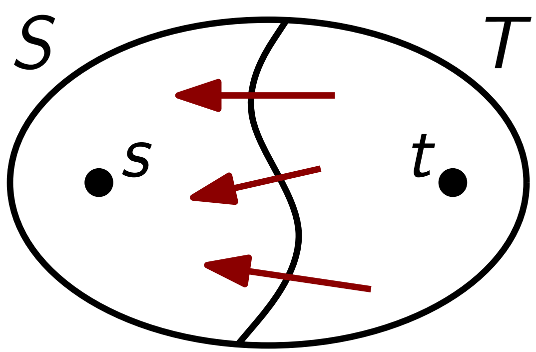
$$\text{Zufluss}_f(S) = f(\text{Rein}(S)) \; = \; \sum_{e \in \text{Rein}(S)} f(e)$$

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie

Def. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.

Eine Zerlegung (S, T) von $V(G)$ ist ein *s-t-Schnitt*, falls $s \in S$ und $t \in T$.





$$\text{Raus}(S) = \{uv \in E(G) \mid u \in S, v \in T\}$$

$$\{uv \in E(G) \mid u \in T, v \in S\} = \text{Rein}(S)$$

$$\text{Zufluss}_f(S) = f(\text{Rein}(S)) \;=\; \textstyle\sum_{e \in \text{Rein}(S)} f(e)$$

$$\text{Abfluss}_f(S) = f(\text{Raus}(S))$$

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie

Def. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.

Eine Zerlegung (S, T) von $V(G)$ ist ein *s-t-Schnitt*, falls $s \in S$ und $t \in T$.

$$\mathrm{Raus}(S) = \{uv \in E(G) \mid u \in S, v \in T\}$$

$$\{uv \in E(G) \mid u \in T, v \in S\} = \mathrm{Rein}(S)$$

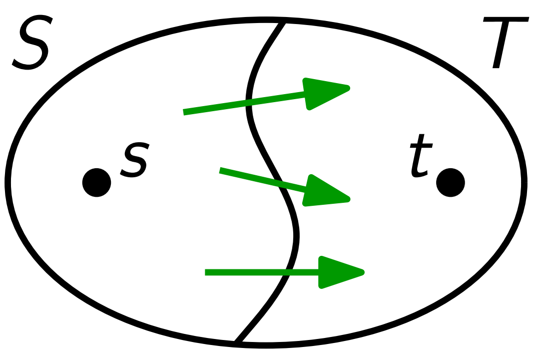
$$\mathrm{Zufluss}_f(S) = f(\mathrm{Rein}(S)) \;=\; \sum_{e \in \mathrm{Rein}(S)} f(e)$$

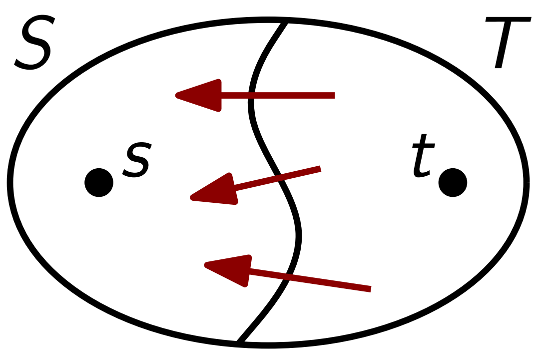
$$\mathrm{Abfluss}_f(S) = f(\mathrm{Raus}(S)) \;=\; \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} f(e)$$

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie

Def. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.

Eine Zerlegung (S, T) von $V(G)$ ist ein *s-t-Schnitt*, falls $s \in S$ und $t \in T$.





$$\text{Raus}(S) = \{uv \in E(G) \mid u \in S, v \in T\}$$

$$\{uv \in E(G) \mid u \in T, v \in S\} = \text{Rein}(S)$$

$$\text{Zufluss}_f(S) = f(\text{Rein}(S))$$

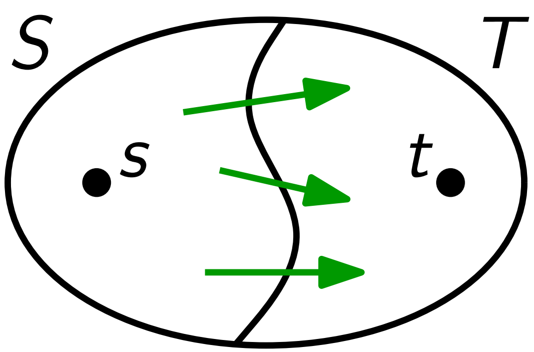
minus

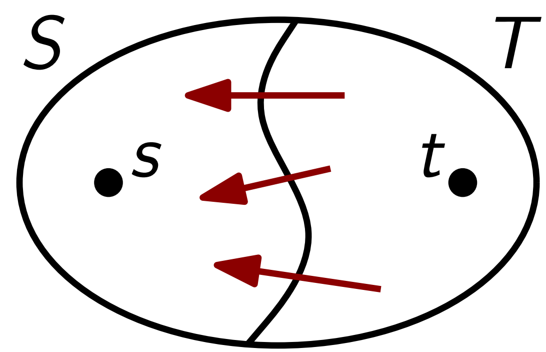
$$\text{Abfluss}_f(S) = f(\text{Raus}(S))$$

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie

Def. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.

Eine Zerlegung (S, T) von $V(G)$ ist ein *s-t-Schnitt*, falls $s \in S$ und $t \in T$.





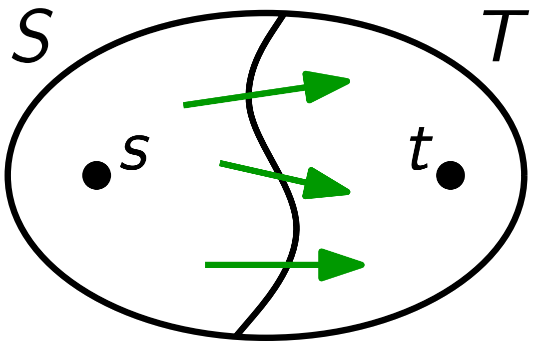
$$\mathrm{Raus}(S) = \{uv \in E(G) \mid u \in S, v \in T\}$$
$$\{uv \in E(G) \mid u \in T, v \in S\} = \mathrm{Rein}(S)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Zufluss}_f(S) = f(\mathrm{Rein}(S)) \\ \qquad\qquad \textit{minus} \\ \mathrm{Abfluss}_f(S) = f(\mathrm{Raus}(S)) \end{array}\right\} =: \mathrm{Nettozufluss}_f(S)$$

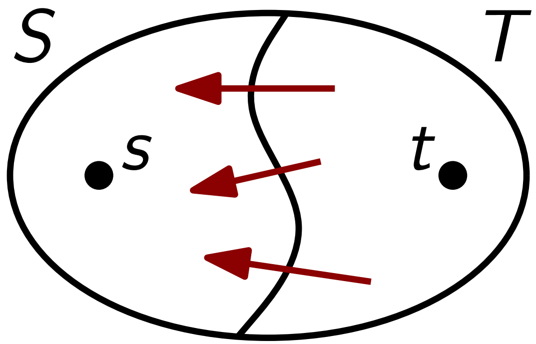
Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$

$\text{Raus}(S) \subseteq E$

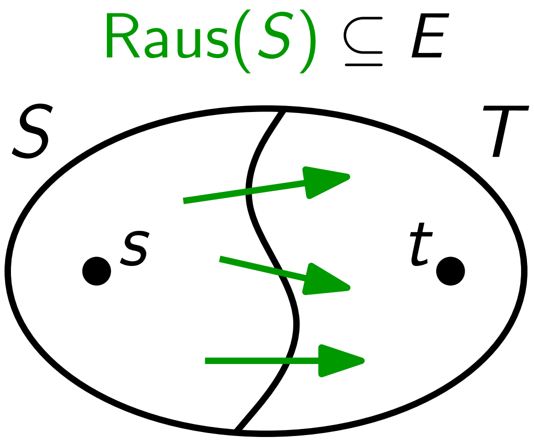


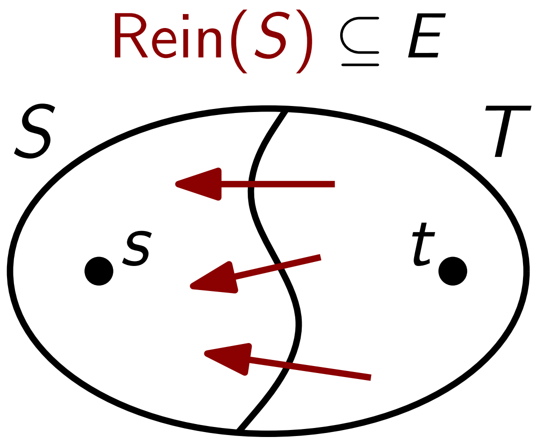
$\text{Rein}(S) \subseteq E$



Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$





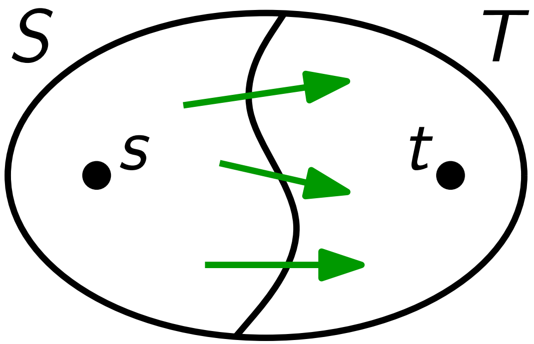
Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) =$$

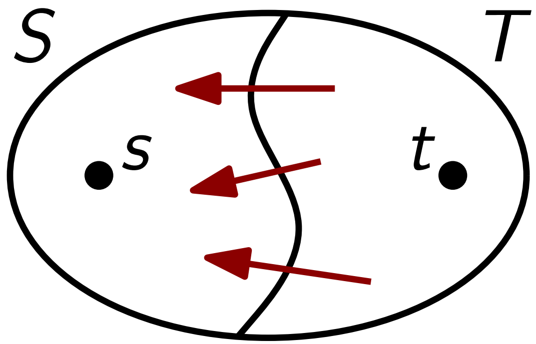
Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$

$\text{Raus}(S) \subseteq E$



$\text{Rein}(S) \subseteq E$



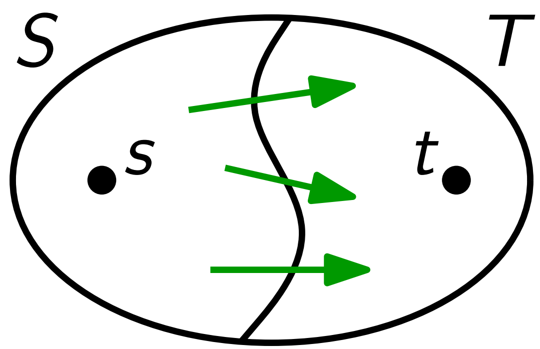
Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S}$$

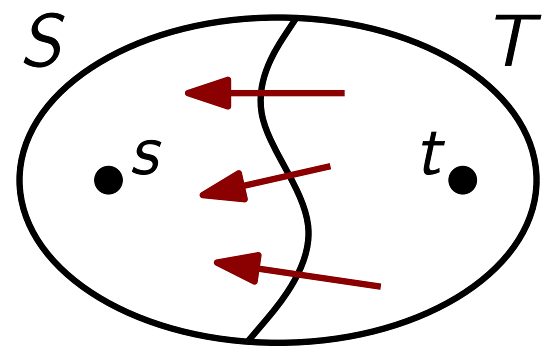
Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$

$\text{Raus}(S) \subseteq E$



$\text{Rein}(S) \subseteq E$

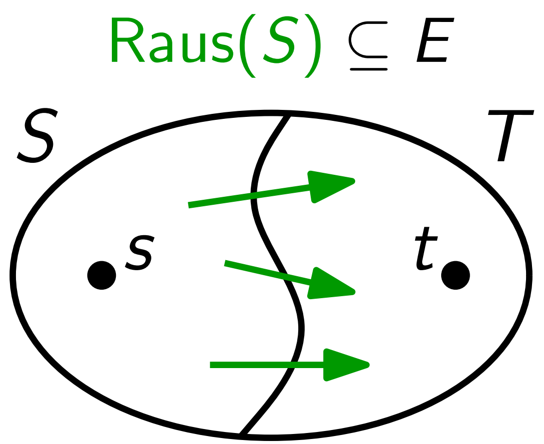


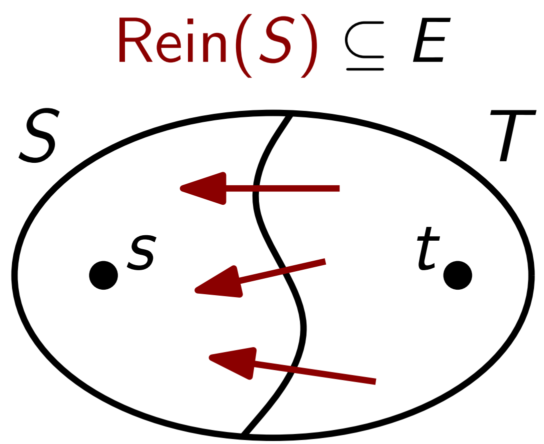
Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$





Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufl}_f(v) =$

Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$

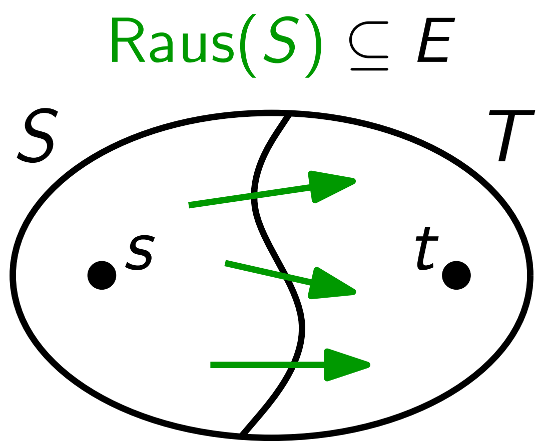
Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

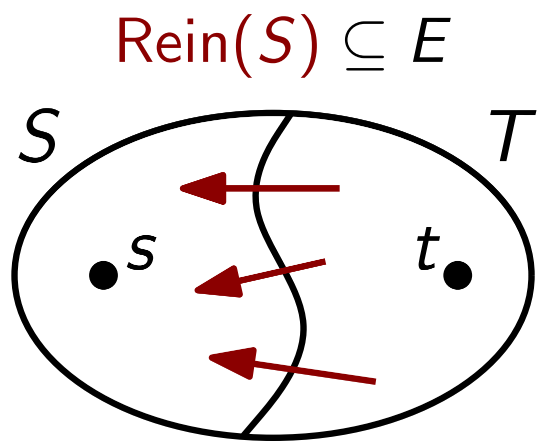
$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \textstyle\sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufl}_f(v) = \sum_{v \in S} (\text{Zufluss}_f(v) - \text{Abfluss}_f(v))$

Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$





Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufl}_f(v) = \sum_{v \in S} (\text{Zufluss}_f(v) - \text{Abfluss}_f(v))$

$$= \sum_{v \in S} \Big(\sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) \Big)$$

Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$

Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \textstyle\sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

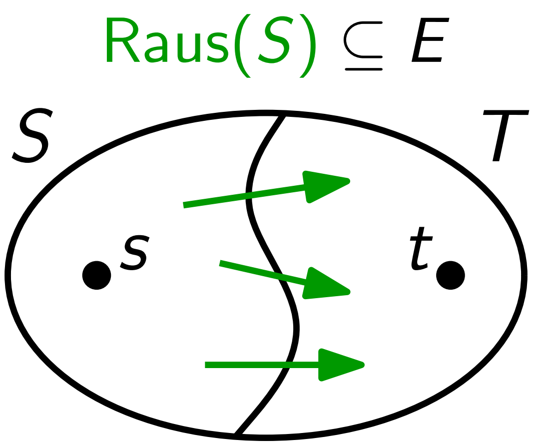
Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufl}_f(v) = \sum_{v \in S} (\text{Zufluss}_f(v) - \text{Abfluss}_f(v))$

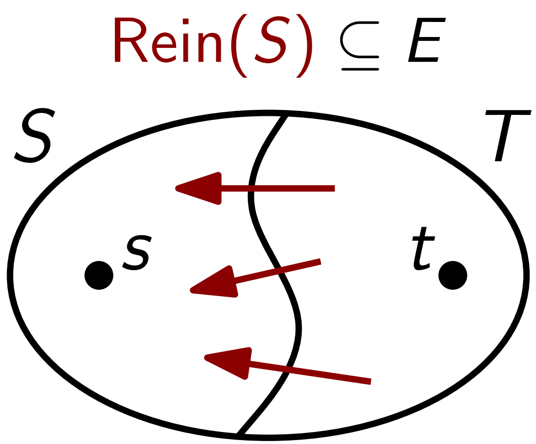
$$= \textstyle\sum_{v \in S} \big(\sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) \big)$$

$$=$$

Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$

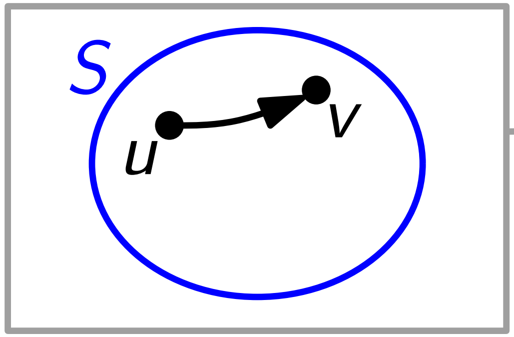




Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufl}_f(v) = \sum_{v \in S} (\text{Zufluss}_f(v) - \text{Abfluss}_f(v))$

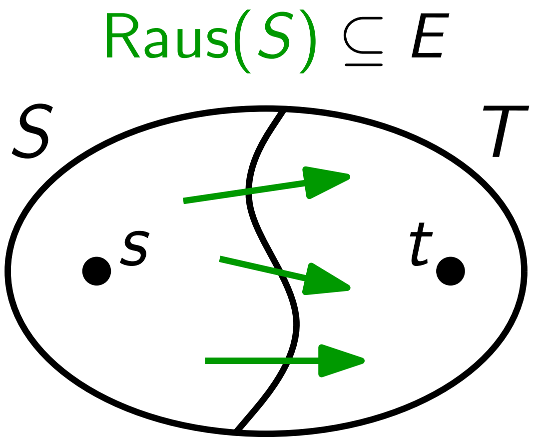


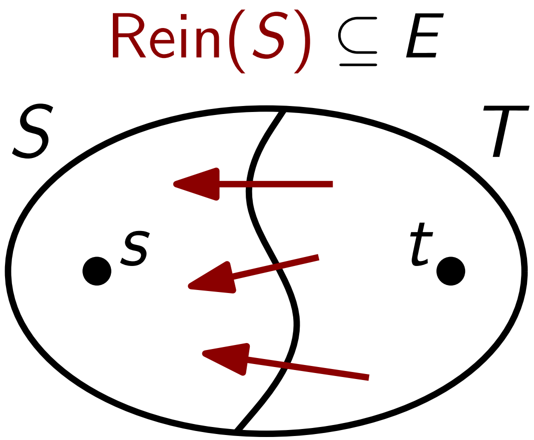
$$= \sum_{v \in S} \Big(\sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) \Big)$$

$$=$$

Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$





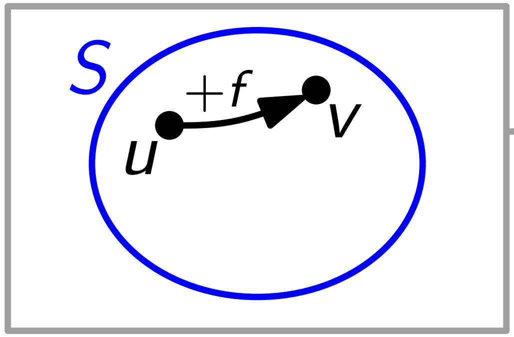
Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufl}_f(v) = \sum_{v \in S} (\text{Zufluss}_f(v) - \text{Abfluss}_f(v))$

$$= \sum_{v \in S} \Big(\sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) \Big)$$

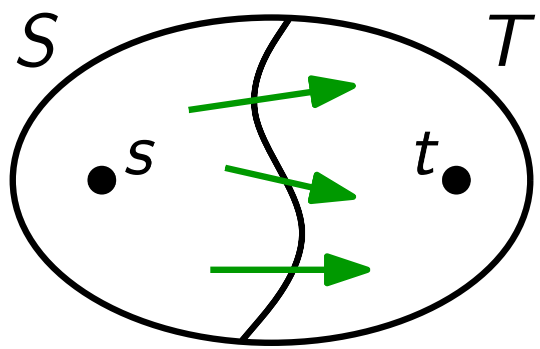
$$=$$



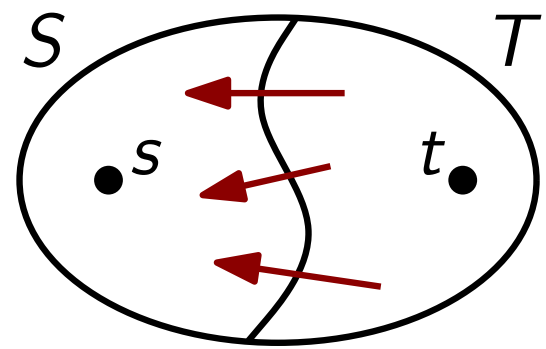
Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$

$\text{Raus}(S) \subseteq E$



$\text{Rein}(S) \subseteq E$

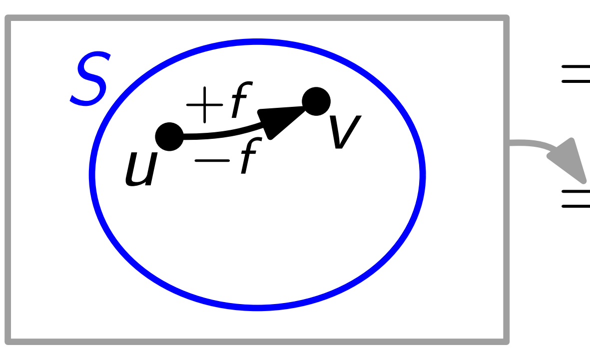


Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \textstyle\sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufl}_f(v) = \sum_{v \in S} (\text{Zufluss}_f(v) - \text{Abfluss}_f(v))$

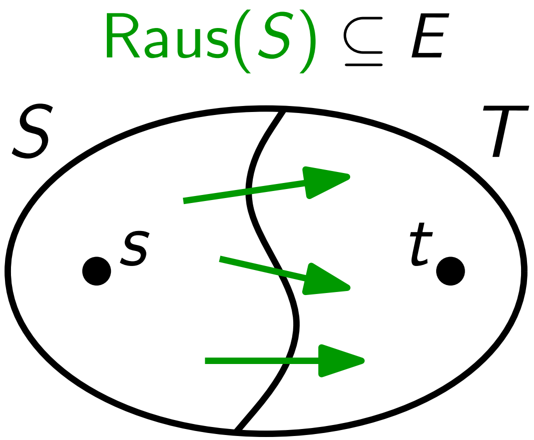
$$= \textstyle\sum_{v \in S} \Big(\sum_{u:\ v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) \Big)$$

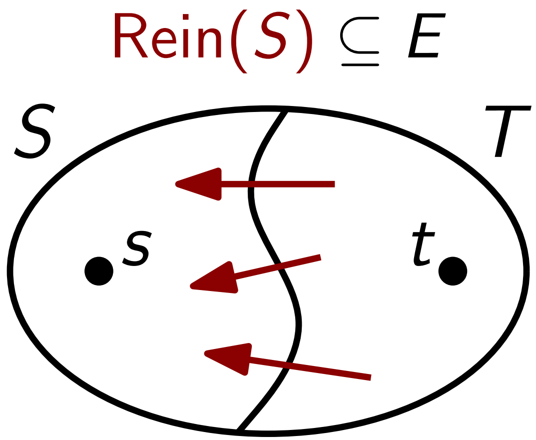


$=$

Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$

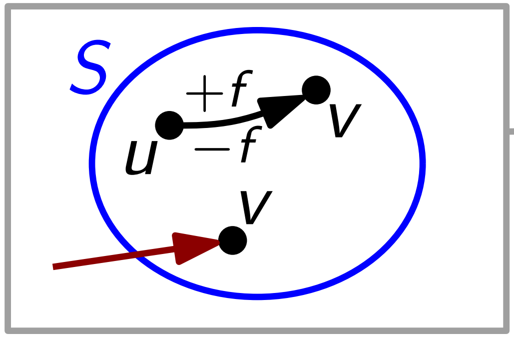




Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufl}_f(v) = \sum_{v \in S} (\text{Zufluss}_f(v) - \text{Abfluss}_f(v))$



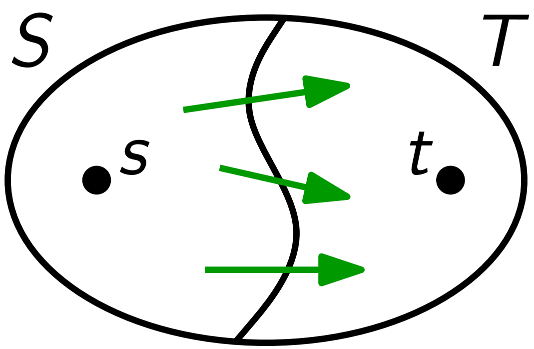
$$= \sum_{v \in S} \Big(\sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) \Big)$$

$$=$$

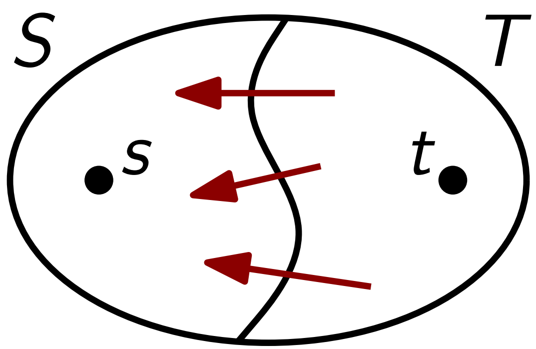
Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$

$\text{Raus}(S) \subseteq E$



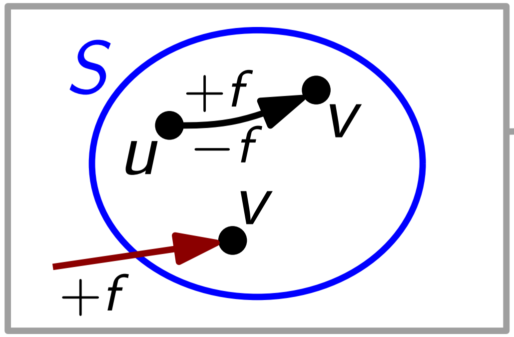
$\text{Rein}(S) \subseteq E$



Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufl}_f(v) = \sum_{v \in S} (\text{Zufluss}_f(v) - \text{Abfluss}_f(v))$

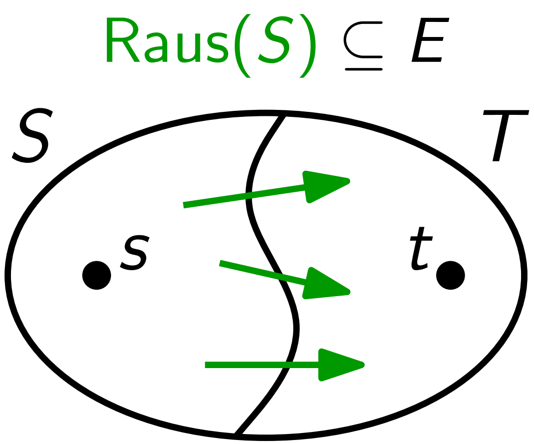


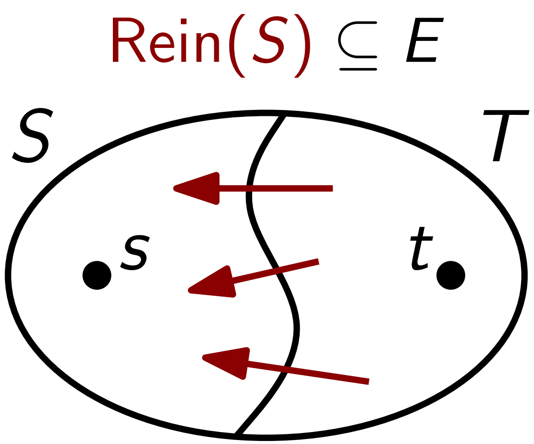
$$= \sum_{v \in S} \Big(\sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) \Big)$$

$=$

Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$



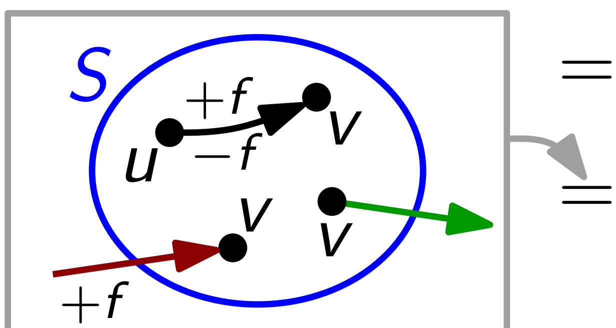


Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufl}_f(v) = \sum_{v \in S} (\text{Zufluss}_f(v) - \text{Abfluss}_f(v))$

$$= \sum_{v \in S} \Big(\sum_{u:\ v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) \Big)$$

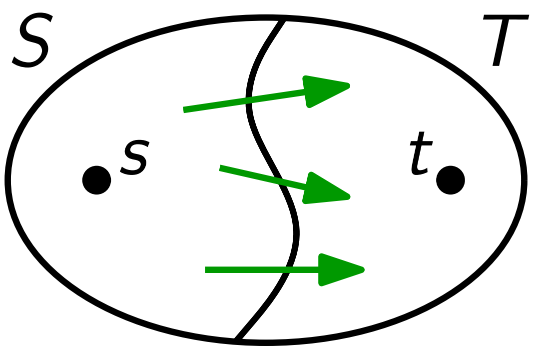


$=$

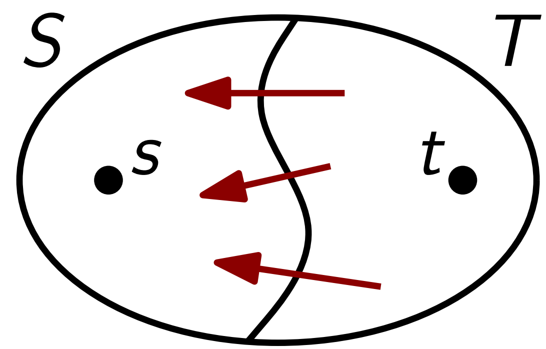
Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$

$\text{Raus}(S) \subseteq E$



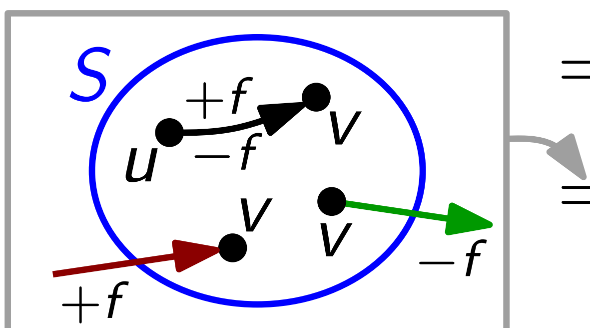
$\text{Rein}(S) \subseteq E$



Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufl}_f(v) = \sum_{v \in S} (\text{Zufluss}_f(v) - \text{Abfluss}_f(v))$

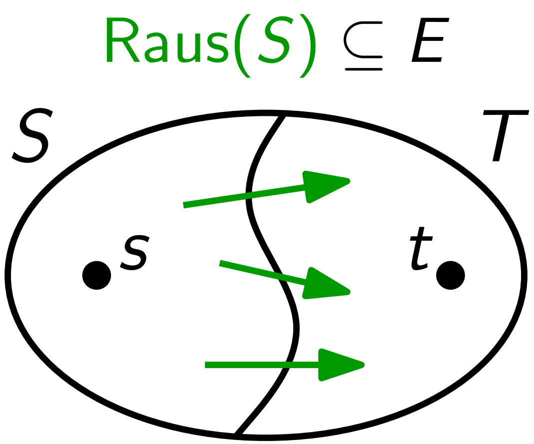


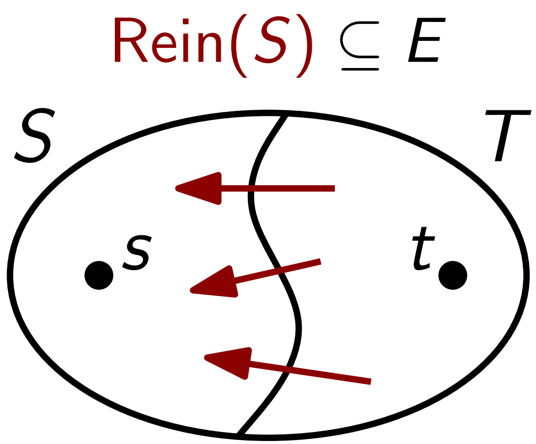
$= \sum_{v \in S} \left(\sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) \right)$

$=$

Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$

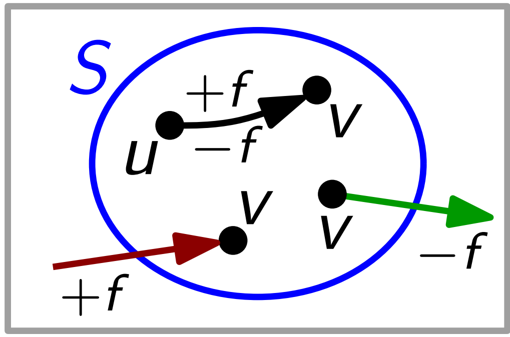




Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \textstyle\sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufl}_f(v) = \sum_{v \in S} (\text{Zufluss}_f(v) - \text{Abfluss}_f(v))$



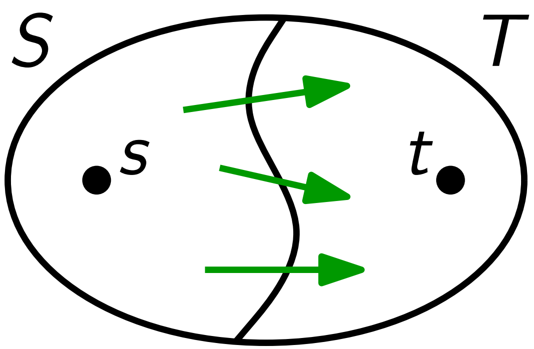
$$= \textstyle\sum_{v \in S} \big(\sum_{u\colon v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) \big)$$

$$= \sum_{e \in \text{Rein}(S)} f(e) - \sum_{e \in \text{Raus}(S)} f(e)$$

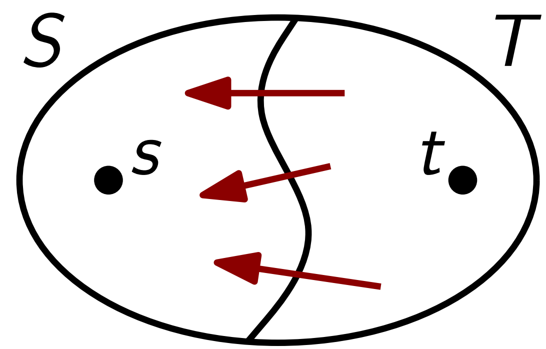
Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\mathrm{Nettozufluss}_f(S) := f(\mathrm{Rein}(S)) - f(\mathrm{Raus}(S))$

$\mathrm{Raus}(S) \subseteq E$



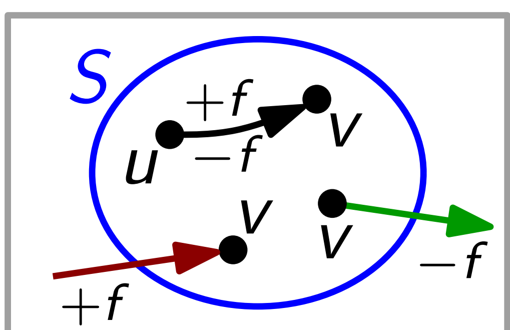
$\mathrm{Rein}(S) \subseteq E$



Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f \colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\mathrm{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \mathrm{Nettozufluss}_f(v).$$

Beweis. $\sum_{v \in S} \mathrm{Nettozufl}_f(v) = \sum_{v \in S} (\mathrm{Zufluss}_f(v) - \mathrm{Abfluss}_f(v))$



$$= \sum_{v \in S} \Big(\sum_{u \colon v \in \mathrm{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \mathrm{Adj}[v]} f(vw) \Big)$$

$$= \sum_{e \in \mathrm{Rein}(S)} f(e) - \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} f(e) = \mathrm{Nettozufluss}_f(S)$$

□

Noch mehr Schnitte

Lemma[1]. Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:
$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Noch mehr Schnitte

Lemma[1]. Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:
$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| =$

Noch mehr Schnitte

Lemma[1]. Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f \colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:
$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt. Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T)$.

Noch mehr Schnitte

Lemma[1]. Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:
$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt. Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T)$.

Beweis. $|f| =_{\text{Def.}}$

Noch mehr Schnitte

Lemma[1]. Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:
$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v)$.

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T)$.

Beweis.

$$\begin{aligned} |f| &=_{\text{Def.}} \text{Nettozufluss}_f(t) \\ &= \end{aligned}$$

Noch mehr Schnitte

Lemma[1]. Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:
$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v)$.

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T)$.

Beweis.
$$\begin{aligned} |f| &=_{\text{Def.}} \text{Nettozufluss}_f(t) \\ &= \sum_{v \in T} \text{Nettozufluss}_f(v) \end{aligned}$$

Noch mehr Schnitte

Lemma[1]. Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:
$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v)$.

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T)$.

Beweis.
$$\begin{aligned} |f| &=_{\text{Def.}} \text{Nettozufluss}_f(t) \\ &= \sum_{v \in T} \text{Nettozufluss}_f(v) \end{aligned}$$
da $\text{Nettozufluss}_f(v) = 0$ für alle $v \neq s, t$

Noch mehr Schnitte

Lemma[1]. Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:
$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v)$.

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T)$.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
|f| &=_{\text{Def.}} \text{Nettozufluss}_f(t) \\
&= \sum_{v \in T} \text{Nettozufluss}_f(v) \\
&\quad \text{da } \text{Nettozufluss}_f(v) = 0 \text{ für alle } v \neq s, t \\
&=
\end{aligned}
$$

Noch mehr Schnitte

Lemma[1]. Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:
$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T)$.

Beweis.
$$\begin{aligned} |f| &=_{\text{Def.}} \text{Nettozufluss}_f(t) \\ &= \sum_{v \in T} \text{Nettozufluss}_f(v) \\ &\qquad \text{da } \text{Nettozufluss}_f(v) = 0 \text{ für alle } v \neq s, t \\ &= \end{aligned}$$

Noch mehr Schnitte

Lemma[1]. Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:
$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T)$.

Beweis.
$$\begin{aligned}
|f| &=_{\text{Def.}} \text{Nettozufluss}_f(t) \\
&= \sum_{v \in T} \text{Nettozufluss}_f(v) \\
&\ \text{da } \text{Nettozufluss}_f(v) = 0 \text{ für alle } v \neq s, t \\
&= \text{Nettozufluss}_f(T)
\end{aligned}$$
$\square$

Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T)$

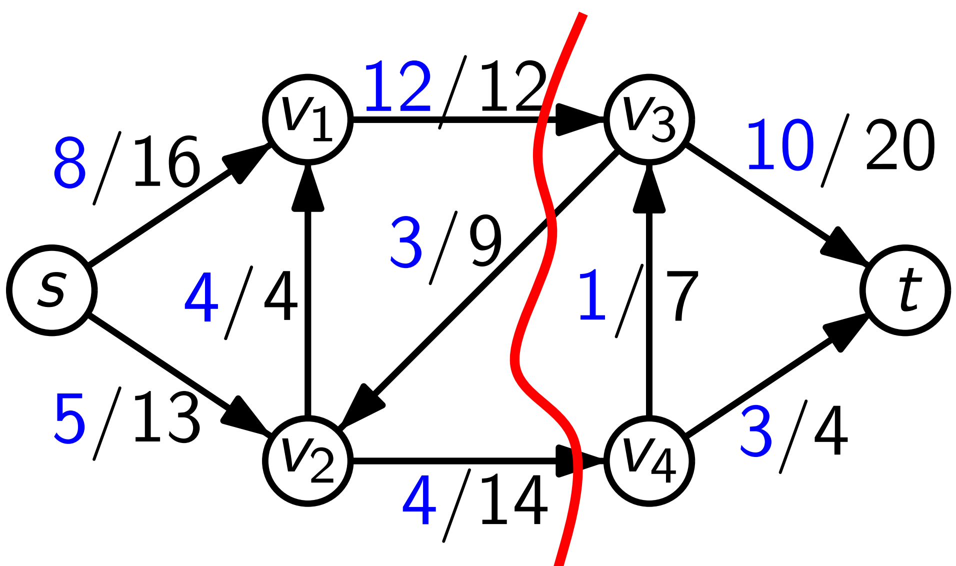
Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

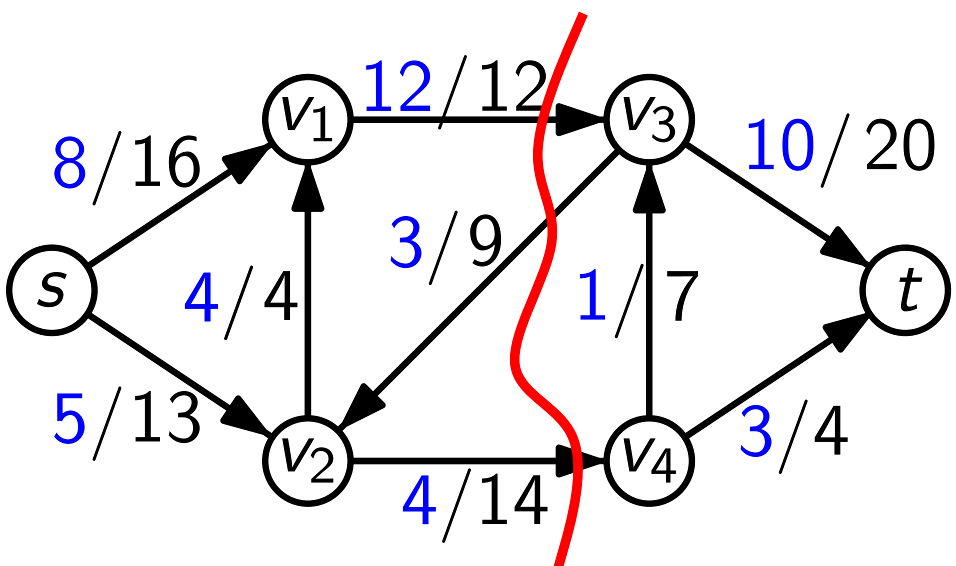
Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).



Kapazität von Schnitten

Lemma[2]**.** G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

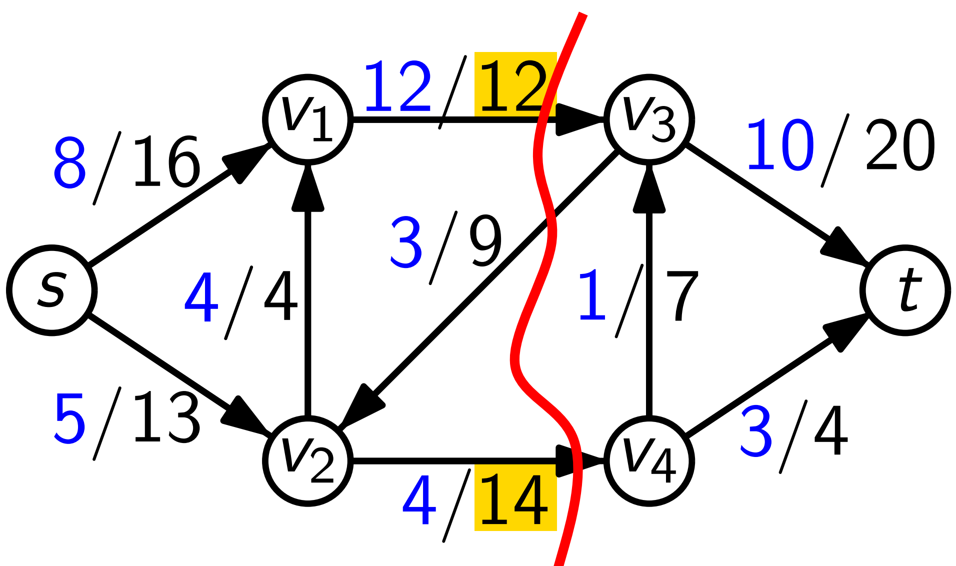
Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).



Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

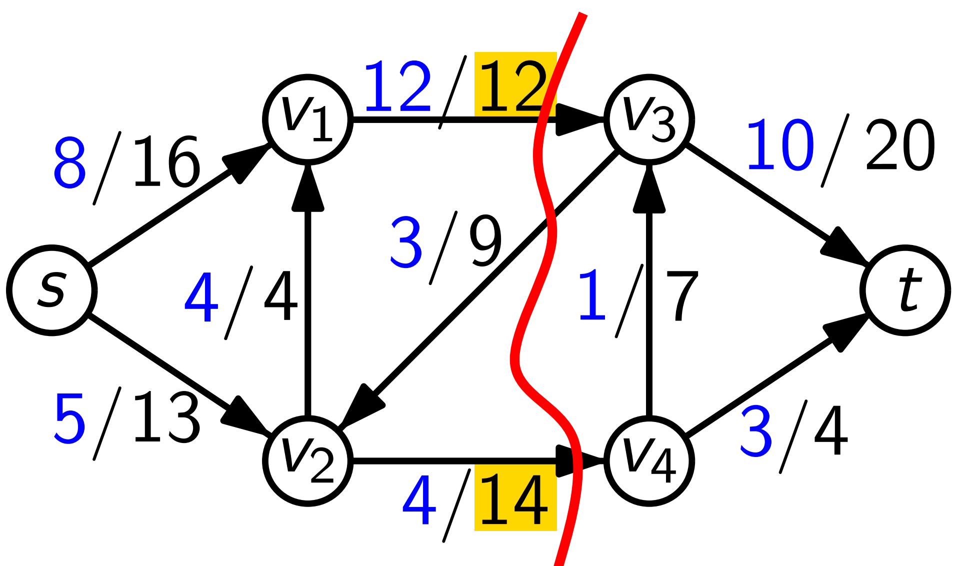


Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

Lemma[3]. f zuläss. s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \le c(S)$.



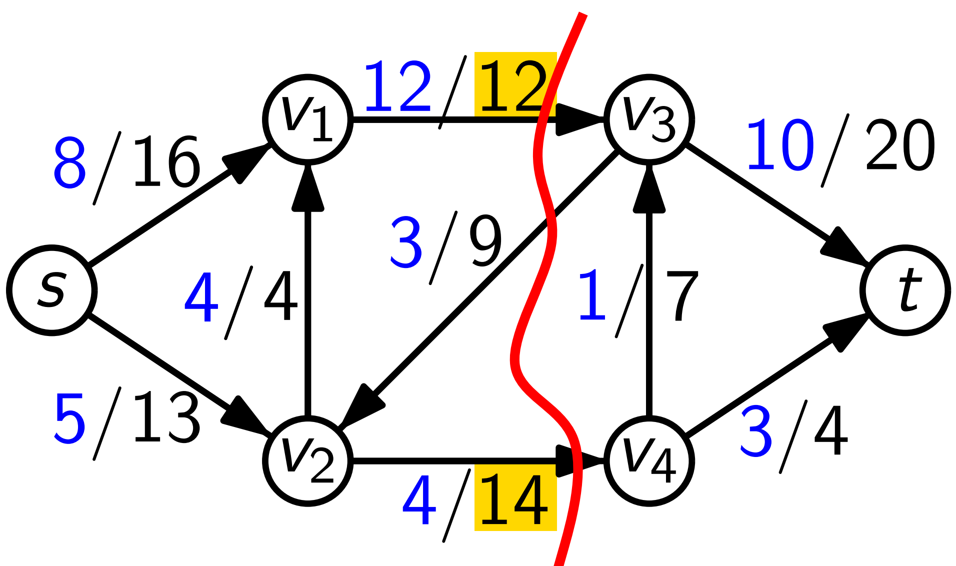
Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

Lemma[3]. f zuläss. s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \leq c(S)$.

Beweis. $|f| =$



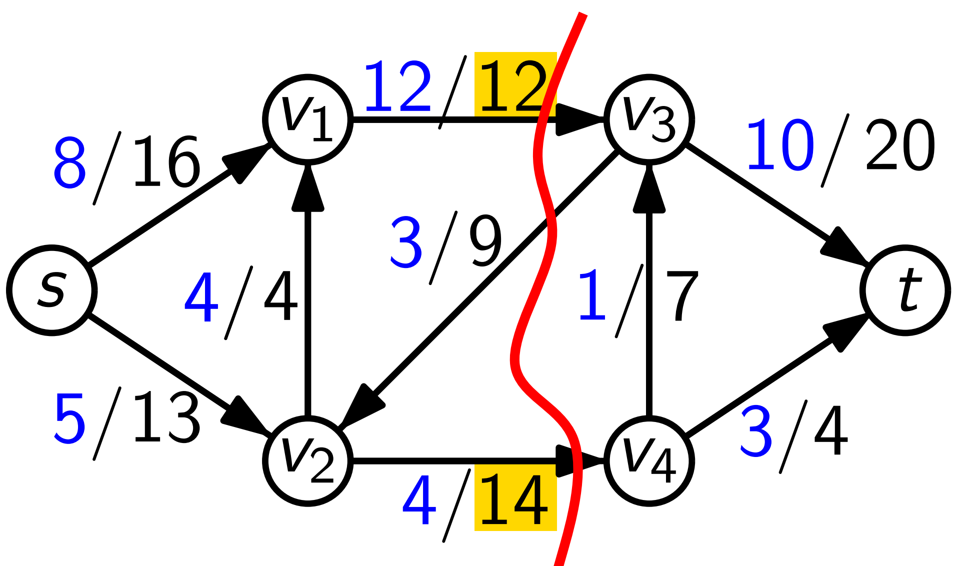
Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

Lemma[3]. f zuläss. s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \le c(S)$.

Beweis. $|f| =$



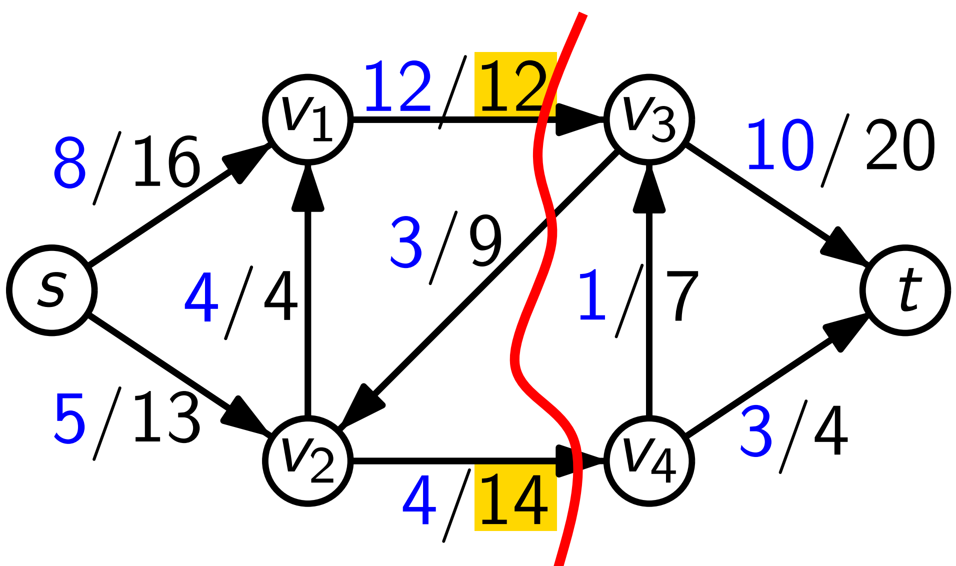
Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

Lemma[3]. f zuläss. s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \le c(S)$.

Beweis. $|f| = \text{Nettoabfluss}_f(S) =$



Kapazität von Schnitten

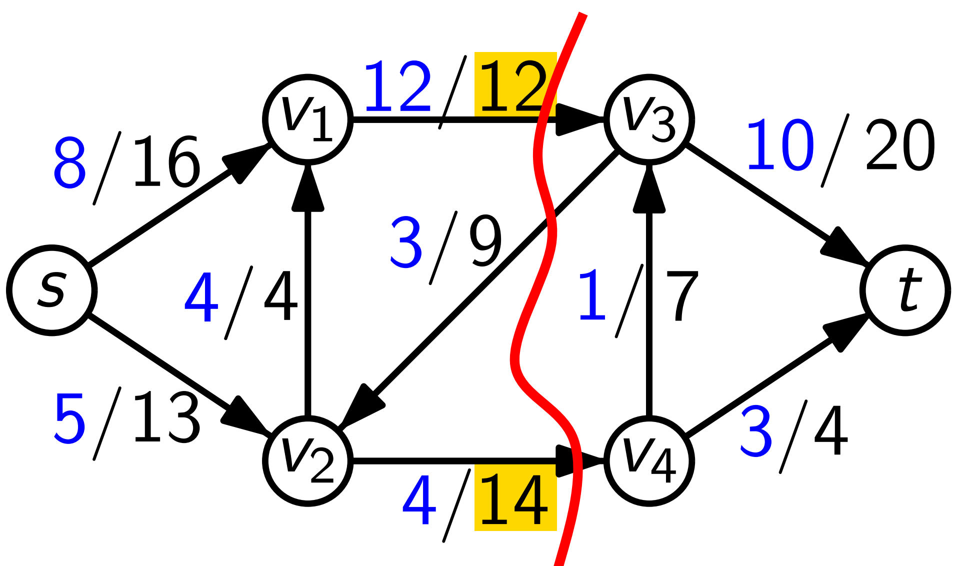
Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

Lemma[3]. f zuläss. s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \leq c(S)$.

Beweis. $|f| = \text{Nettoabfluss}_f(S) = f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S))$

$\leq$



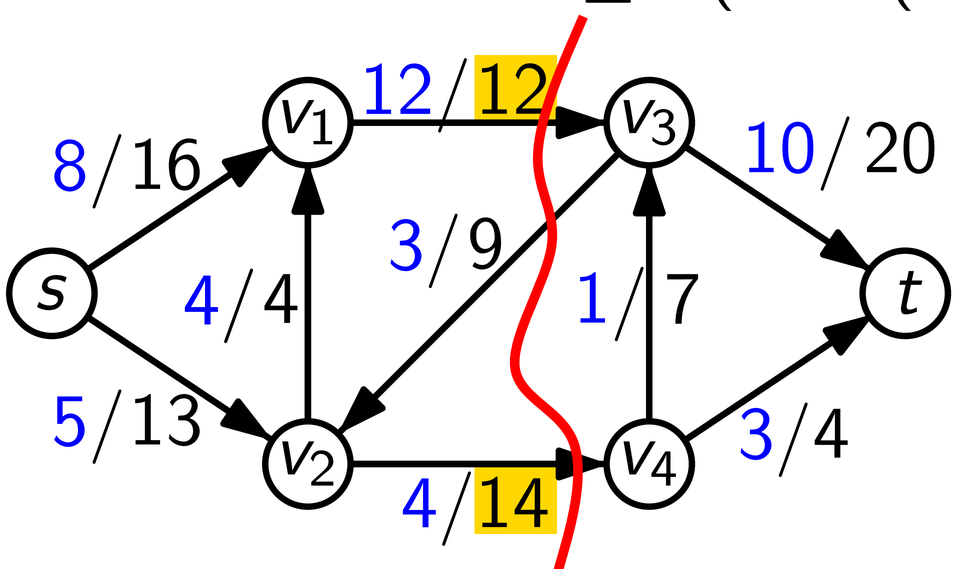
Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

Lemma[3]. f zuläss. s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \le c(S)$.

Beweis. $|f| = \text{Nettoabfluss}_f(S) = f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S))$
$\le f(\text{Raus}(S)) \le$



Kapazität von Schnitten

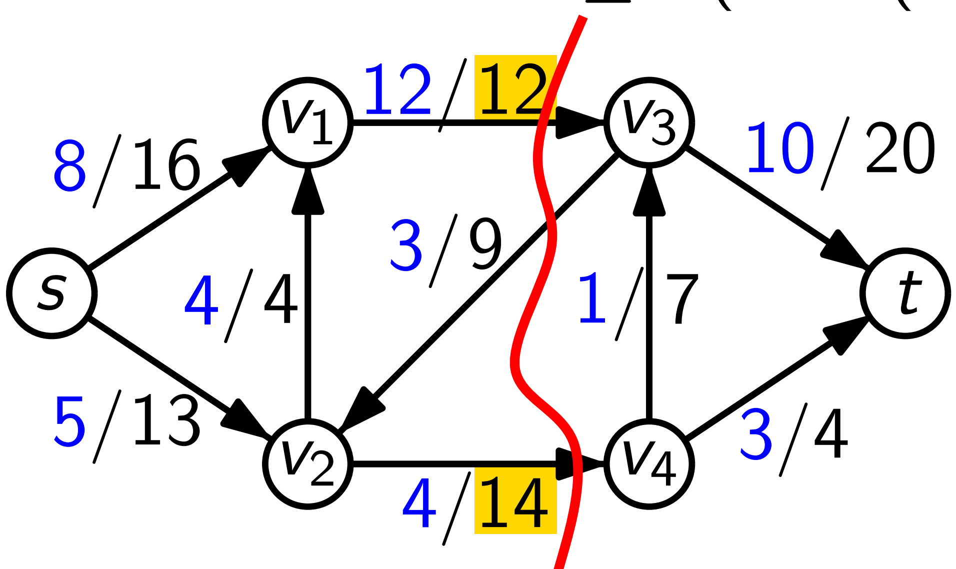
Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

Lemma[3]. f zuläss. s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \le c(S)$.

Beweis.

$$|f| = \text{Nettoabfluss}_f(S) = f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S)) \le f(\text{Raus}(S)) \le c(\text{Raus}(S)) =$$



Kapazität von Schnitten

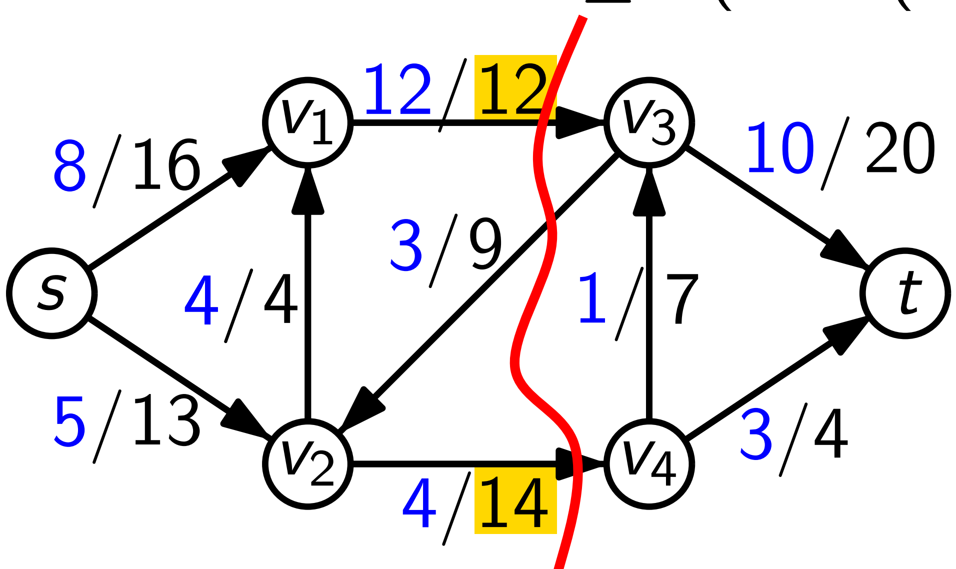
Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

Lemma[3]. f zuläss. s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \le c(S)$.

Beweis.

$$|f| = \text{Nettoabfluss}_f(S) = f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S)) \le f(\text{Raus}(S)) \le c(\text{Raus}(S)) = c(S) \qquad \square$$



Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

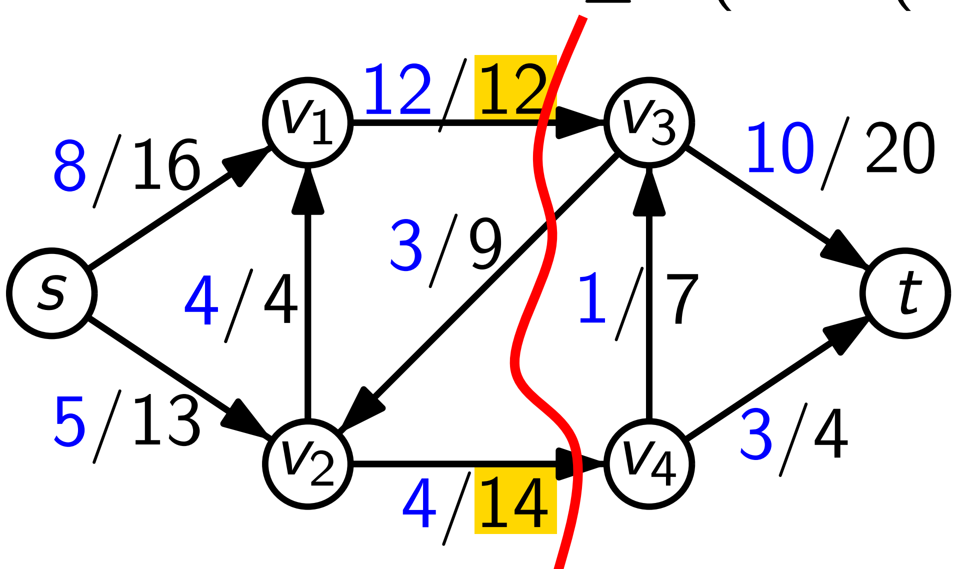
Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

Lemma[3]. f zuläss. s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \le c(S)$.

Beweis.
$$\begin{aligned} |f| = \text{Nettoabfluss}_f(S) &= f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S)) \\ &\le f(\text{Raus}(S)) \le c(\text{Raus}(S)) \\ &= c(S) \qquad \square \end{aligned}$$

Speziell:

$\min_S c(S) \ge \max_f |f|$



Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

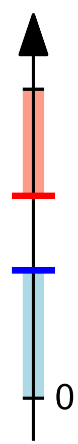
Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

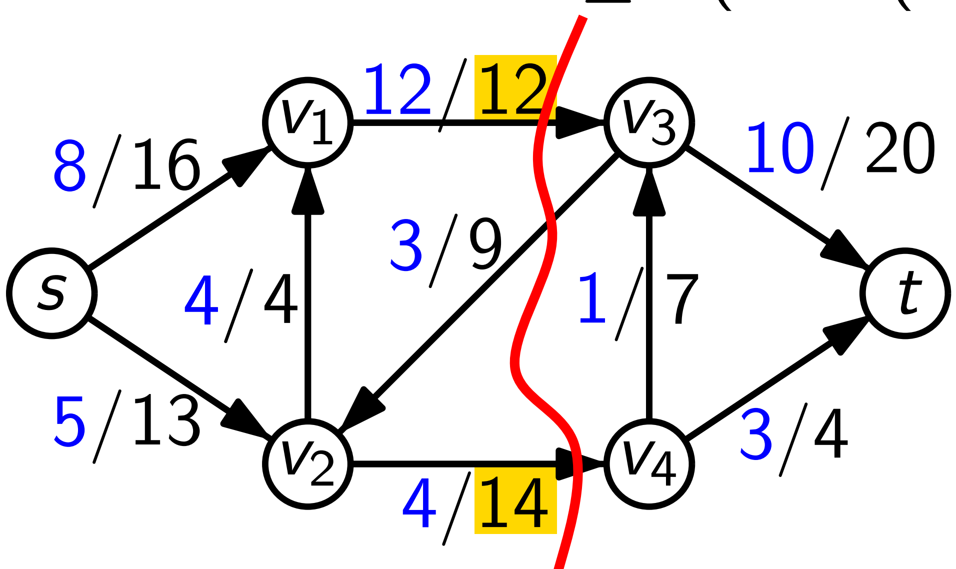
Lemma[3]. f zuläss. s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \le c(S)$.

Beweis.
$$\begin{aligned} |f| &= \text{Nettoabfluss}_f(S) = f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S)) \\ &\le f(\text{Raus}(S)) \le c(\text{Raus}(S)) \\ &= c(S) \end{aligned}$$ $\square$

Speziell:

$\min_S c(S)$
$\ge \max_f |f|$





Kapazität von Schnitten

Lemma[2]**.** G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt. Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

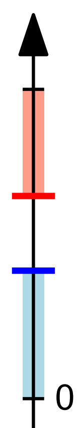
Def. G Graph mit Kap. $c \colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt. Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

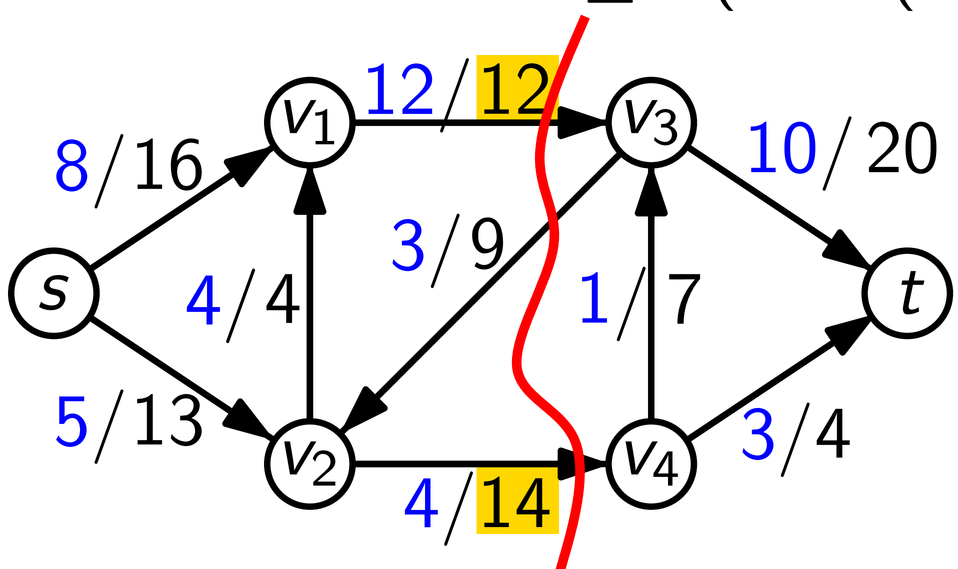
Lemma[3]**.** f zuläss. s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \leq c(S)$.

Beweis.
$$\begin{aligned} |f| = \text{Nettoabfluss}_f(S) &= f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S)) \\ &\leq f(\text{Raus}(S)) \leq c(\text{Raus}(S)) \\ &\qquad\qquad\qquad = c(S) \end{aligned}$$
$\square$

Speziell:

$\min_S \, c(S)$
$\geq \max_f \, |f|$





Korollar.
Wenn
$|f| = c(S)$
$\Rightarrow$

Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

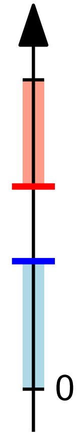
Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

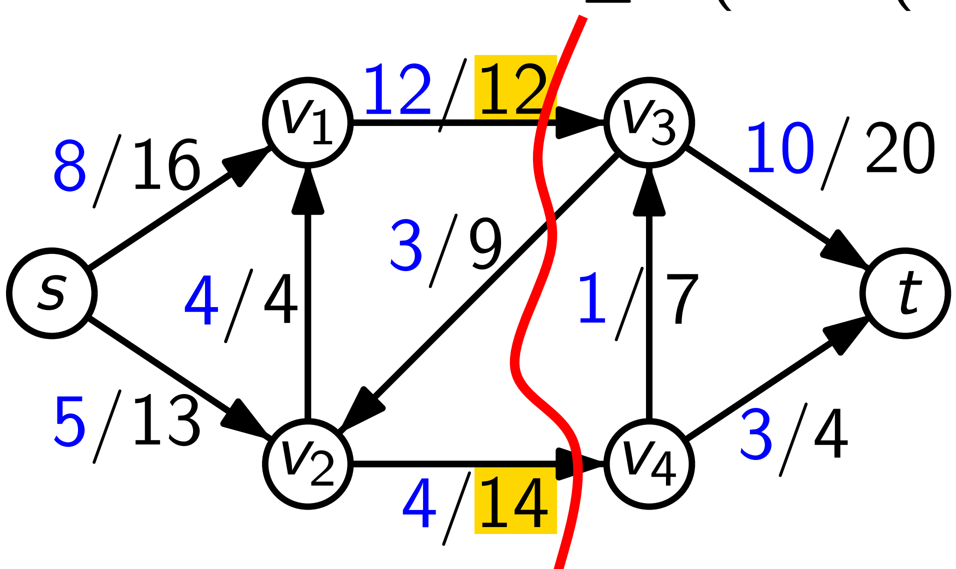
Lemma[3]. f zuläss. s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \le c(S)$.

Beweis.
$$|f| = \text{Nettoabfluss}_f(S) = f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S)) \le f(\text{Raus}(S)) \le c(\text{Raus}(S)) = c(S) \qquad \square$$

Speziell:

$\min_S c(S) \ge \max_f |f|$





Korollar. Wenn $|f| = c(S)$ $\Rightarrow$ f max.,

Kapazität von Schnitten

Lemma². G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

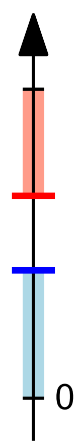
Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

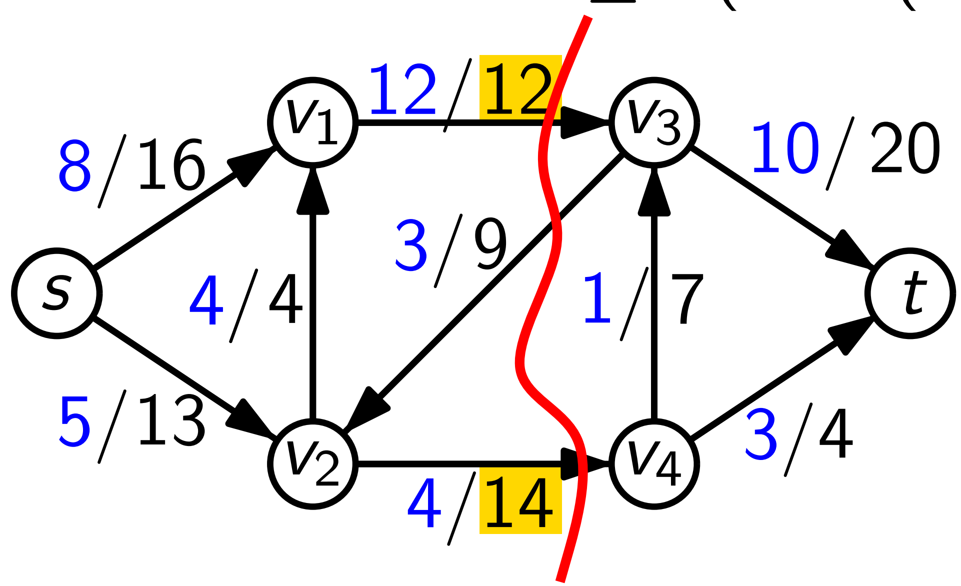
Lemma³. f zuläss. s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \le c(S)$.

Beweis.
$$\begin{aligned} |f| = \text{Nettoabfluss}_f(S) &= f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S)) \\ &\le f(\text{Raus}(S)) \le c(\text{Raus}(S)) \\ &= c(S) \end{aligned}$$ $\square$

Speziell:

$\min_S c(S) \ge \max_f |f|$





Korollar. Wenn $|f| = c(S)$ $\Rightarrow$ f max., (S,T) min.

Kapazität von Schnitten

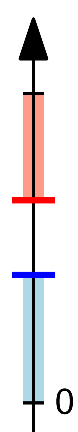
Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

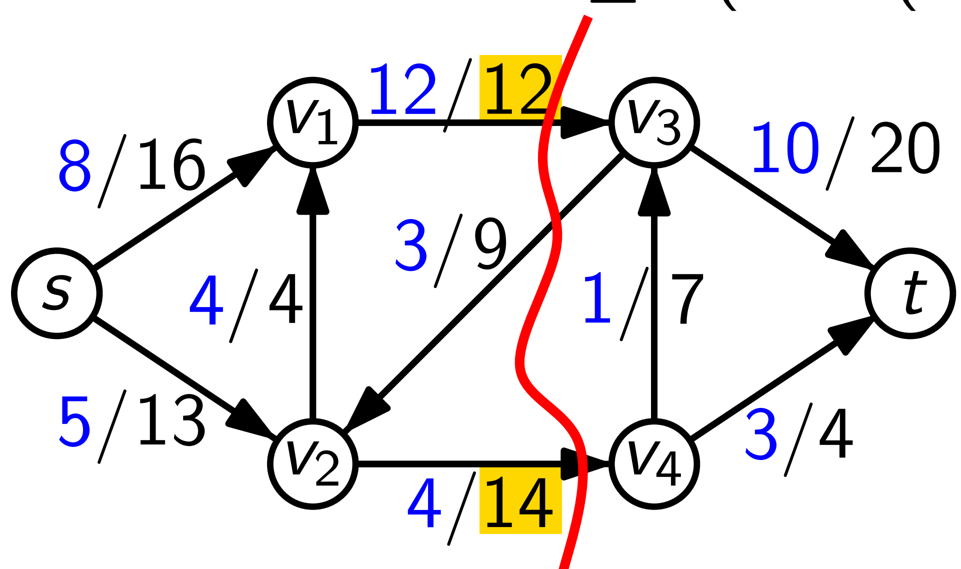
Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

Lemma[3]. f zuläss. s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \le c(S)$.

Beweis.
$$\begin{aligned} |f| = \text{Nettoabfluss}_f(S) &= f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S)) \\ &\le f(\text{Raus}(S)) \le c(\text{Raus}(S)) \\ &= c(S) \qquad \square \end{aligned}$$

Speziell:
$\min_S \boxed{c(S)}$
$\ge \max_f \boxed{|f|}$





Korollar.
Wenn $|f| = c(S)$
$\Rightarrow$ f max., (S,T) min.

!!

Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

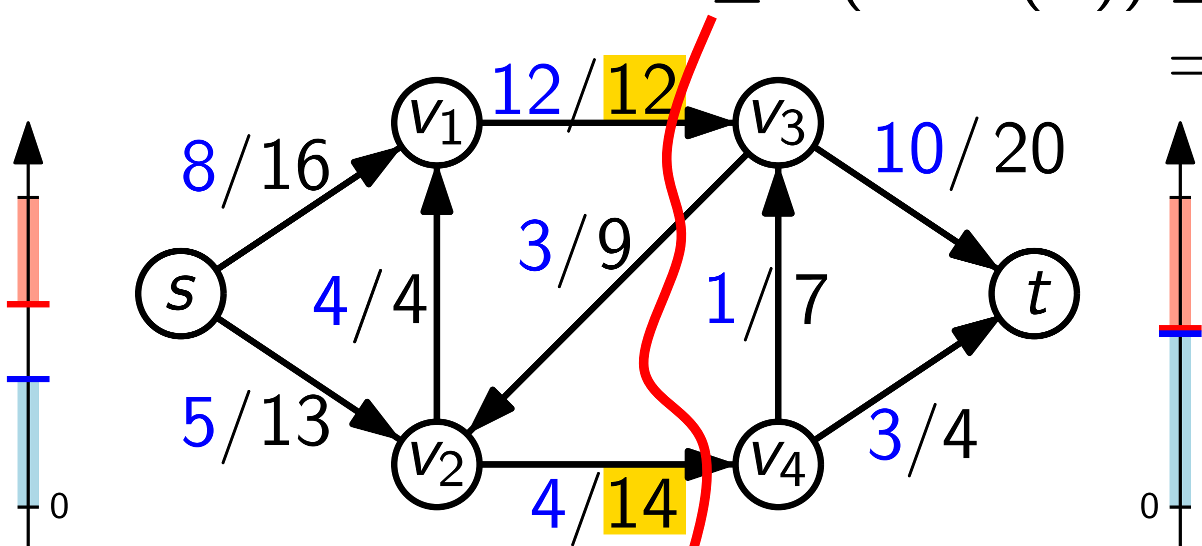
Def. G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S,T) s-t-Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S,T).

Lemma[3]. f zuläss. s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \le c(S)$.

Beweis.
$$\begin{aligned} |f| &= \text{Nettoabfluss}_f(S) = f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S)) \\ &\le f(\text{Raus}(S)) \le c(\text{Raus}(S)) \\ &= c(S) \end{aligned}$$
$\square$

Speziell:

$\min_S c(S) \ge \max_f |f|$

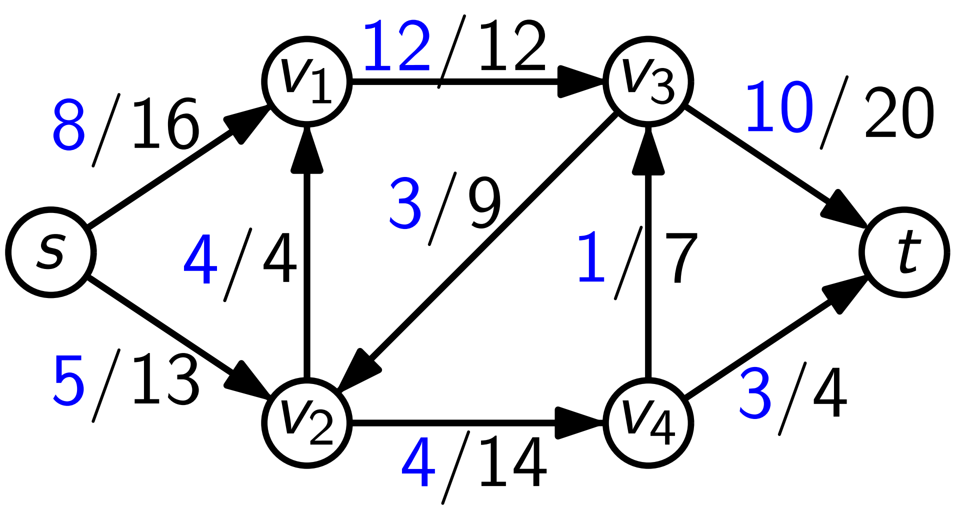


Korollar. Wenn $|f| = c(S)$ $\Rightarrow$ f max., (S,T) min.

!!

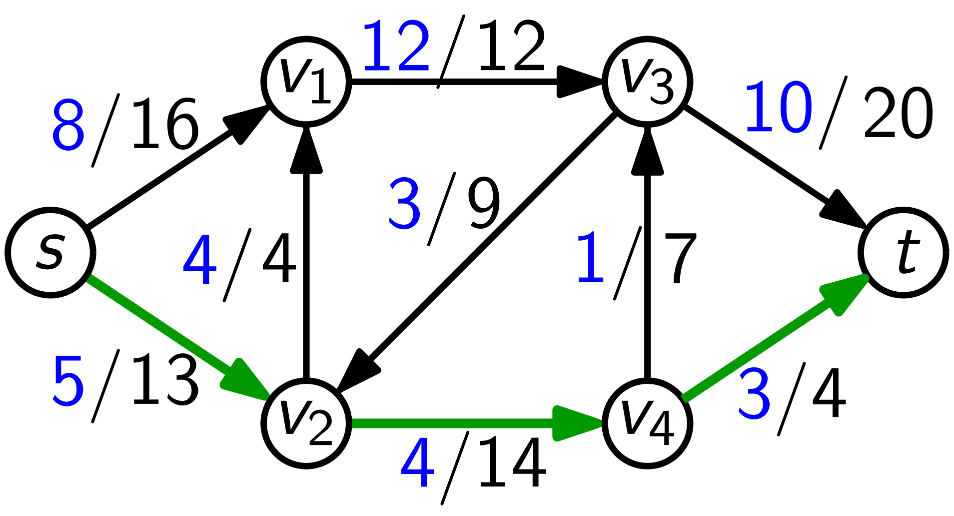
Residualnetz

Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



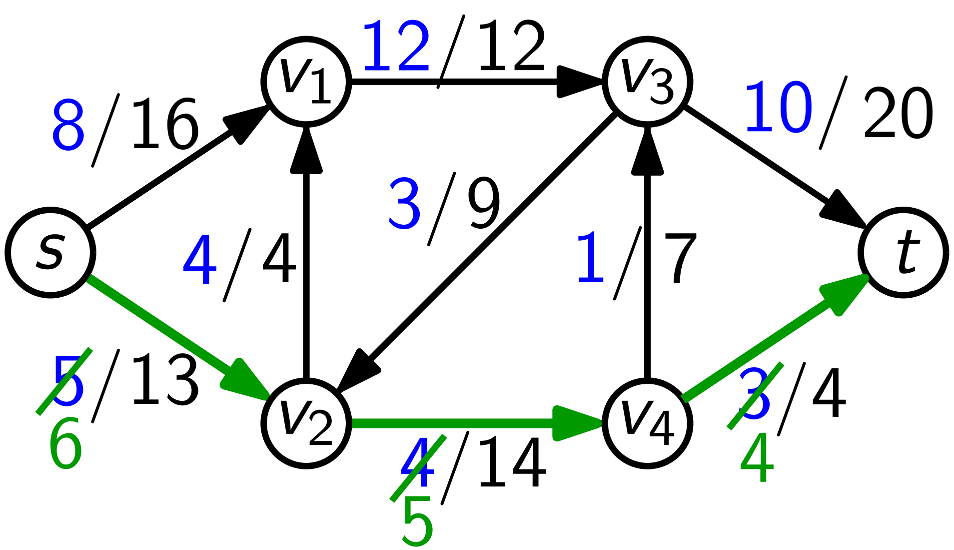
Residualnetz

Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



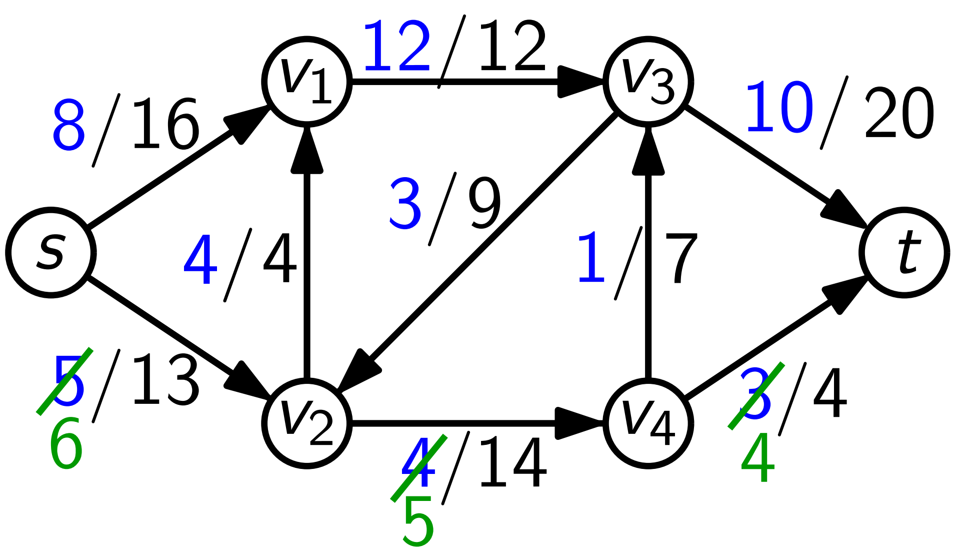
Residualnetz

Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



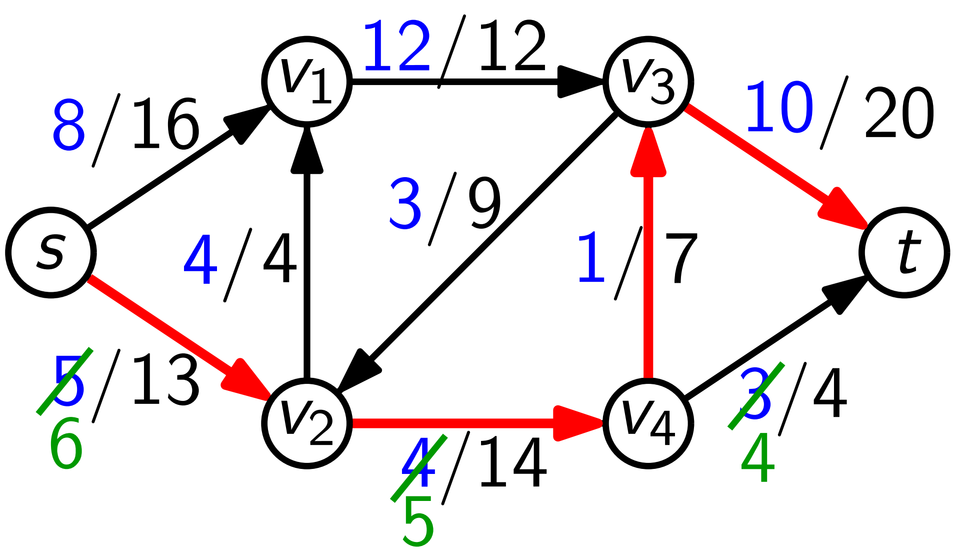
Residualnetz

Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



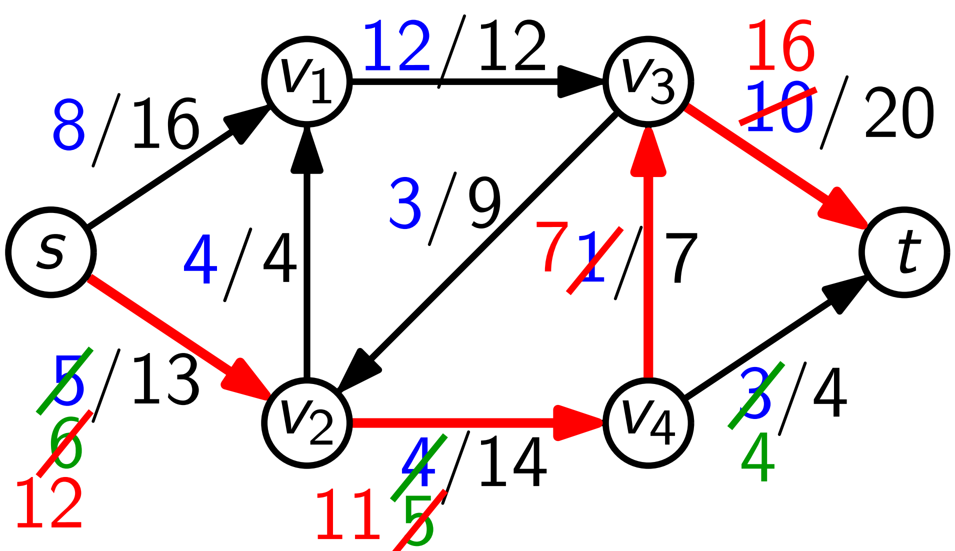
Residualnetz

Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



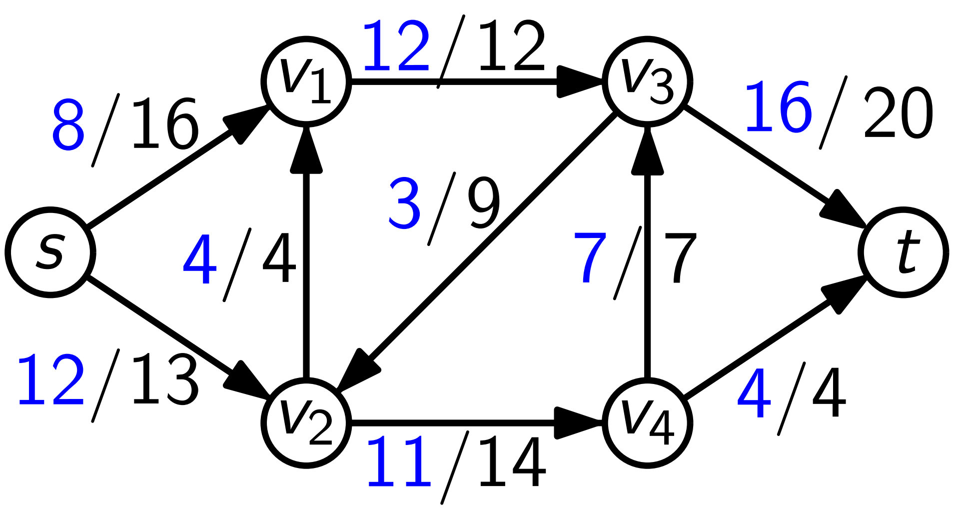
Residualnetz

Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



Residualnetz

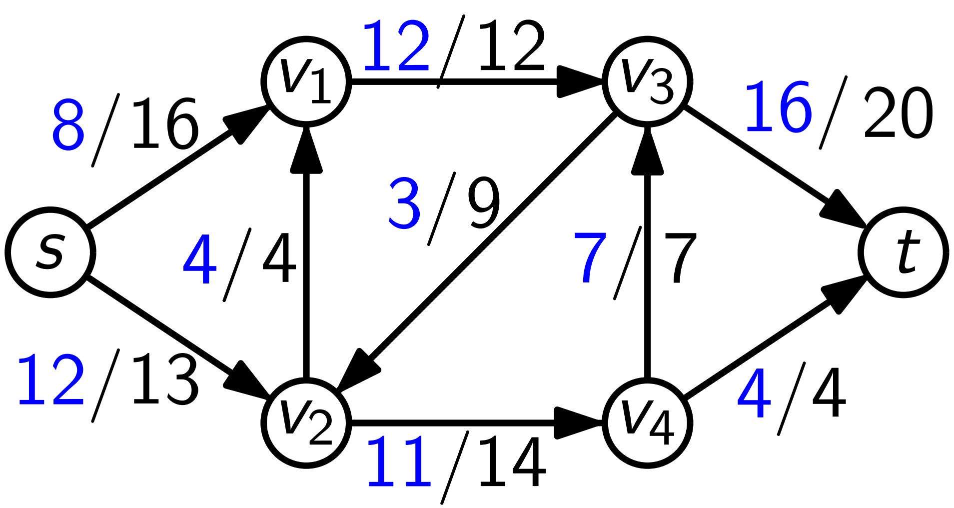
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



Residualnetz

Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

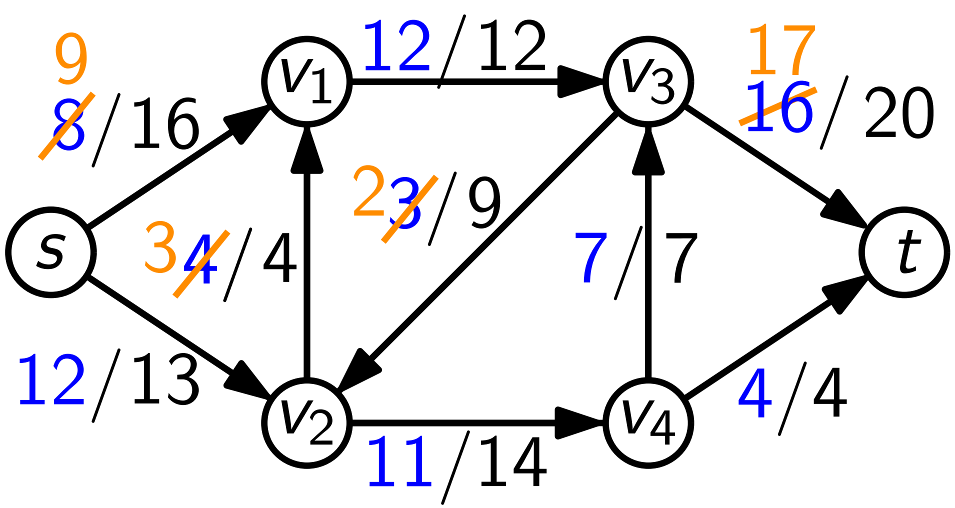
Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.



Residualnetz

Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.



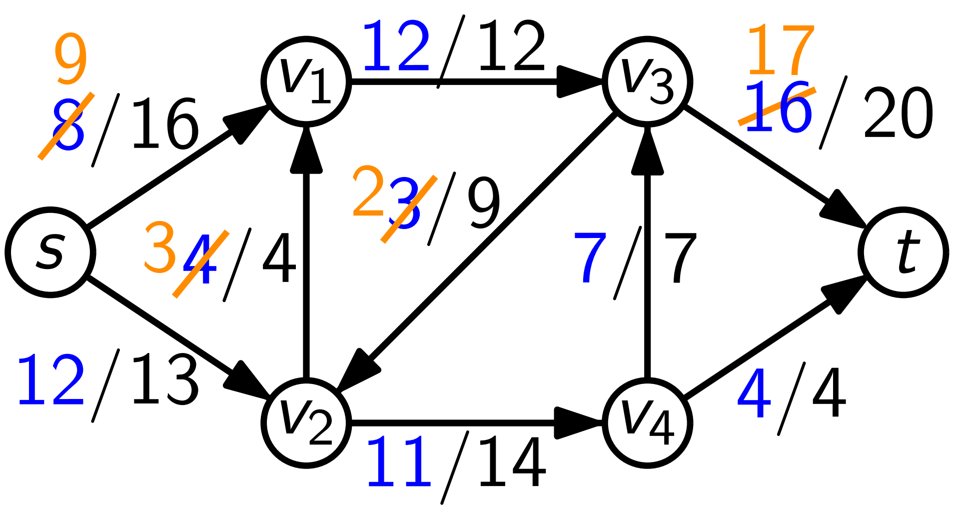
Residualnetz

Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$



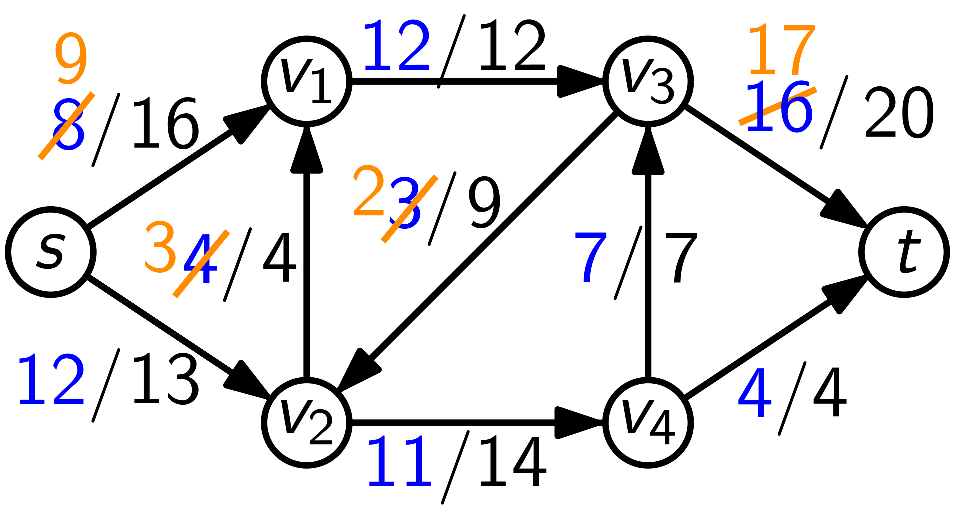
Residualnetz

Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$



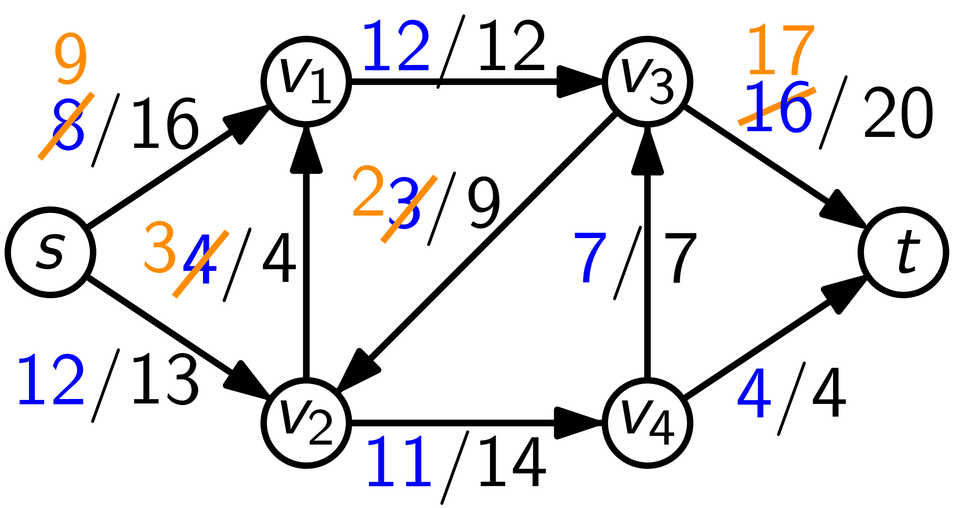
Residualnetz

Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$



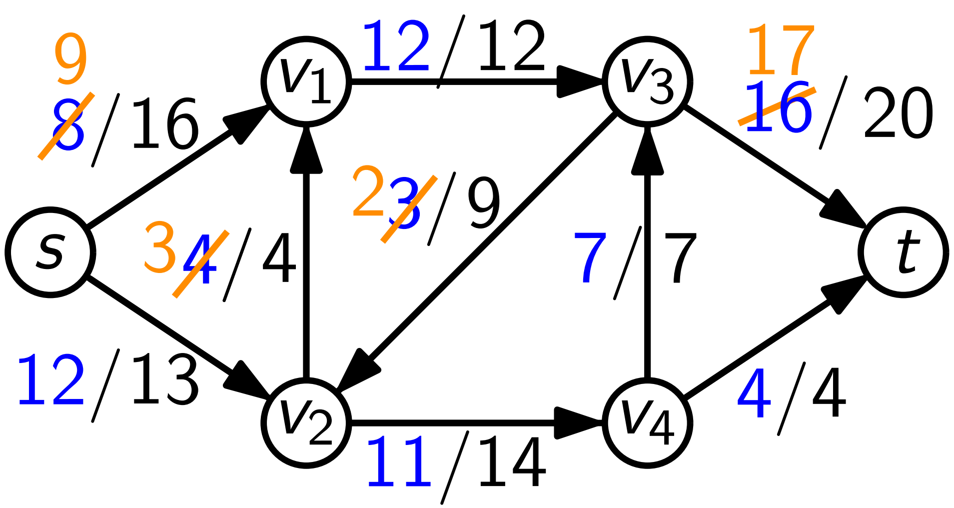
Residualnetz

Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$



Residualnetz

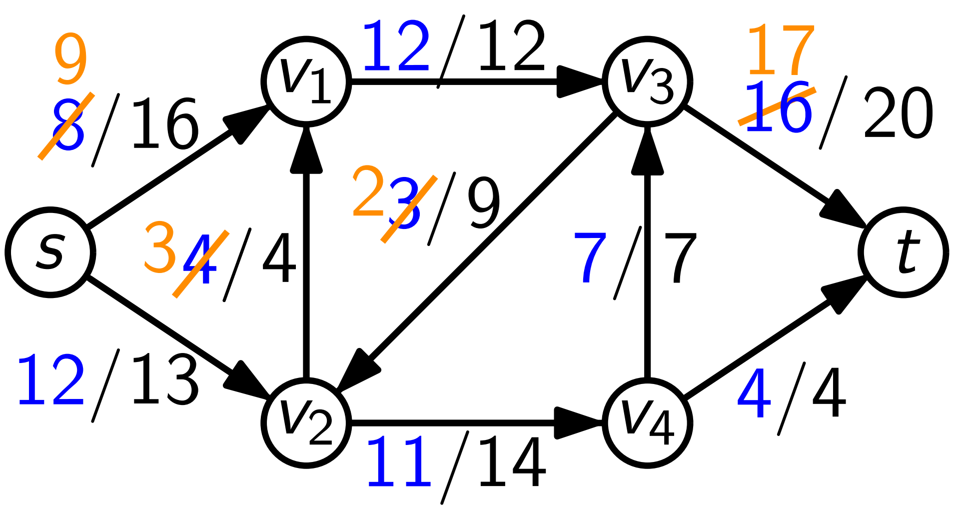
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Residual-kapazitäten

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$



Residualnetz

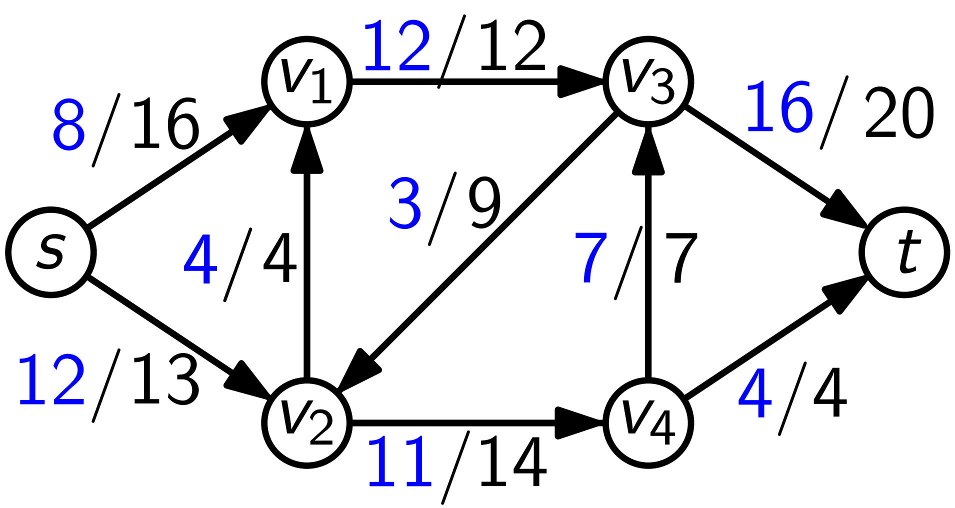
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Residual-kapazitäten

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$



Residualnetz

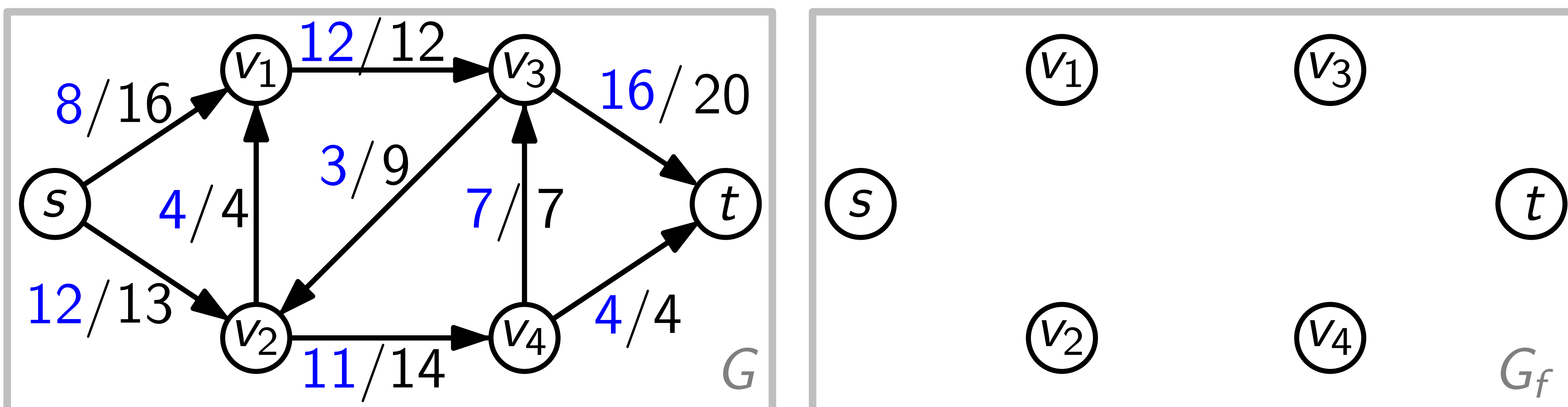
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Residual-kapazitäten

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$



Residualnetz

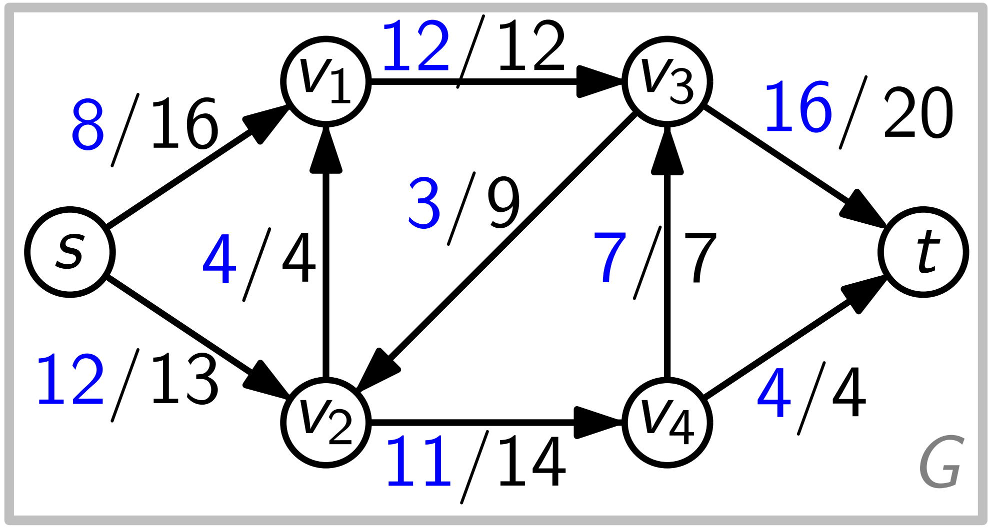
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

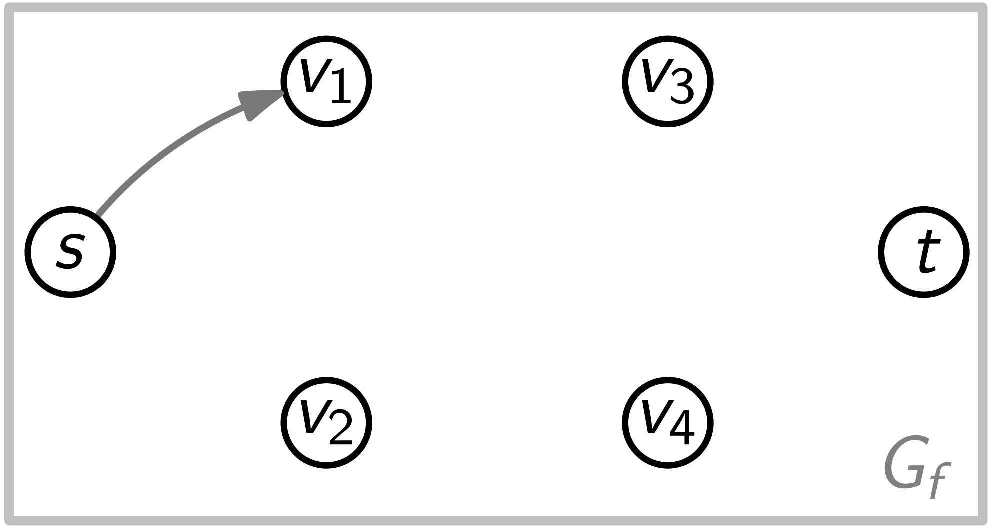
Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Residual-kapazitäten

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$





Residualnetz

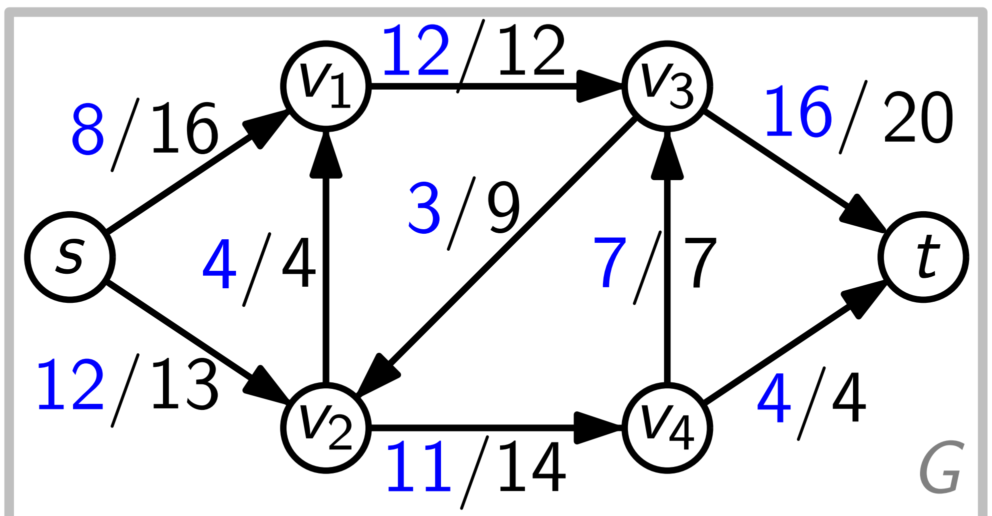
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

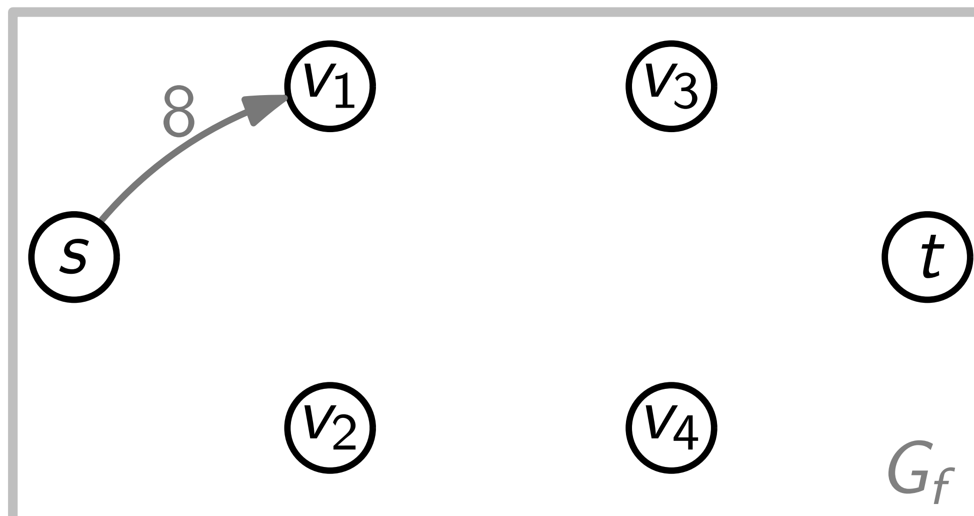
Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Residual-kapazitäten

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$





Residualnetz

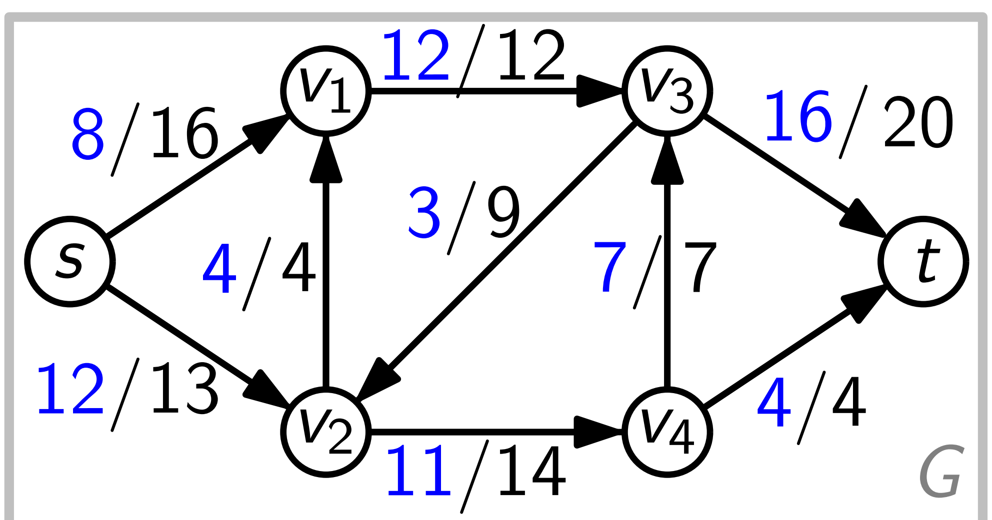
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

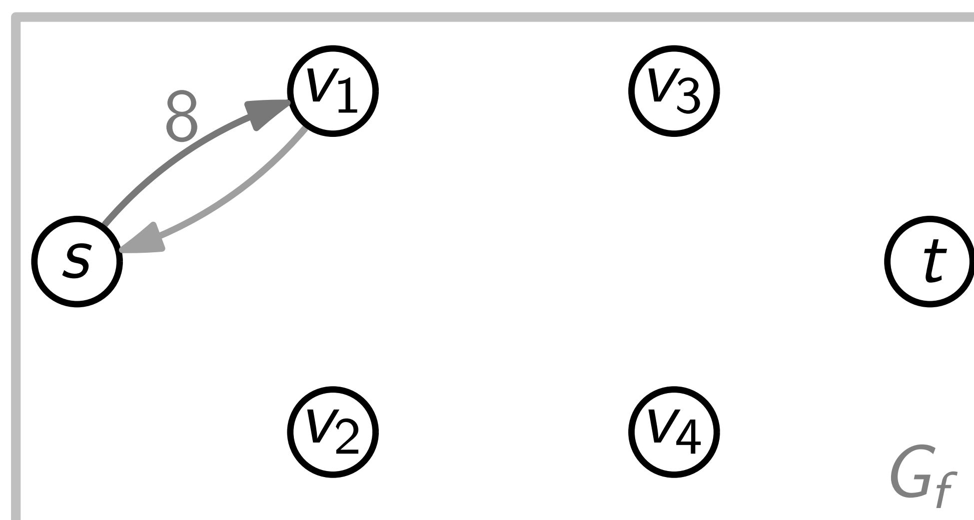
Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Residual-kapazitäten

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$





Residualnetz

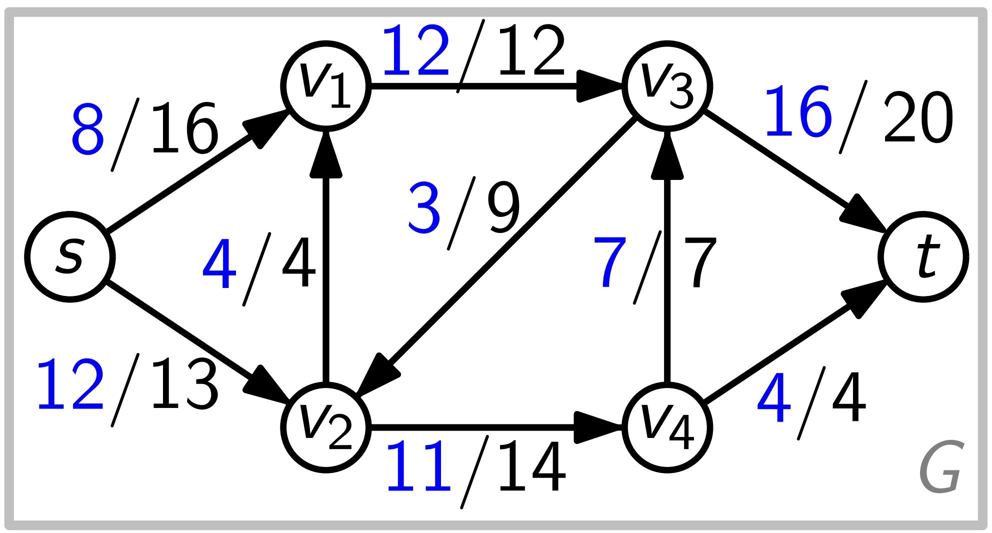
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

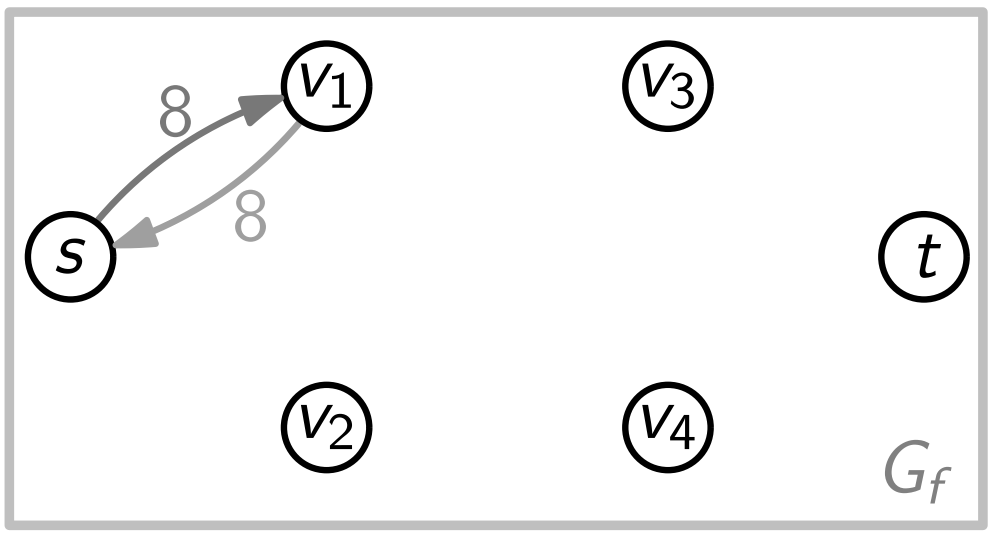
Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Residual-kapazitäten

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$





Residualnetz

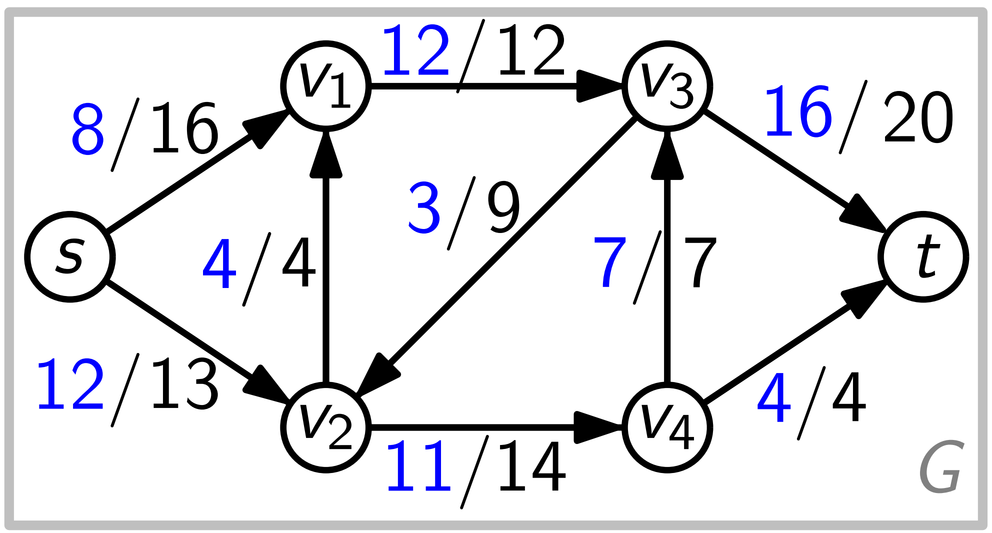
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

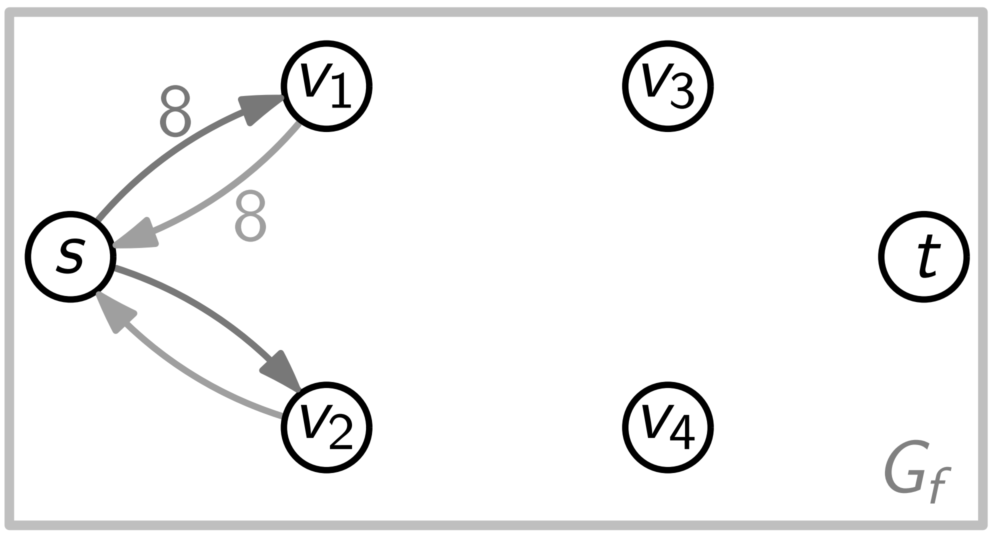
Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Residual-kapazitäten

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$





Residualnetz

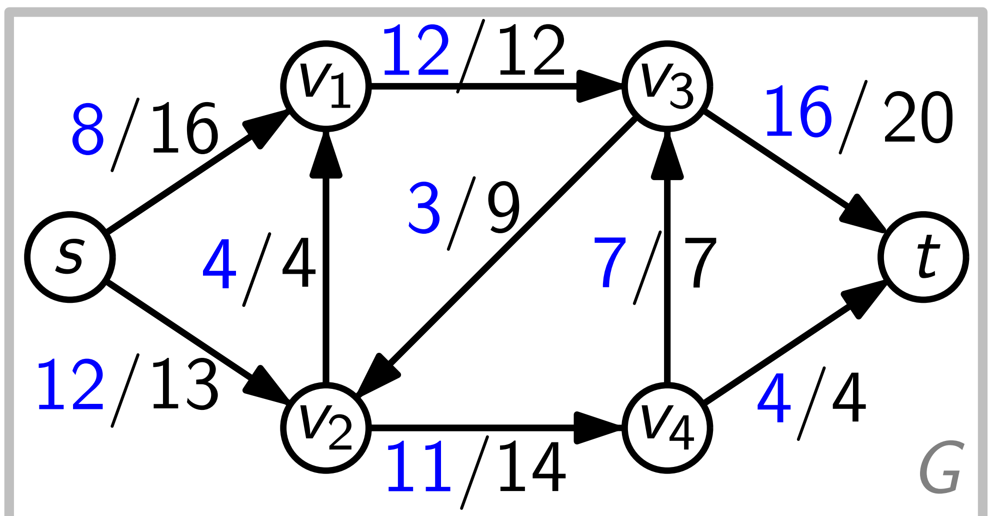
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

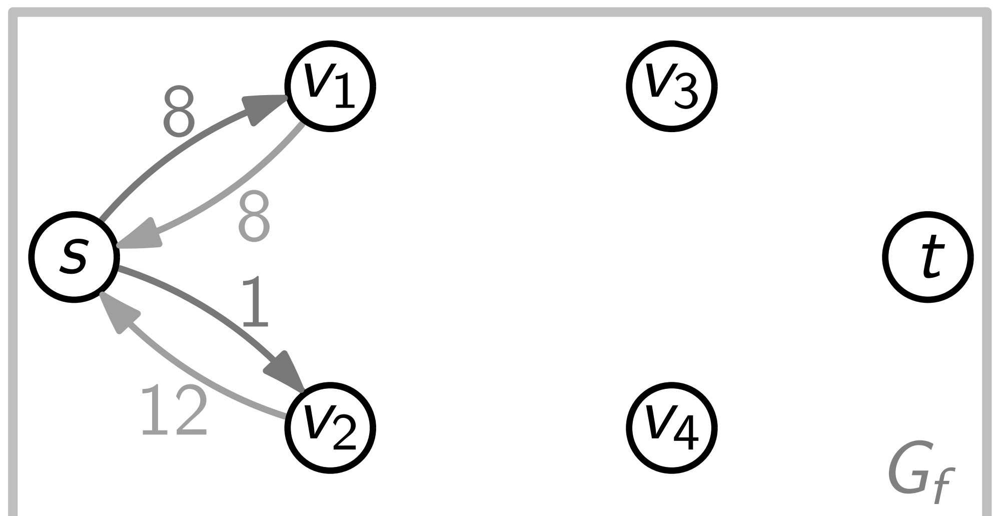
Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Residual-kapazitäten

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$





Residualnetz

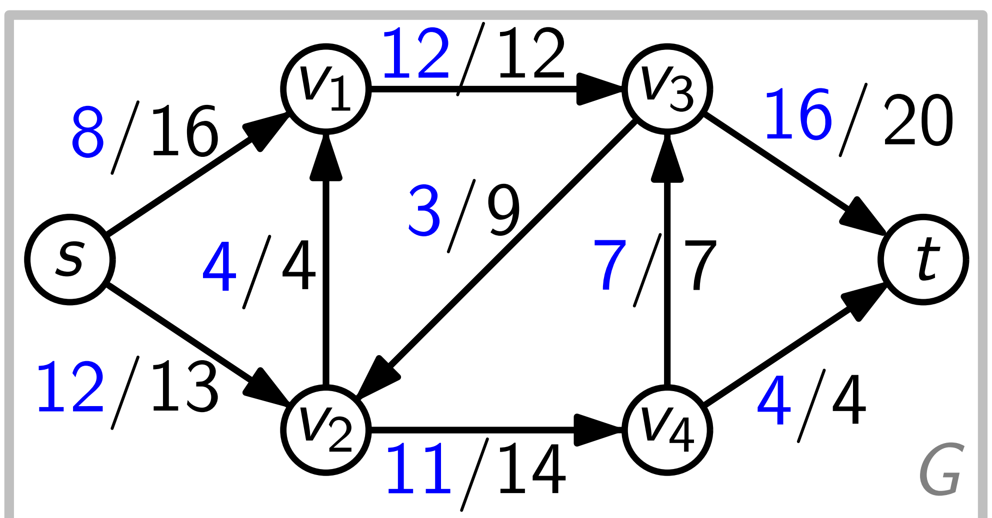
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

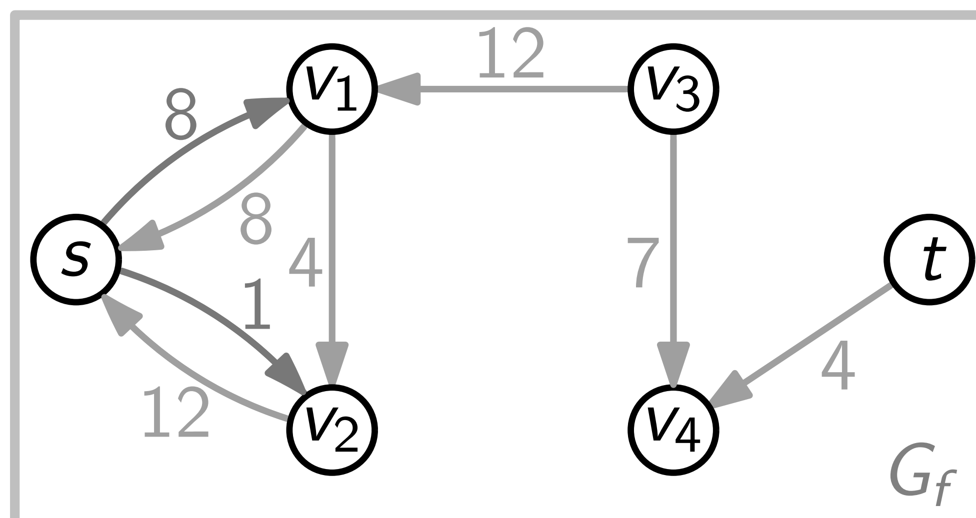
Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

Residual-kapazitäten





Residualnetz

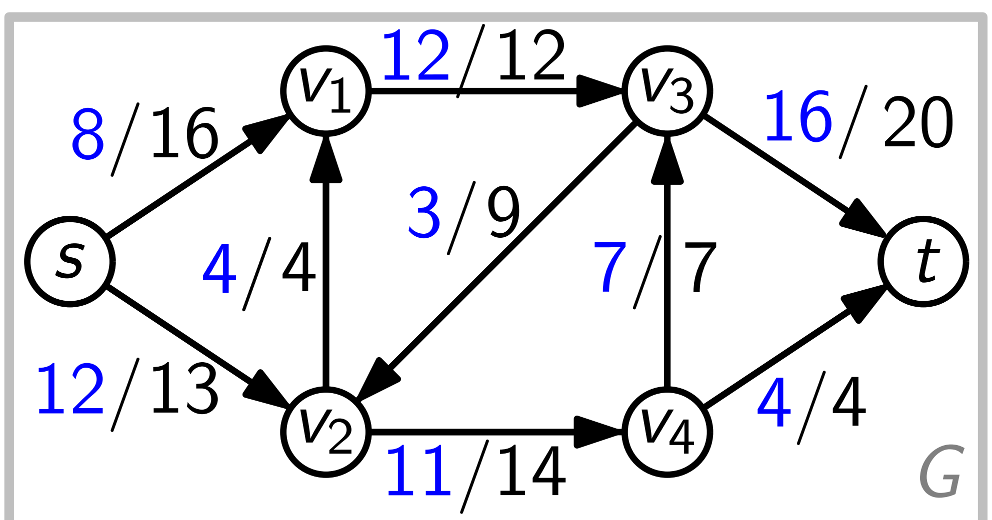
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

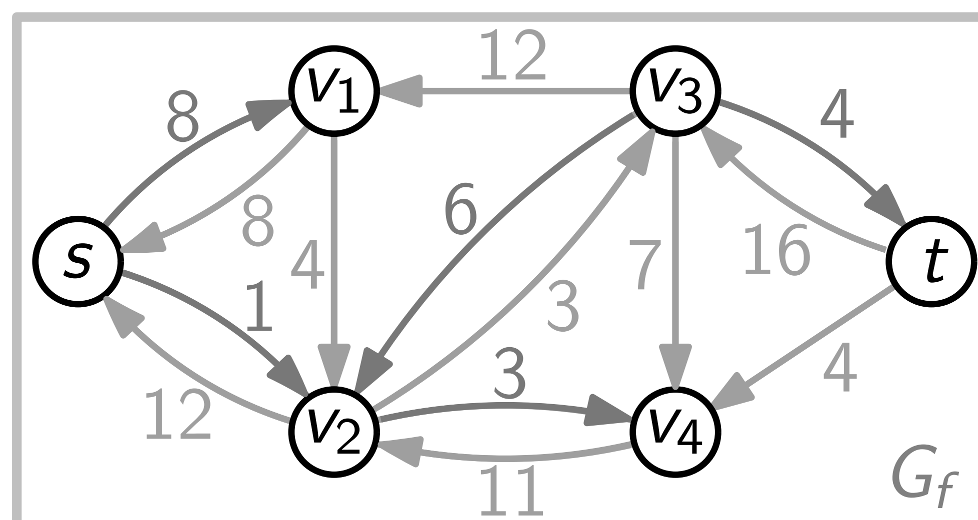
Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Residual-kapazitäten

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$





Residualnetz

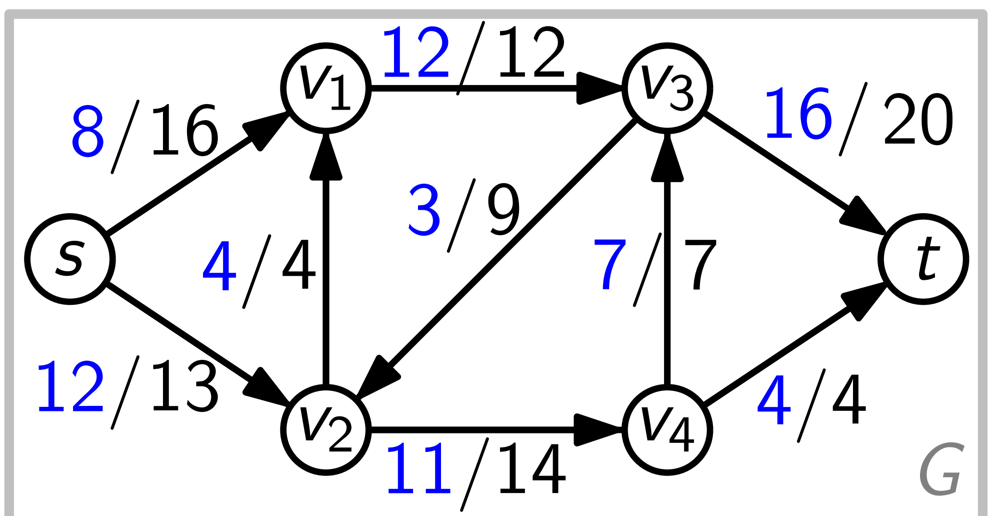
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

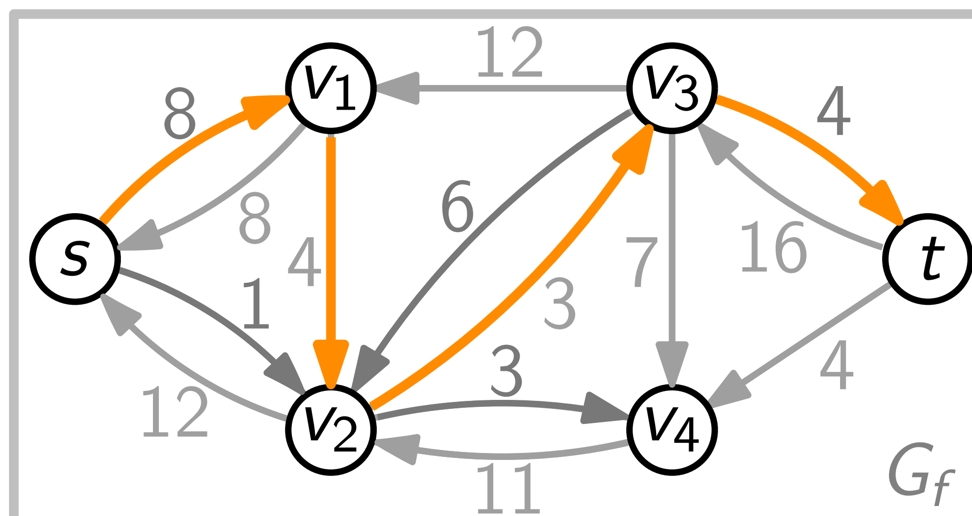
Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Residualkapazitäten

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$





Residualnetz

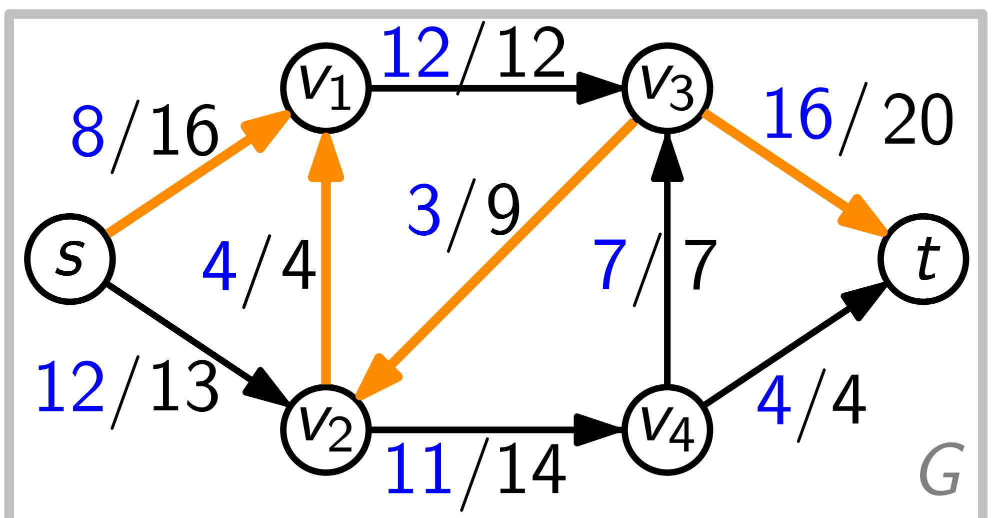
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

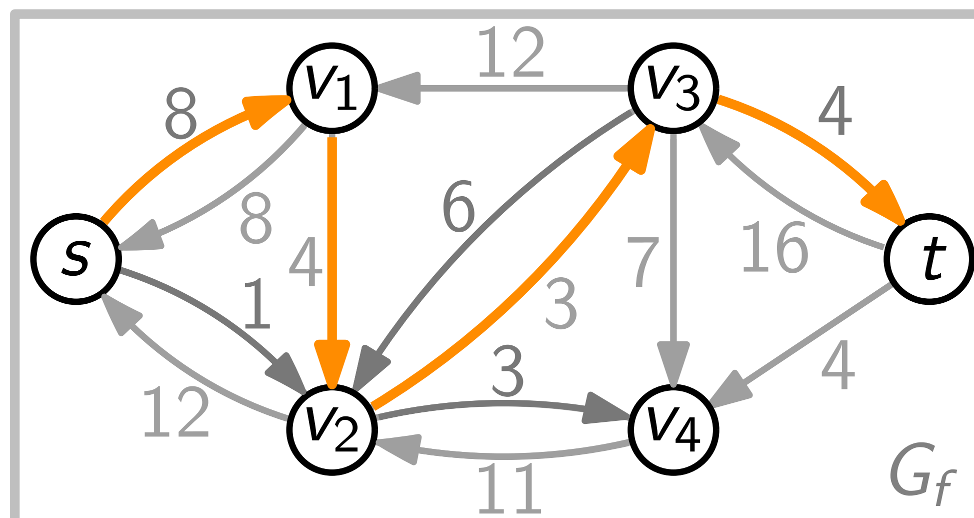
Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Residual-kapazitäten

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

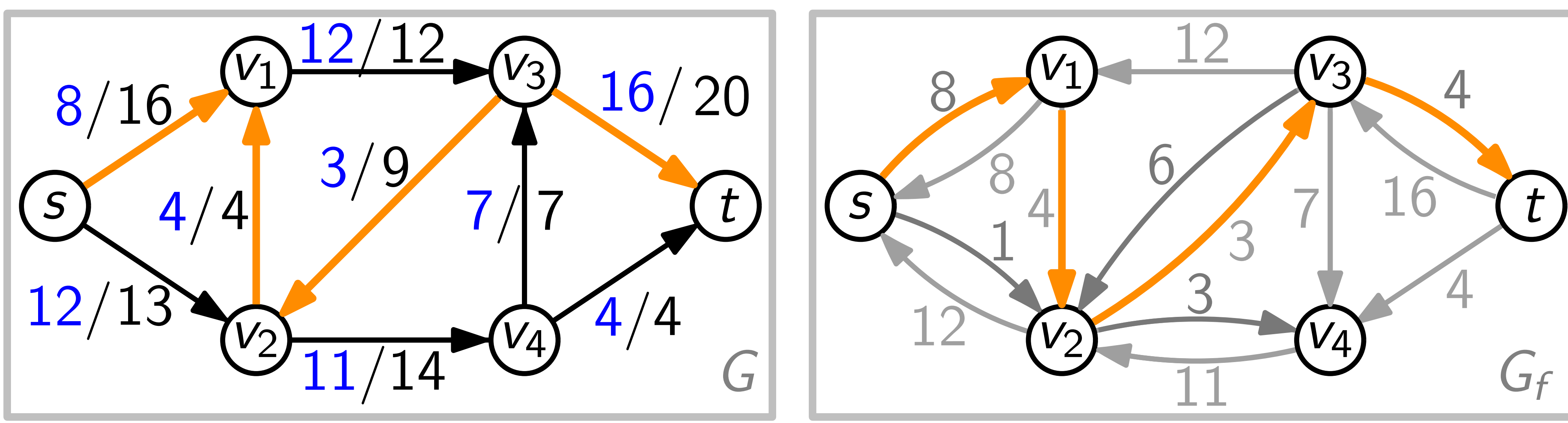
- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$





Augmentierende Wege

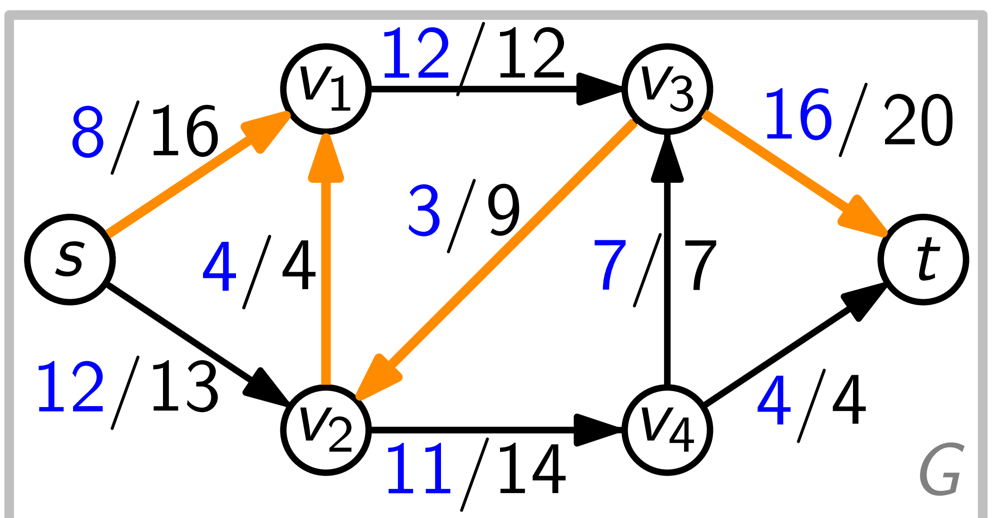
Def. Ein s-t-Weg W in G_f heißt *augmentierender Weg* für f.

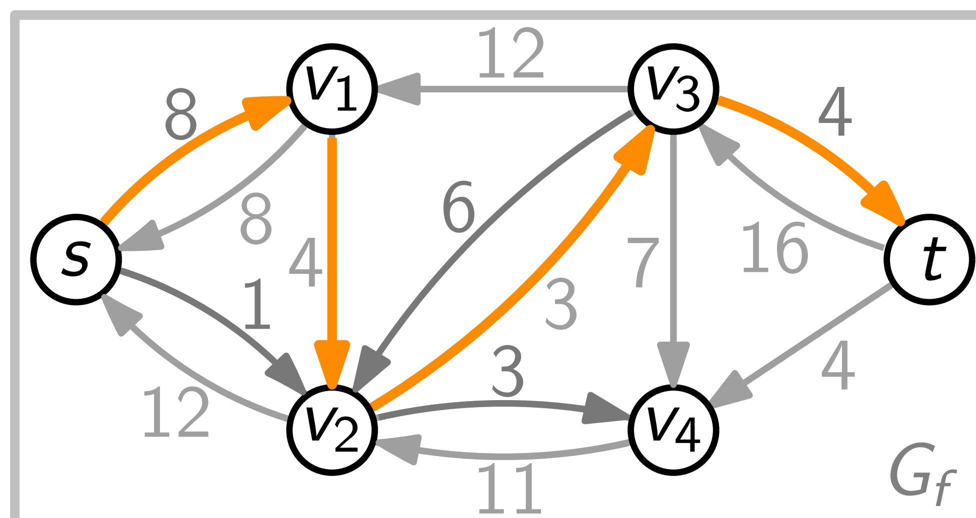


Augmentierende Wege

Def. Ein s-t-Weg W in G_f heißt *augmentierender Weg* für f.
Die Residualkapazität von W ist

$$\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e).$$

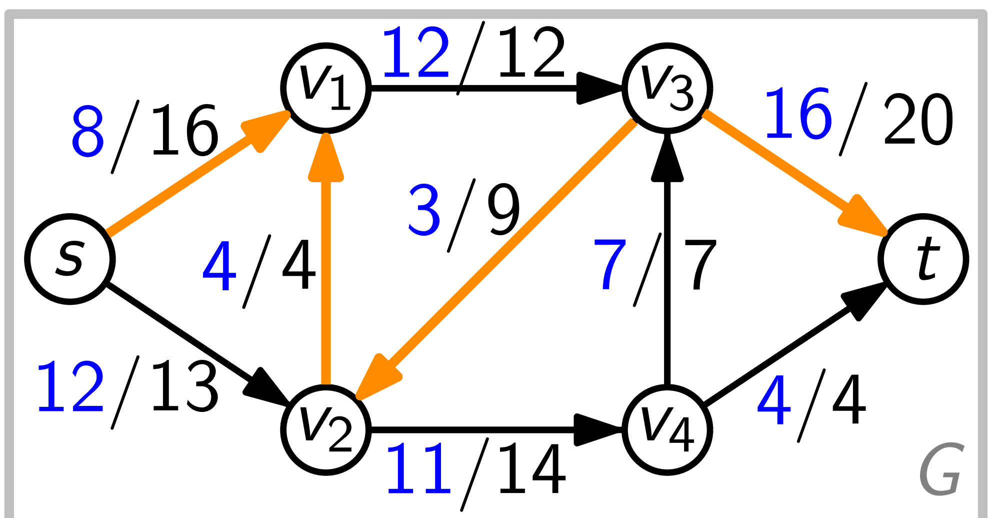


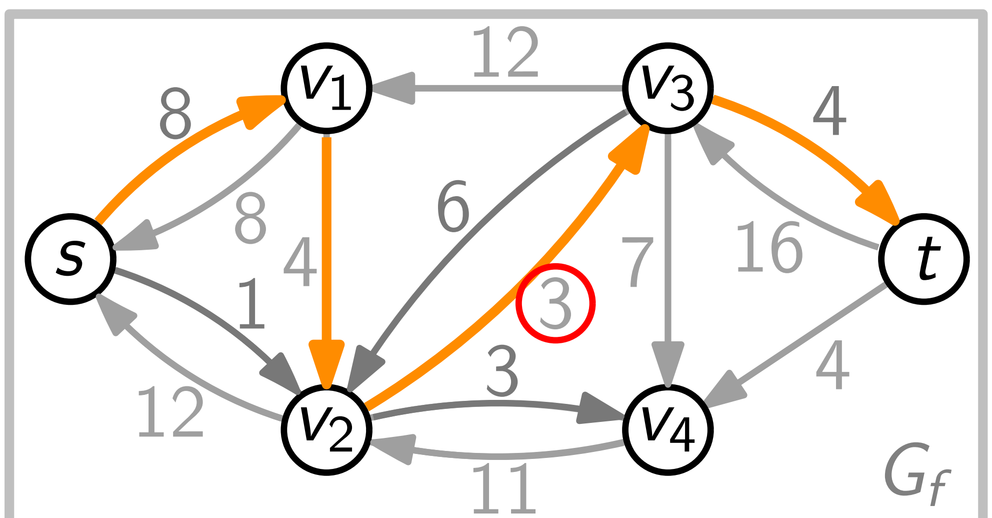


Augmentierende Wege

Def. Ein s-t-Weg W in G_f heißt *augmentierender Weg* für f.
Die Residualkapazität von W ist

$$\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e).$$



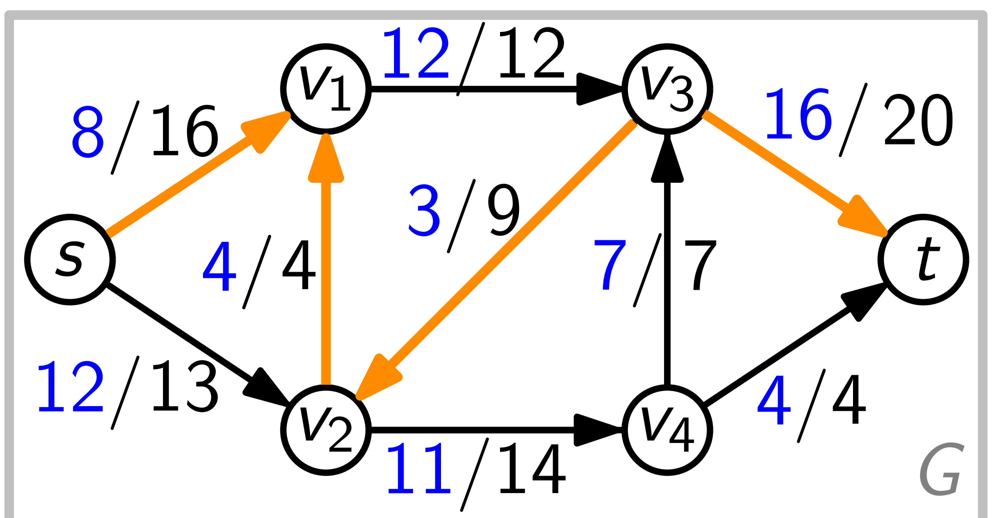


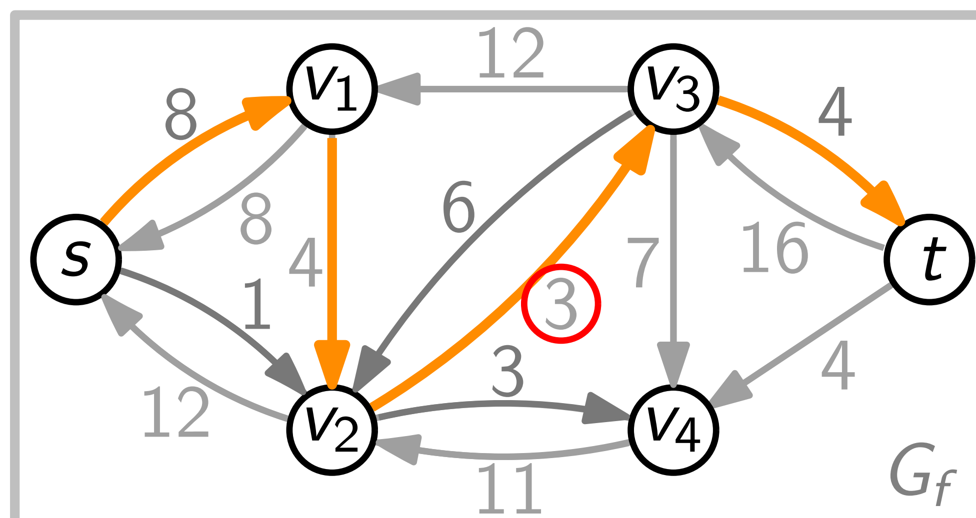
Augmentierende Wege

Def. Ein s-t-Weg W in G_f heißt *augmentierender Weg* für f.
Die Residualkapazität von W ist

$$\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e).$$

Satz (*vom augmentierenden [flussvergrößernden] Weg*).
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal $\Leftrightarrow$ es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.





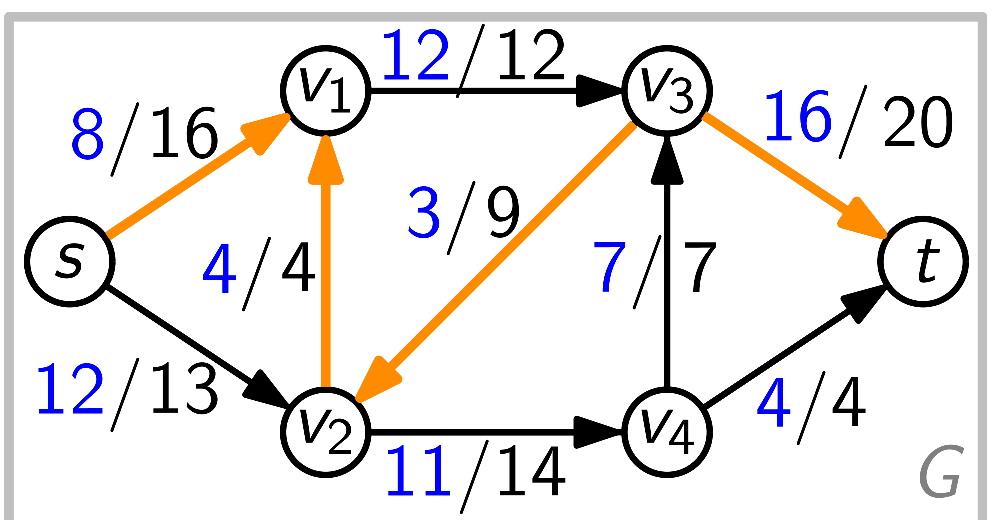
Augmentierende Wege

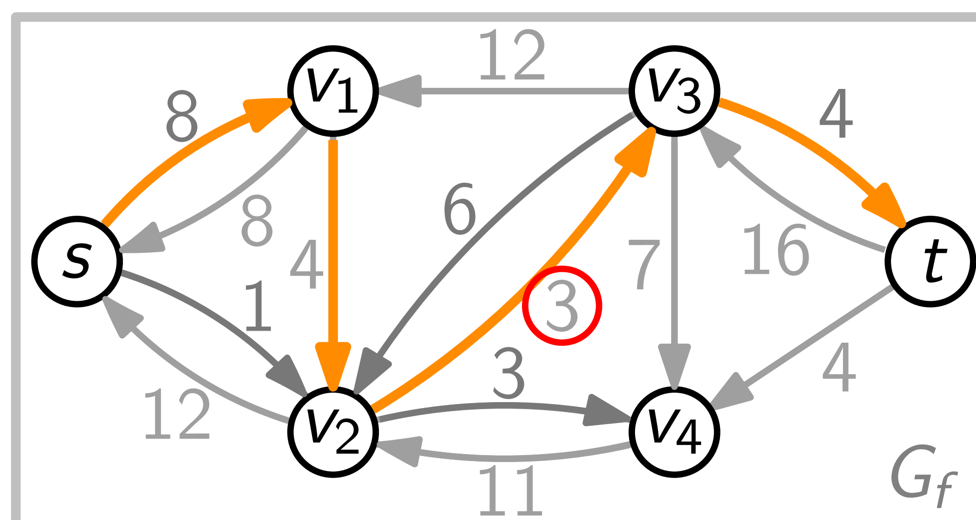
Def. Ein s-t-Weg W in G_f heißt *augmentierender Weg* für f.
Die Residualkapazität von W ist

$$\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e).$$

Satz (*vom augmentierenden [flussvergrößernden] Weg*).
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal $\Leftrightarrow$ es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

(Wir beweisen ihn nicht; er folgt direkt aus dem nächsten Satz.)





Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G.
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G.
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

Kurz:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T)\ s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G.
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

Kurz:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T)\ s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Beweis. $(1) \Rightarrow (2)$:

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G.
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

Kurz:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T)\ s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Beweis. $(1) \Rightarrow (2)$:

Ang. G_f enthält augmentierenden Weg.

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G.
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

Kurz:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T)\ s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Beweis. $(1) \Rightarrow (2)$:
Ang. G_f enthält augmentierenden Weg.
Aber dann könnte f erhöht werden.

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G.
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

Kurz:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T)\ s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2):
Ang. G_f enthält augmentierenden Weg.
Aber dann könnte f erhöht werden.
Widerspruch zu $|f|$ maximal.

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G.
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

Kurz:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T)\ s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Beweis. $(1) \Rightarrow (2)$:
Ang. G_f enthält augmentierenden Weg.
Aber dann könnte f erhöht werden.
Widerspruch zu $|f|$ maximal.

$(3) \Rightarrow (1)$:

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G.
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

Kurz:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T)\ s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2):
Ang. G_f enthält augmentierenden Weg.
Aber dann könnte f erhöht werden.
Widerspruch zu $|f|$ maximal.

(3) $\Rightarrow$ (1): Korollar $\Rightarrow$

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G.
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

Kurz:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T)\ s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Beweis. $(1) \Rightarrow (2)$:
Ang. G_f enthält augmentierenden Weg.
Aber dann könnte f erhöht werden.
Widerspruch zu $|f|$ maximal.

$(3) \Rightarrow (1)$: Korollar $\Rightarrow$

Erinnerung:

Korollar.
$|f| = c(S)$
$\Downarrow$
f maximal

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G.
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

Kurz:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T)\ s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Beweis. $(1) \Rightarrow (2)$:
Ang. G_f enthält augmentierenden Weg.
Aber dann könnte f erhöht werden.
Widerspruch zu $|f|$ maximal.

$(3) \Rightarrow (1)$: Korollar $\Rightarrow$ $|f|$ maximal.

Erinnerung:

Korollar. $|f| = c(S)$ $\Downarrow$ f maximal

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

Zu zeigen:

2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$:

Zu zeigen:

2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

Zu zeigen:

2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$

Zu zeigen:

2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$\Rightarrow \left\{ \qquad \right\}$ ist s-t-Schnitt.

Zu zeigen:

2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$\Downarrow$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Zu zeigen:

2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S)$

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow$

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S)$

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht } \text{erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow f(e) = c(e)$

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S)$

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow$ $f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S)$

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow$ $f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\overset{\sum}{\Rightarrow}$

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S)$

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \mathrm{Raus}(S)$.

$\Rightarrow$ $f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\overset{\sum}{\Rightarrow}$ $f(\mathrm{Raus}(S)) = c(\mathrm{Raus}(S))$

Nun sei $e = uv \in \mathrm{Rein}(S)$

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\stackrel{\sum}{\Rightarrow} f(\text{Raus}(S)) = c(\text{Raus}(S))$

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S)$ $\Rightarrow f(e) = 0$

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\overset{\sum}{\Rightarrow} f(\text{Raus}(S)) = c(\text{Raus}(S))$

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S)$ $\Rightarrow f(e) = 0$

$\overset{\sum}{\Rightarrow} f(\text{Rein}(S)) = 0$

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow$ $f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\overset{\sum}{\Rightarrow}$ $f(\text{Raus}(S)) = c(\text{Raus}(S))$

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S)$ $\Rightarrow f(e) = 0$

$\overset{\sum}{\Rightarrow}$ $f(\text{Rein}(S)) = 0$

Also: $c(S) \underset{\text{Def.}}{=}$

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow$ $f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\overset{\sum}{\Rightarrow}$ $f(\text{Raus}(S)) = c(\text{Raus}(S))$

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S)$ $\Rightarrow f(e) = 0$

$\overset{\sum}{\Rightarrow}$ $f(\text{Rein}(S)) = 0$

Also: $c(S) \underset{\text{Def.}}{=} c(\text{Raus}(S)) =$

Zu zeigen:

2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$\Downarrow$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \mathrm{Raus}(S)$.

$\Rightarrow f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\overset{\Sigma}{\Rightarrow} f(\mathrm{Raus}(S)) = c(\mathrm{Raus}(S))$

Nun sei $e = uv \in \mathrm{Rein}(S)$ $\Rightarrow f(e) = 0$

$\overset{\Sigma}{\Rightarrow} f(\mathrm{Rein}(S)) = 0$

Also: $c(S) \underset{\text{Def.}}{=} c(\mathrm{Raus}(S)) =$

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\overset{\sum}{\Rightarrow} f(\text{Raus}(S)) = c(\text{Raus}(S))$

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S)$ $\Rightarrow f(e) = 0$

$\overset{\sum}{\Rightarrow} f(\text{Rein}(S)) = 0$

Also: $c(S) \underset{\text{Def.}}{=} c(\text{Raus}(S)) = f(\text{Raus}(S))$

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \text{ \textit{nicht} erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow$ $f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\overset{\sum}{\Rightarrow}$ $f(\text{Raus}(S)) = c(\text{Raus}(S))$

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S)$ $\Rightarrow f(e) = 0$

$\overset{\sum}{\Rightarrow}$ $f(\text{Rein}(S)) = 0$

Also: $c(S) \underset{\text{Def.}}{=} c(\text{Raus}(S)) = f(\text{Raus}(S))$

Zu zeigen:

2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$\Downarrow$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\overset{\Sigma}{\Rightarrow} f(\text{Raus}(S)) = c(\text{Raus}(S))$

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S)$ $\Rightarrow f(e) = 0$

$\overset{\Sigma}{\Rightarrow} f(\text{Rein}(S)) = 0$

Also: $c(S) \underset{\text{Def.}}{=} c(\text{Raus}(S)) = f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S))$

$=$

Zu zeigen:

2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$$\Downarrow$$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \mathrm{Raus}(S)$.

$\Rightarrow f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\overset{\sum}{\Rightarrow} f(\mathrm{Raus}(S)) = c(\mathrm{Raus}(S))$

Nun sei $e = uv \in \mathrm{Rein}(S)$ $\Rightarrow f(e) = 0$

$\overset{\sum}{\Rightarrow} f(\mathrm{Rein}(S)) = 0$

Also: $c(S) \underset{\text{Def.}}{=} c(\mathrm{Raus}(S)) = f(\mathrm{Raus}(S)) - f(\mathrm{Rein}(S))$

$= \mathrm{Nettoabfluss}_f(S) \underset{\text{Lem. 2}}{=}$

Zu zeigen: 2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.
$$\Downarrow$$
3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht } \text{erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\overset{\sum}{\Rightarrow} f(\text{Raus}(S)) = c(\text{Raus}(S))$

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S)$ $\Rightarrow f(e) = 0$

$\overset{\sum}{\Rightarrow} f(\text{Rein}(S)) = 0$

Also: $c(S) \underset{\text{Def.}}{=} c(\text{Raus}(S)) = f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S))$

$= \text{Nettoabfluss}_f(S) \underset{\text{Lem. 2}}{=} |f|$ $\square$

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**

  $\lfloor$ $f_{uv} = 0$

return f

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$

Initialisierung mit Null-Fluss

return f

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do** } Initialisierung mit Null-Fluss

$f_{uv} = 0$

return f } Rückgabe eines max. Flusses

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$

} Initialisierung mit Null-Fluss

while G_f enthält s-t-Weg W **do**

return f

} Rückgabe eines max. Flusses

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do** } Initialisierung mit Null-Fluss

$f_{uv} = 0$

while G_f enthält s-t-Weg W **do**

Schreiben Sie Ihren eigenen Code, der bei Abbruch der **while**-Schleife in f einen maximalen Fluss liefert.

return f } Rückgabe eines max. Flusses

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
} Initialisierung mit Null-Fluss

while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$ } Residualkapazität von W

  Schreiben Sie Ihren eigenen Code, der bei Abbruch der **while**-Schleife in f einen maximalen Fluss liefert.

return f } Rückgabe eines max. Flusses

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do** } Initialisierung mit Null-Fluss
    $f_{uv} = 0$

while G_f enthält s-t-Weg W **do**
    $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$ } Residualkapazität von W
    foreach $uv \in W$ **do**
        if $uv \in E$ **then**
            $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
        else
            $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$

return f } Rückgabe eines max. Flusses

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do** — Initialisierung mit Null-Fluss
  $f_{uv} = 0$

while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$ — Residualkapazität von W
  foreach $uv \in W$ **do** — Flussvergrößerung entlang W
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$

return f — Rückgabe eines max. Flusses

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
 $f_{uv} = 0$

} Initialisierung mit Null-Fluss

while G_f enthält s-t-Weg W **do**
 $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$

 } Residualkapazität von W

 foreach $uv \in W$ **do**
  if $uv \in E$ **then**
   $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
  else
   $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$

 } Flussvergrößerung entlang W

return f

} Rückgabe eines max. Flusses

Korrektheit?

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do** } Initialisierung mit Null-Fluss
  $f_{uv} = 0$

while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$ } Residualkapazität von W
  foreach $uv \in W$ **do** } Flussvergrößerung entlang W
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$

return f } Rückgabe eines max. Flusses

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$

while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$

return f

Korrektheit?

Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

- **foreach** $uv \in E$ **do**
  - $f_{uv} = 0$
- **while** G_f enthält s-t-Weg W **do**
  - $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  - **foreach** $uv \in W$ **do**
    - **if** $uv \in E$ **then**
      - $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    - **else**
      - $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
- **return** f

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c \colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c \colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c \colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Berechnung von s-t-Wegen

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Berechnung von s-t-Wegen
– Breitensuche
– Tiefensuche

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Berechnung von s-t-Wegen

– Breitensuche
– Tiefensuche
$\Big\}$ $O(E)$ Zeit

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Berechnung von s-t-Wegen

$\left.\begin{array}{l}\text{– Breitensuche}\\ \text{– Tiefensuche}\end{array}\right\} O(E)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\phantom{c\colon E \to{}} \mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\phantom{c\colon E \to{}} \mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Berechnung von s-t-Wegen

$\left.\begin{array}{l}\text{– Breitensuche}\\ \text{– Tiefensuche}\end{array}\right\} O(E)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe

– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c \colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Berechnung von s-t-Wegen

– Breitensuche
– Tiefensuche

$\}$ $O(E)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe

– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert
– max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Berechnung von s-t-Wegen

$\left.\begin{array}{l}\text{– Breitensuche}\\ \text{– Tiefensuche}\end{array}\right\} O(E)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe

– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert

– max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c \colon E \to \mathbb{N}$: $O(|f^\star| \cdot E)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Berechnung von s-t-Wegen

$\left.\begin{array}{l}\text{– Breitensuche}\\ \text{– Tiefensuche}\end{array}\right\} O(E)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe

– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert

– max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c \colon E \to \mathbb{N}$: $O(|f^\star| \cdot E)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Berechnung von s-t-Wegen

– Breitensuche
– Tiefensuche
} $O(E)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe

– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert

– max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$: $O(|f^\star| \cdot E)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$: erweitern...
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Berechnung von s-t-Wegen

– Breitensuche
– Tiefensuche
$\}$ $O(E)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe

– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert
– max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c \colon E \to \mathbb{N}$: $O(|f^\star| \cdot E)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$: erweitern...
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Berechnung von s-t-Wegen

– Breitensuche
– Tiefensuche
$\Big\}$ $O(E)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe

– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert
– max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?

1.	$c \colon E \to \mathbb{N}$:	$O(\lvert f^\star \rvert \cdot E)$
2.	$\mathbb{Q}_{>0}$:	erweitern...
3.	$\mathbb{R}_{>0}$:	problematisch!

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

```
foreach uv ∈ E do
  └ f_uv = 0
while G_f enthält s-t-Weg W do
  Δ_W = min_{uv∈W} c_f(uv)
  foreach uv ∈ W do
    if uv ∈ E then
      | f_uv = f_uv + Δ_W
    else
      └ f_vu = f_vu − Δ_W
return f
```

Berechnung von s-t-Wegen

– Breitensuche
– Tiefensuche

$\Big\}$ $O(E)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe

– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert

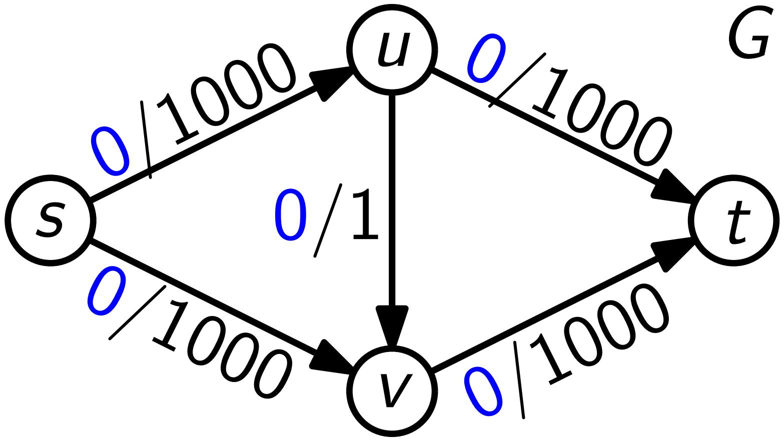
– max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

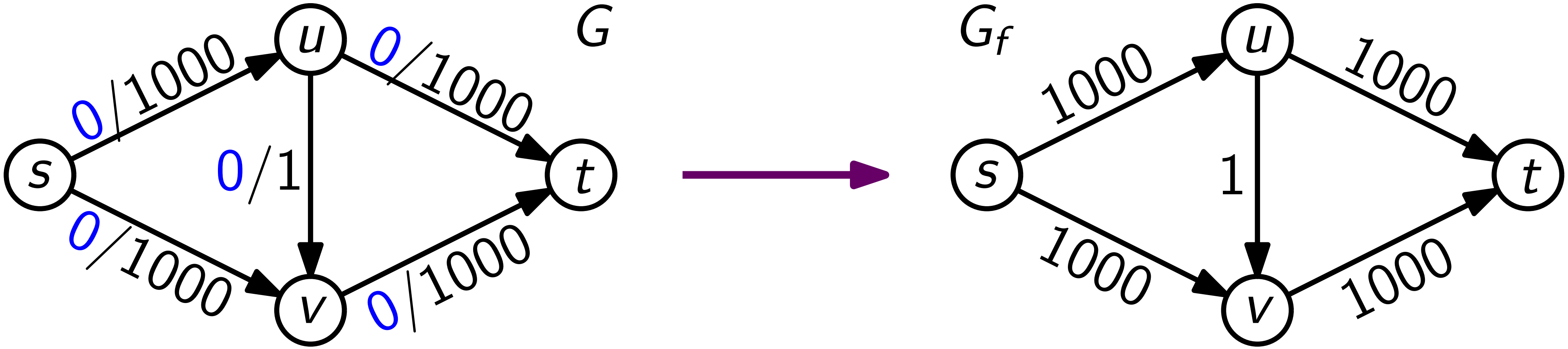
Laufzeit?

1. $c\colon E \to \mathbb{N}$: $O(|f^\star| \cdot E)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$: erweitern...
3. $\mathbb{R}_{>0}$: problematisch!

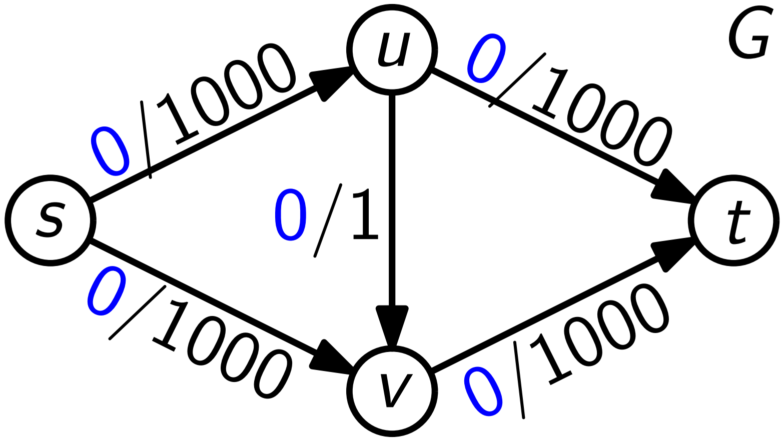
Beispiel

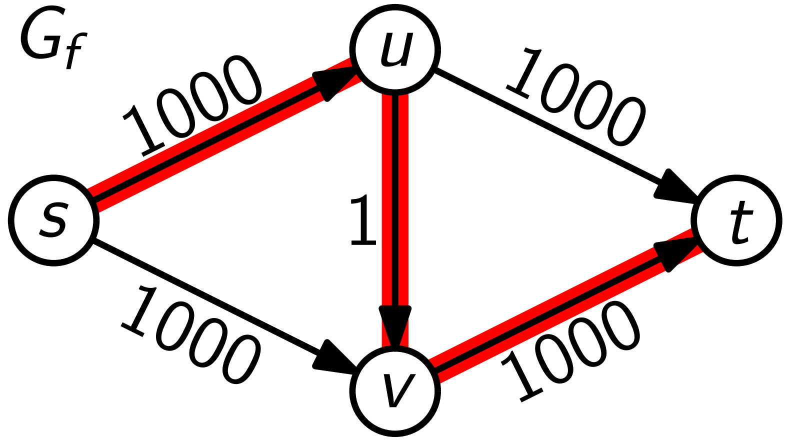


Beispiel

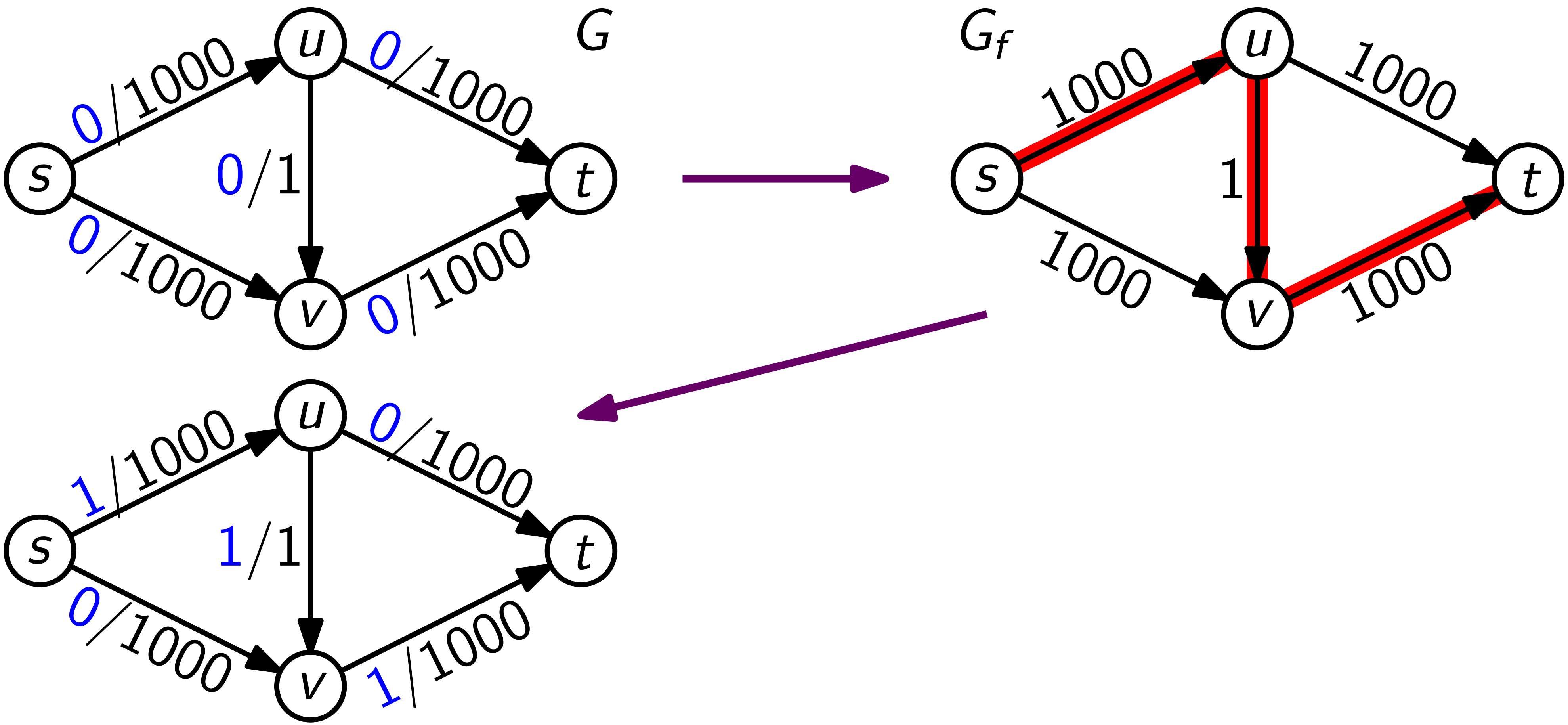

G
s
u
v
t
0/1000
0/1000
0/1
0/1000
0/1000
G_f
s
u
v
t
1000
1000
1
1000
1000

Beispiel

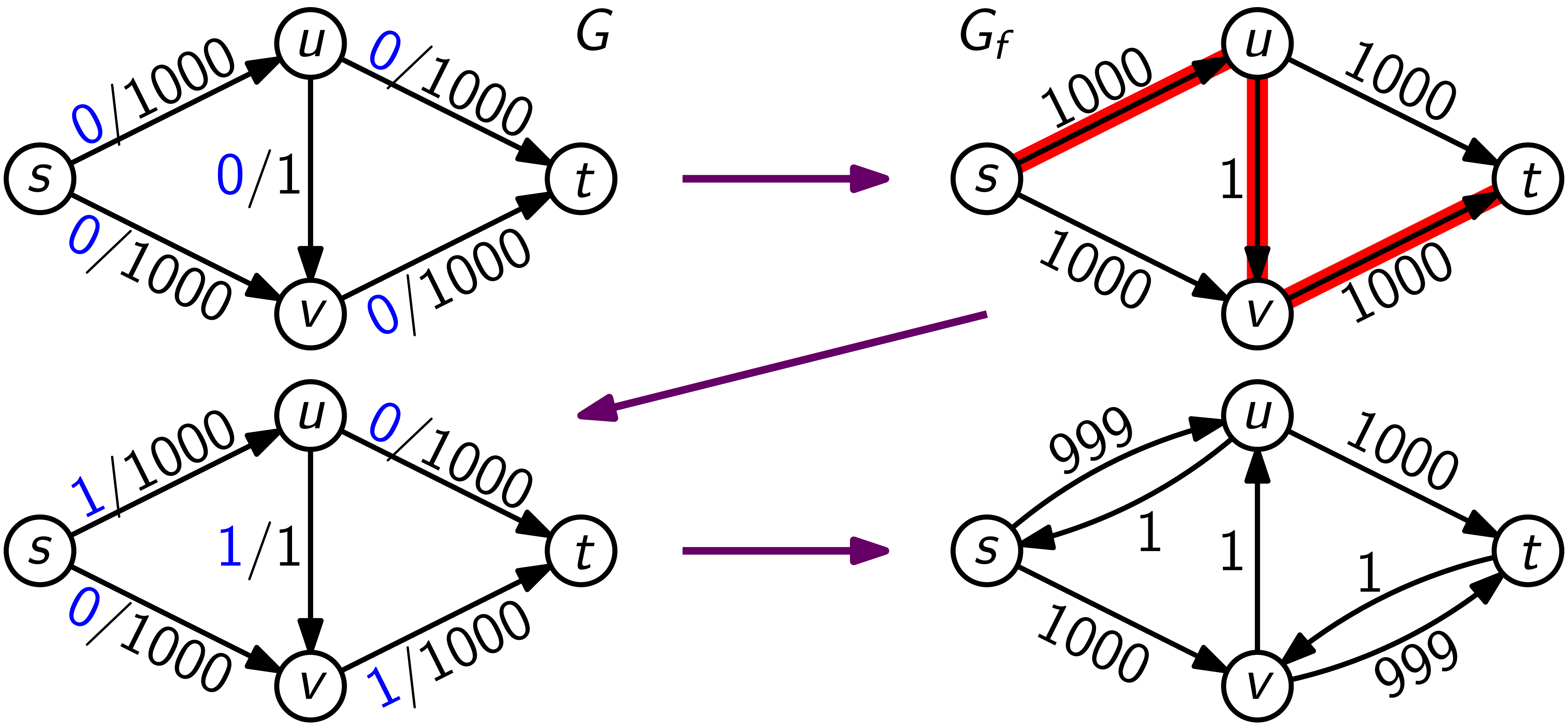

G
s
u
v
t
0/1000
0/1000
0/1
0/1000
0/1000


G_f
s
u
v
t
1000
1000
1
1000
1000

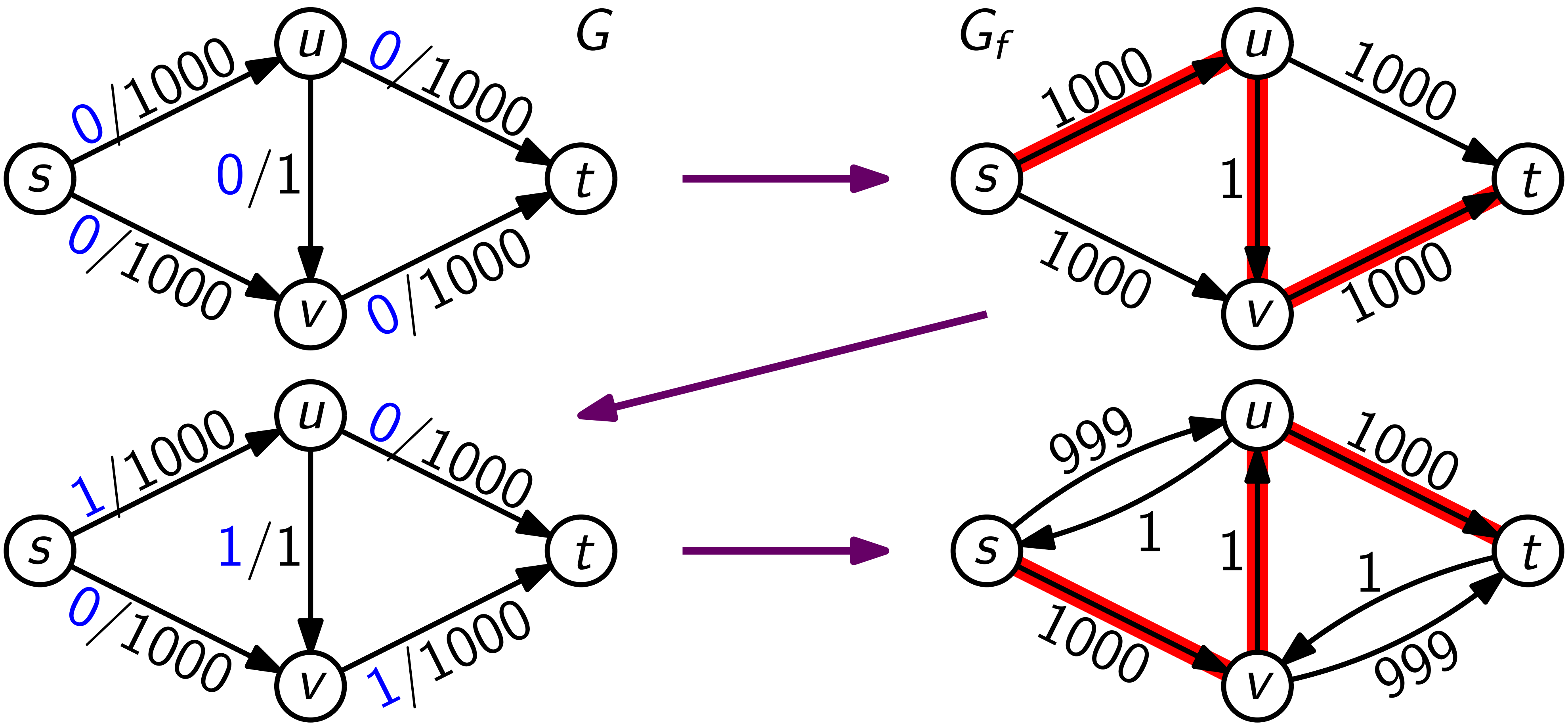
Beispiel


G
s
u
v
t
0/1000
0/1000
0/1
0/1000
0/1000
G_f
1000
1000
1
1000
1000
1/1000
0/1000
1/1
0/1000
1/1000

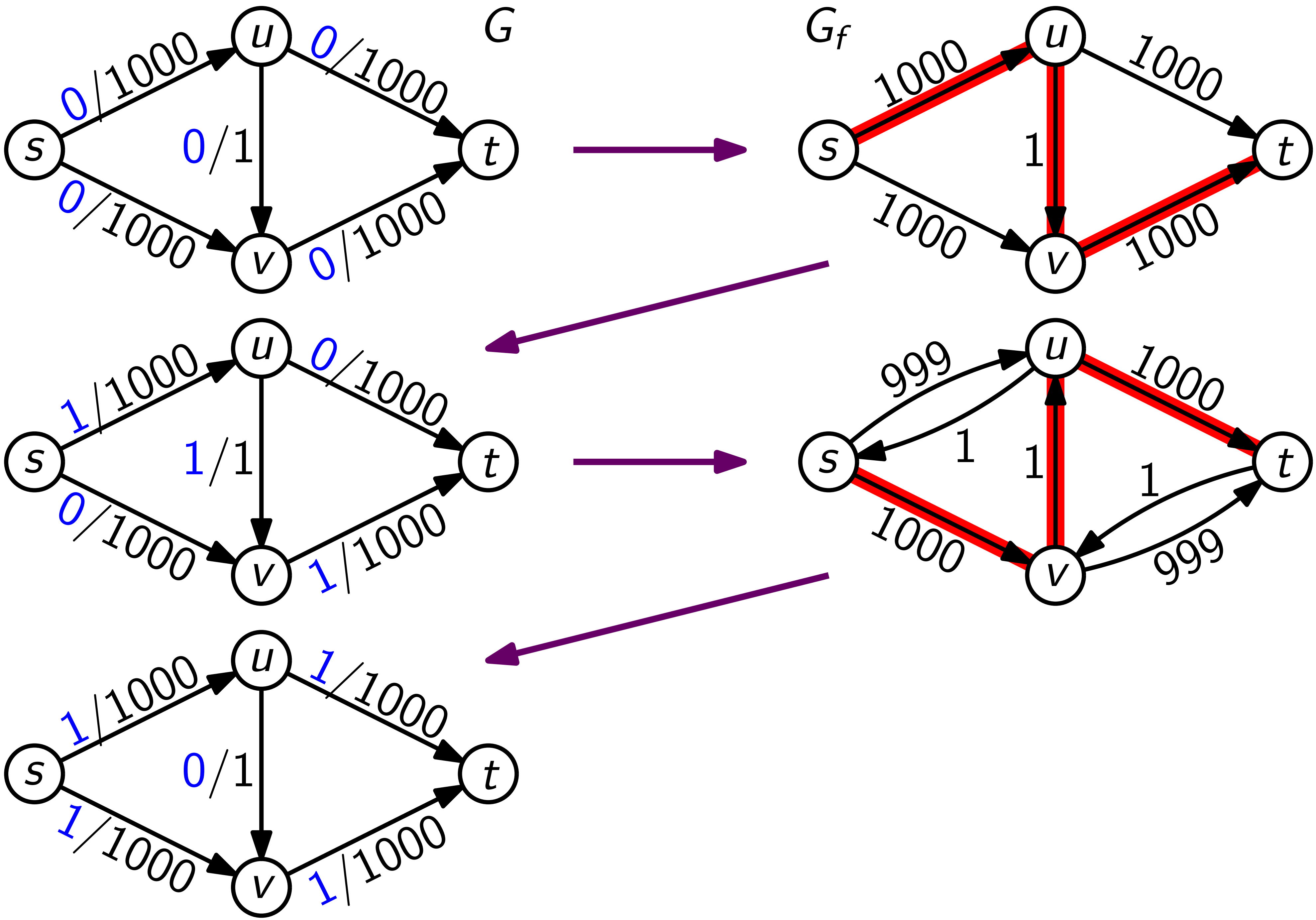
Beispiel


G
s
u
v
t
0/1000
0/1000
0/1
0/1000
0/1000
G_f
1000
1000
1
1000
1000
1/1000
0/1000
1/1
0/1000
1/1000
999
1
1000
1
1000
1
999

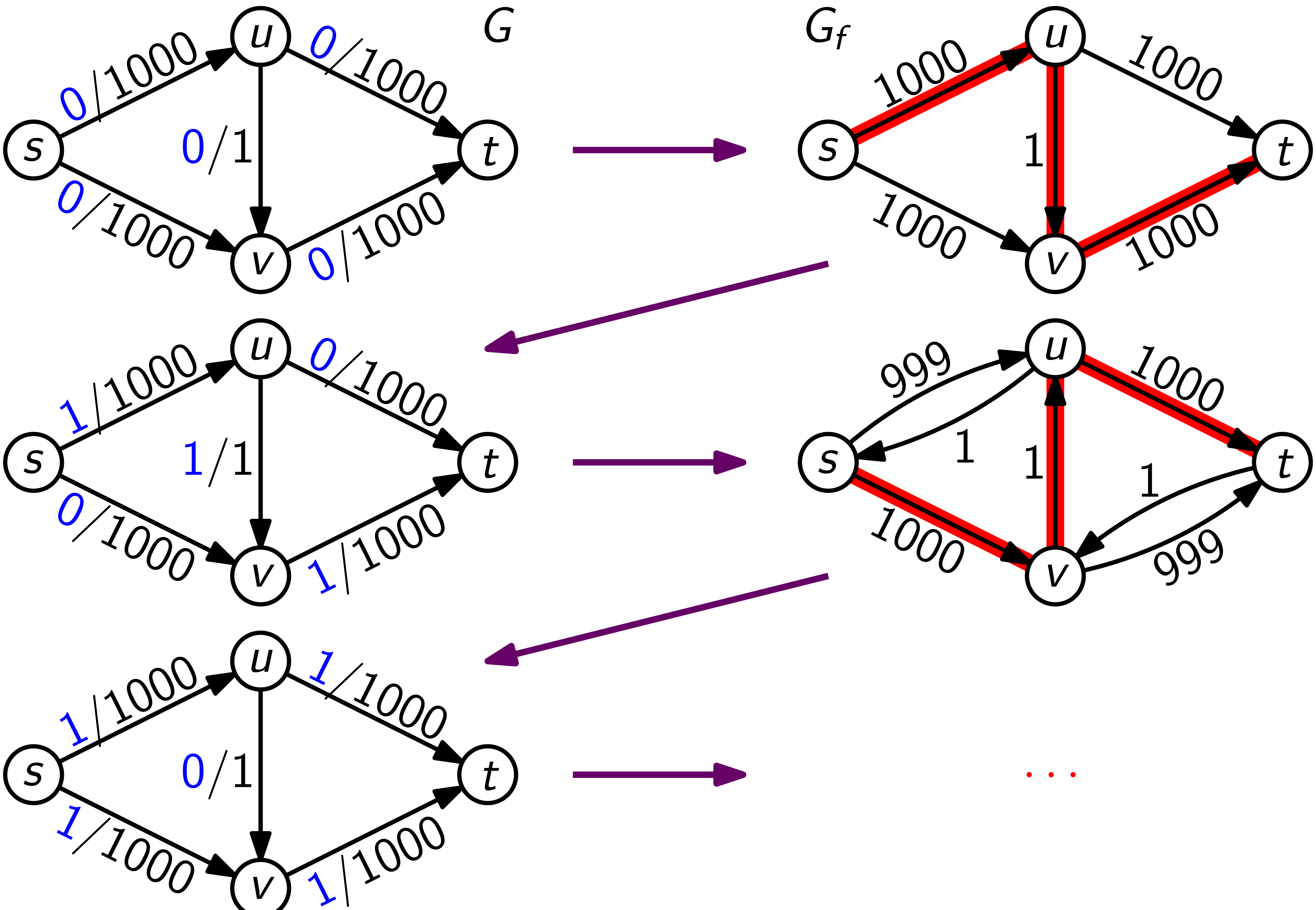
Beispiel


G
s
u
v
t
0/1000
0/1000
0/1
0/1000
0/1000
G_f
1000
1000
1
1000
1000
1/1000
0/1000
1/1
0/1000
1/1000
999
1
1000
1
1
1000
999

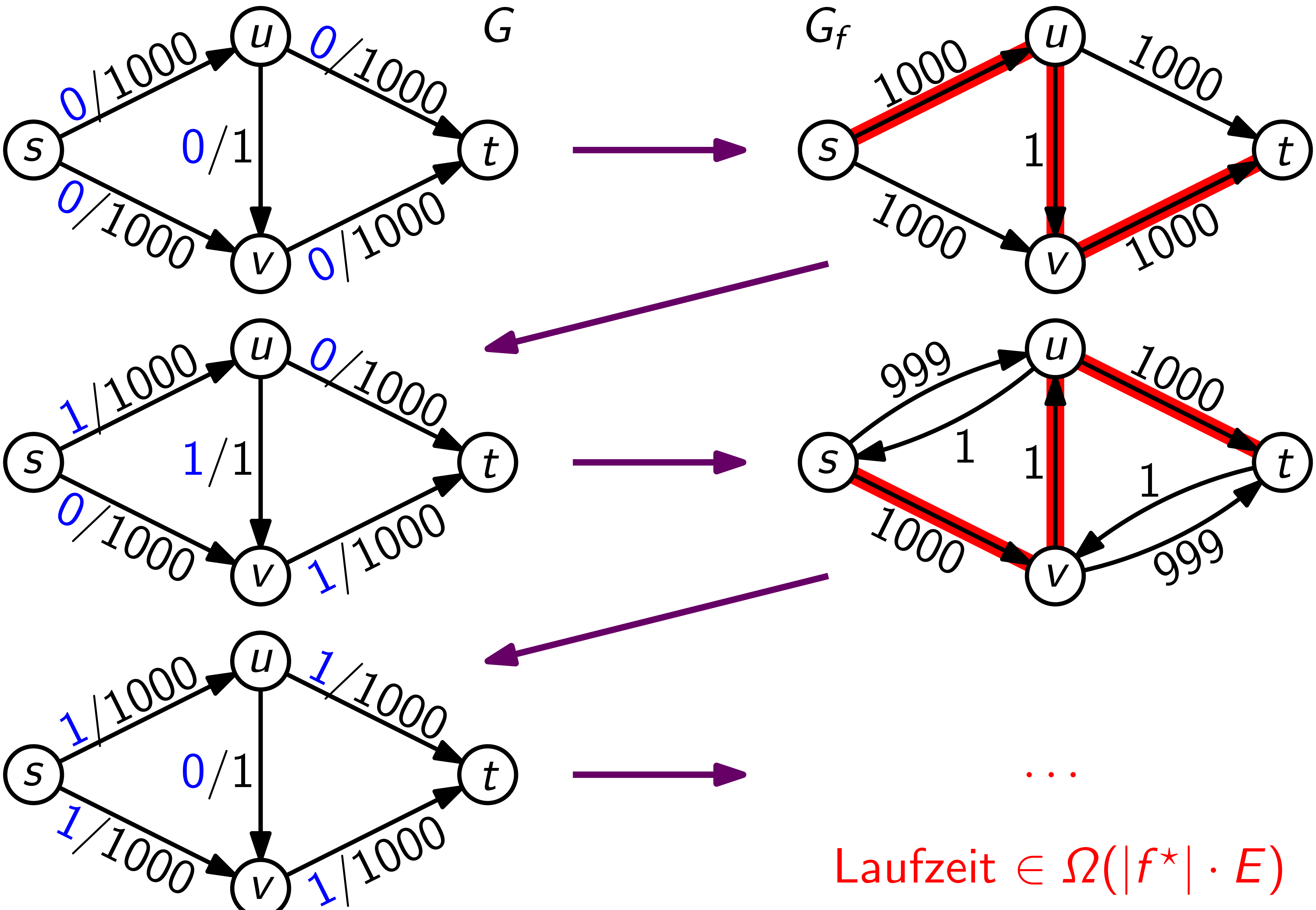
Beispiel



Beispiel


G
s
u
v
t
0/1000
0/1000
0/1
0/1000
0/1000
G_f
1000
1000
1
1000
1000
1/1000
0/1000
1/1
0/1000
1/1000
999
1
1
1000
1000
1
999
1/1000
1/1000
0/1
1/1000
1/1000
...

Beispiel



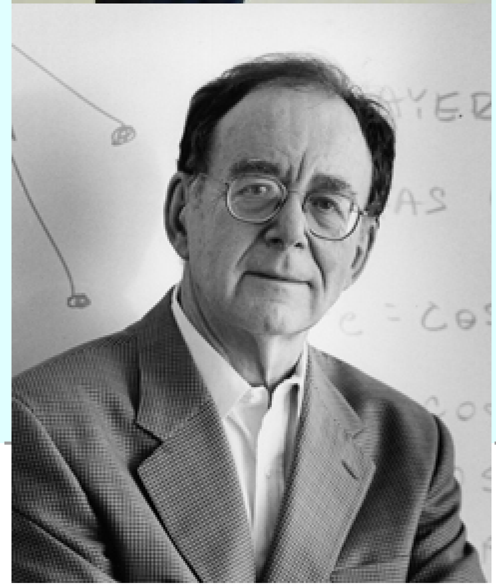
Laufzeit $\in \Omega(|f^\star| \cdot E)$

Der Algorithmus von Edmonds & Karp

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
    $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg **do**
    $W =$ s-t-Weg in G_f
    $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
    foreach $uv \in W$ **do**
        if $uv \in E$ **then**
            $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
        else
            $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Jack R. Edmonds
*1934



Richard M. Karp
*1935 Boston, MA

Der Algorithmus von Edmonds & Karp

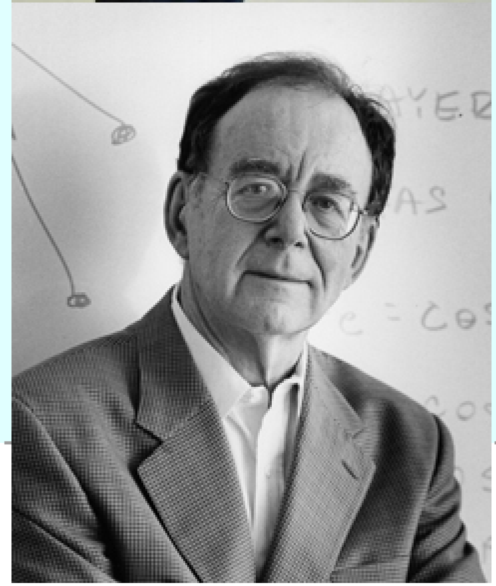
EdmondsKarp
~~FordFulkerson~~(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$

while G_f enthält s-t-Weg **do**
  $W =$ s-t-Weg in G_f
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$

return f

Jack R. Edmonds
*1934



Richard M. Karp
*1935 Boston, MA

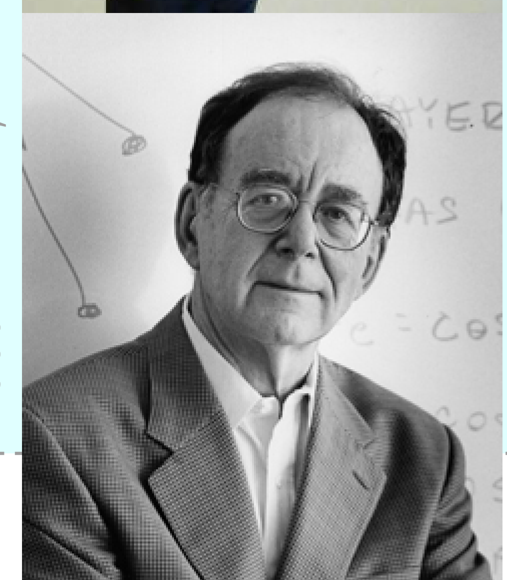
Der Algorithmus von Edmonds & Karp

EdmondsKarp
~~FordFulkerson~~(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

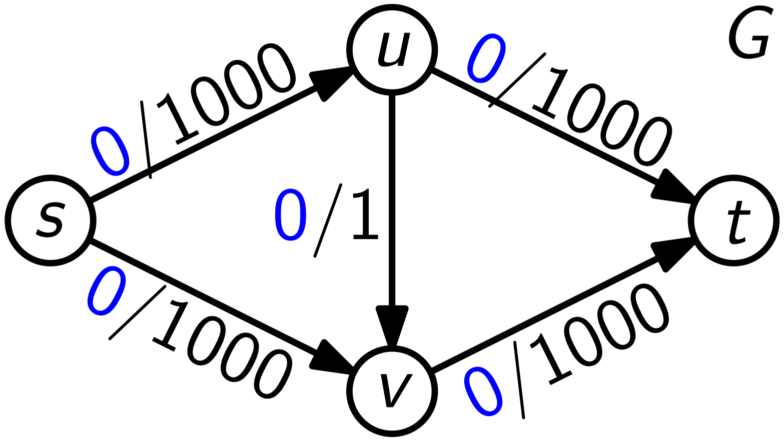
  foreach $uv \in E$ **do**
    $f_{uv} = 0$
  while G_f enthält s-t-Weg **do**
    $W =$ kürzester s-t-Weg in G_f
    $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
    foreach $uv \in W$ **do**
      if $uv \in E$ **then**
        $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
      else
        $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
  return f

Jack R. Edmonds
*1934

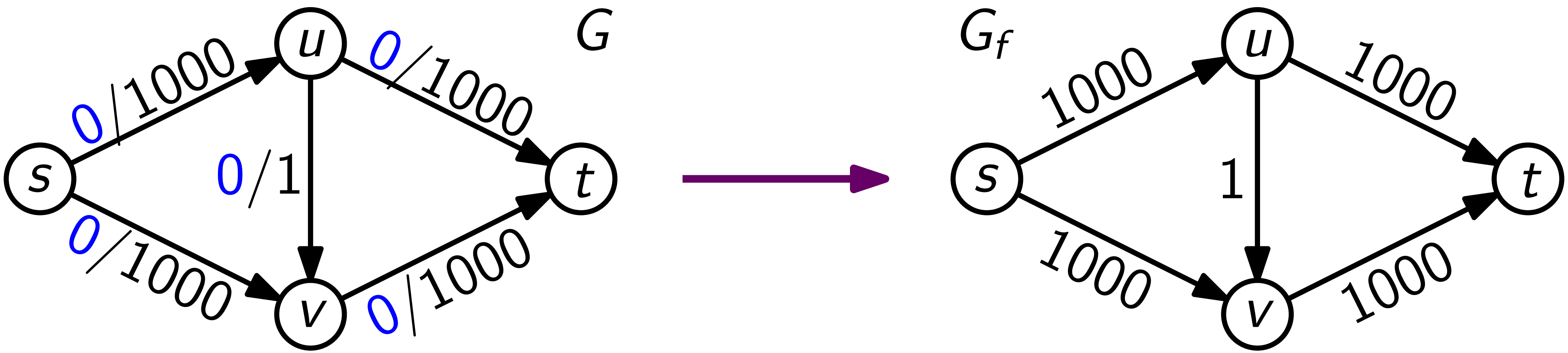
Richard M. Karp
*1935 Boston, MA



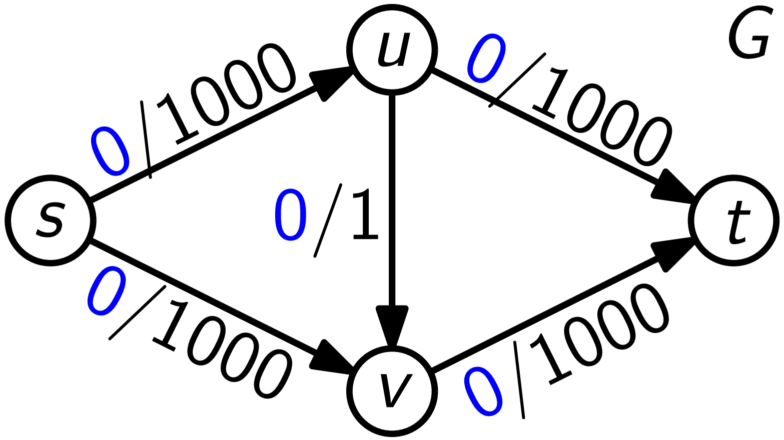
Beispiel

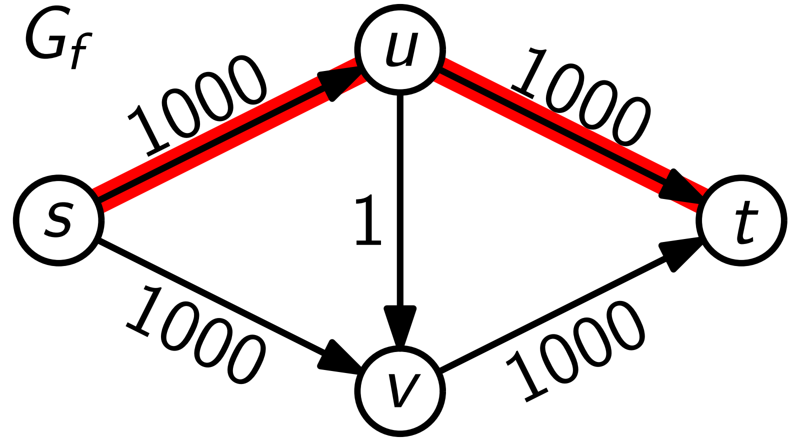


Beispiel

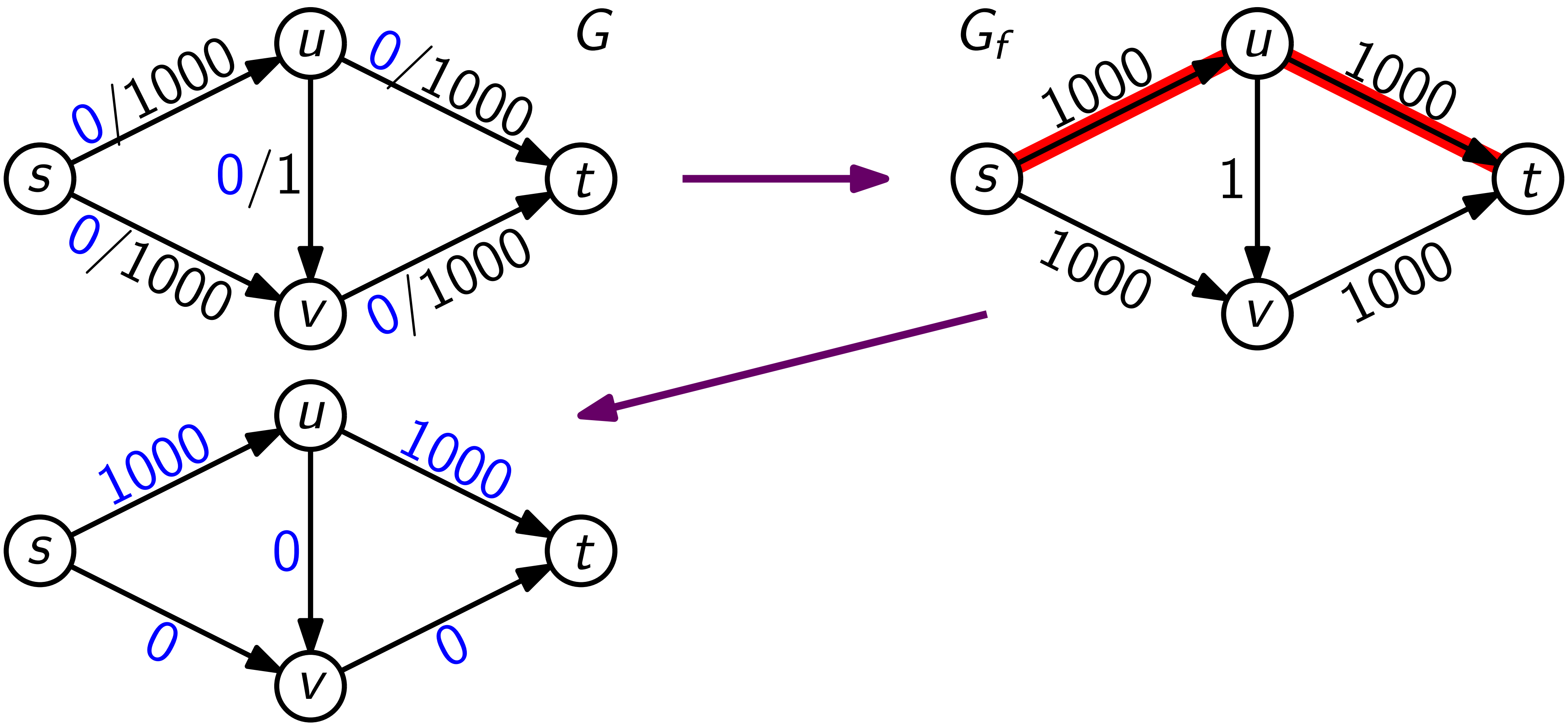


Beispiel

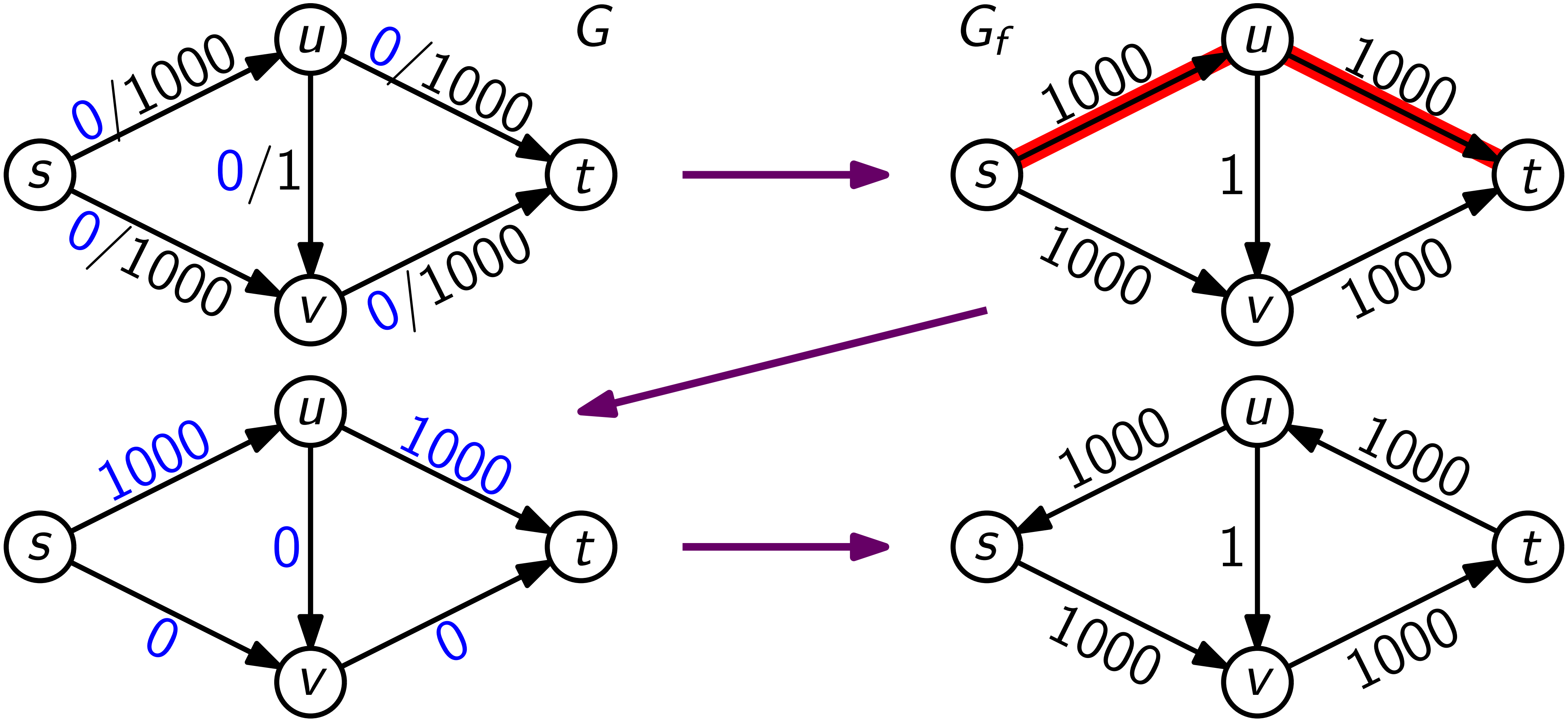

G
s
u
v
t
0/1000
0/1000
0/1
0/1000
0/1000


G_f
s
u
v
t
1000
1000
1
1000
1000

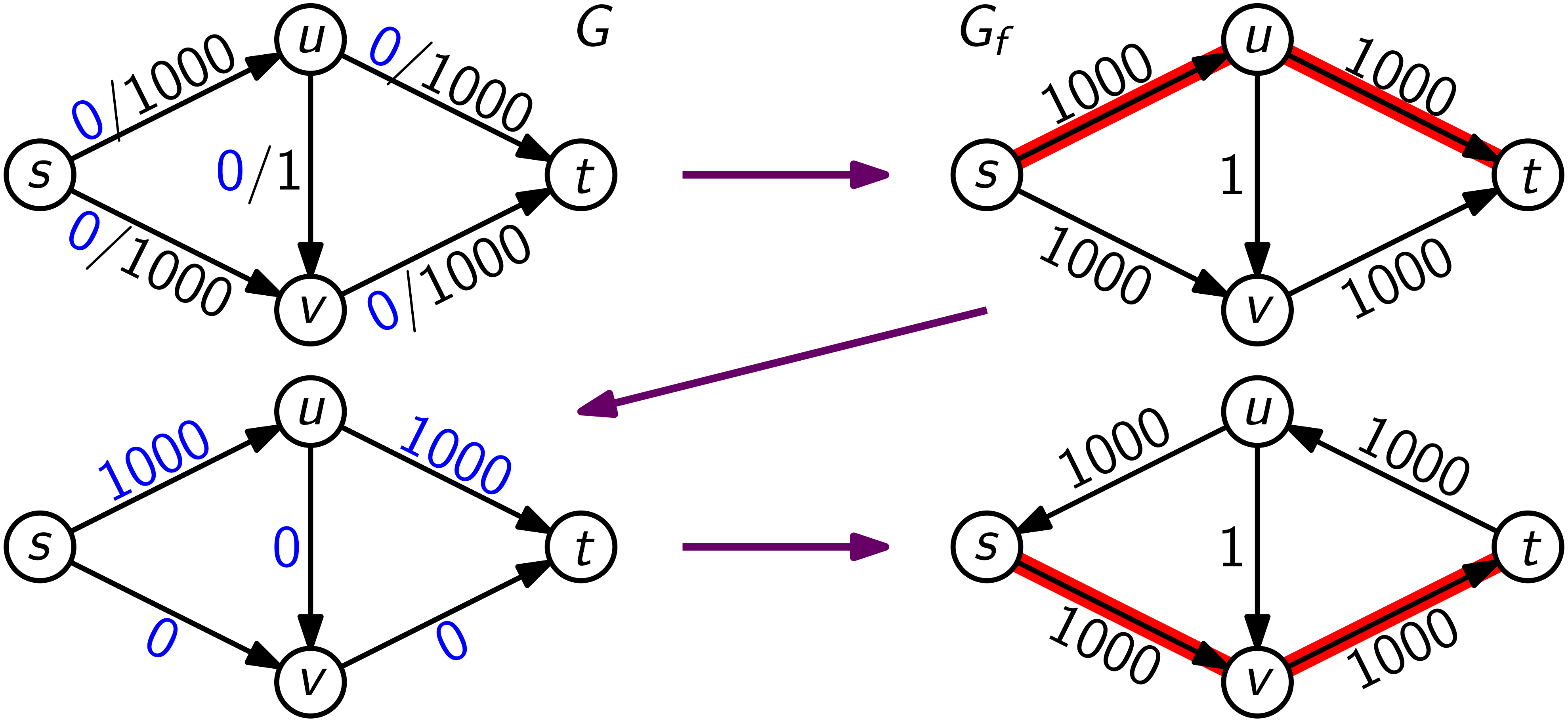
Beispiel


G
s
u
v
t
0/1000
0/1000
0/1
0/1000
0/1000
G_f
1000
1000
1
1000
1000
1000
1000
0
0
0

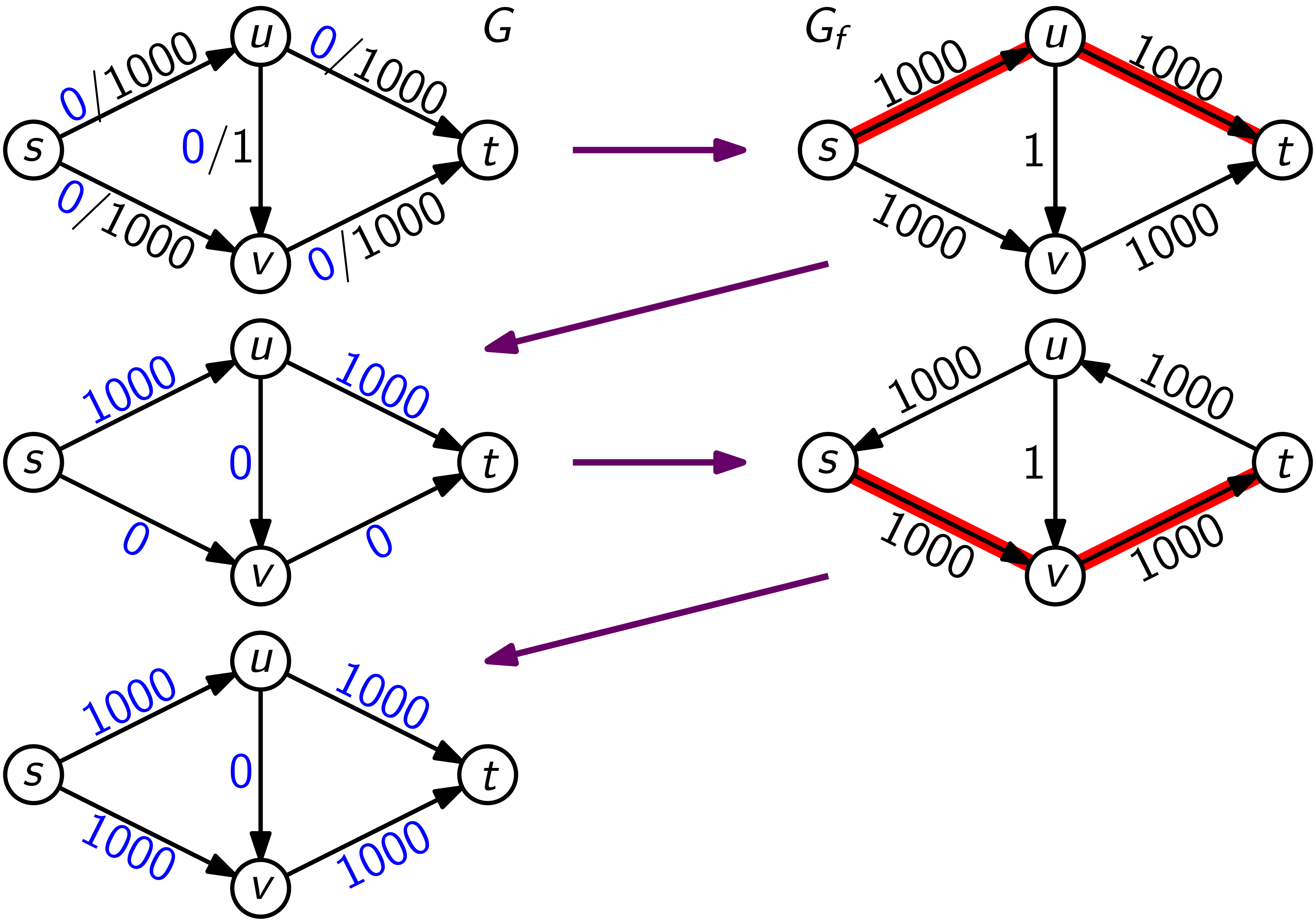
Beispiel


G
u
s
t
v
0/1000
0/1000
0/1
0/1000
0/1000
G_f
1000
1000
1
1000
1000
1000
1000
0
0
0
1000
1000
1
1000
1000

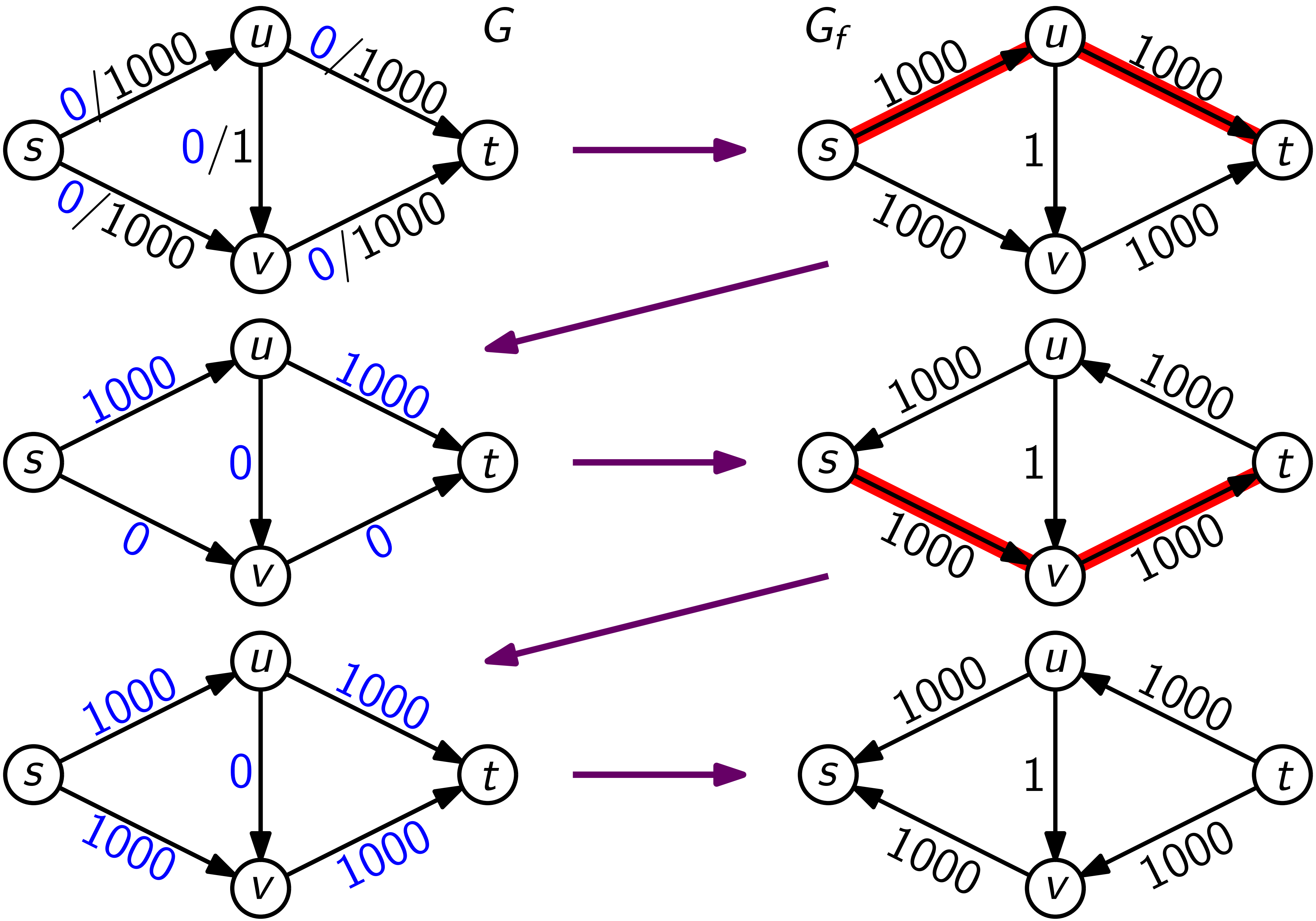
Beispiel


G
s
u
v
t
0/1000
0/1000
0/1
0/1000
0/1000
G_f
1000
1000
1
1000
1000
1000
1000
0
0
0
1000
1000
1
1000
1000

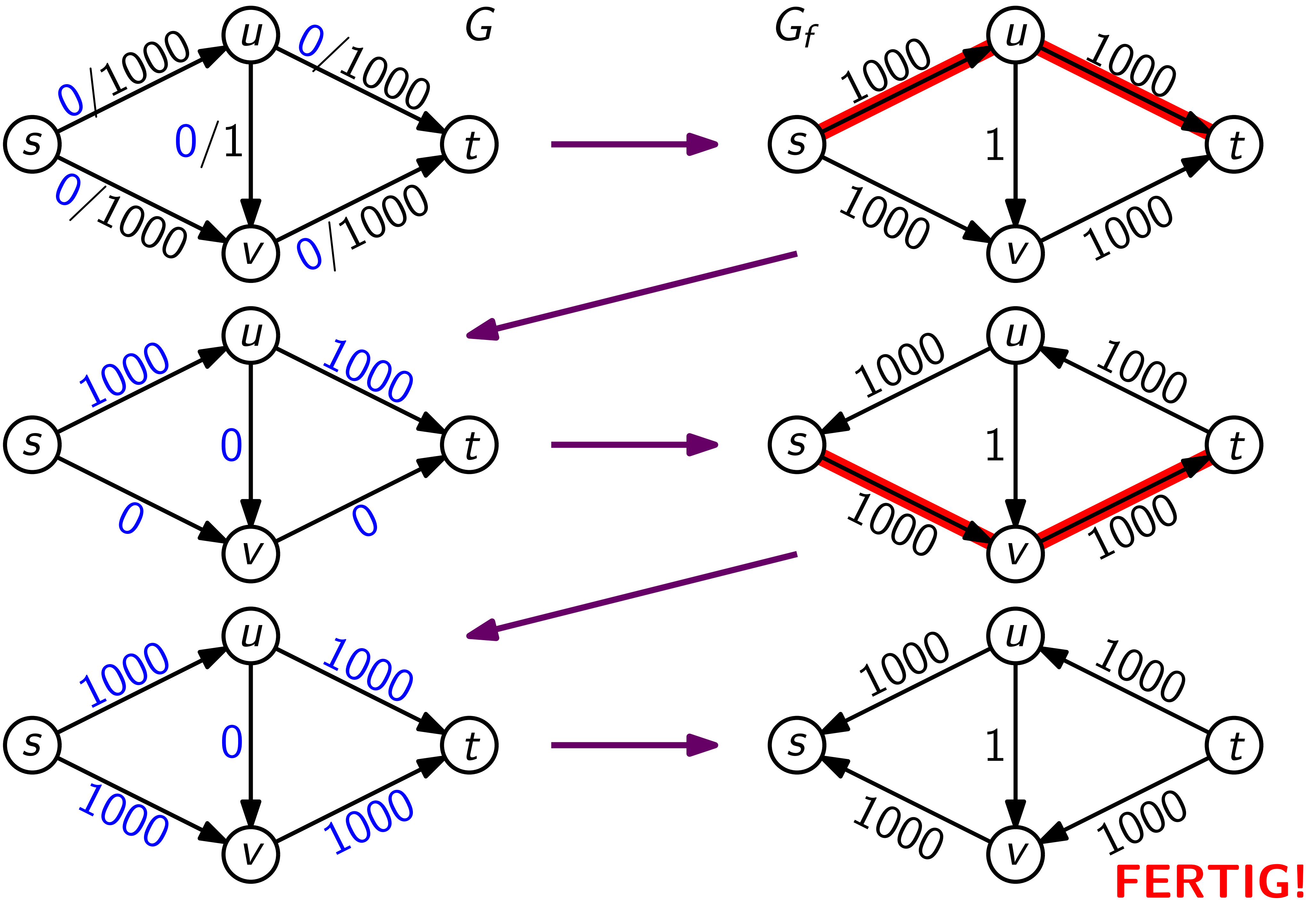
Beispiel



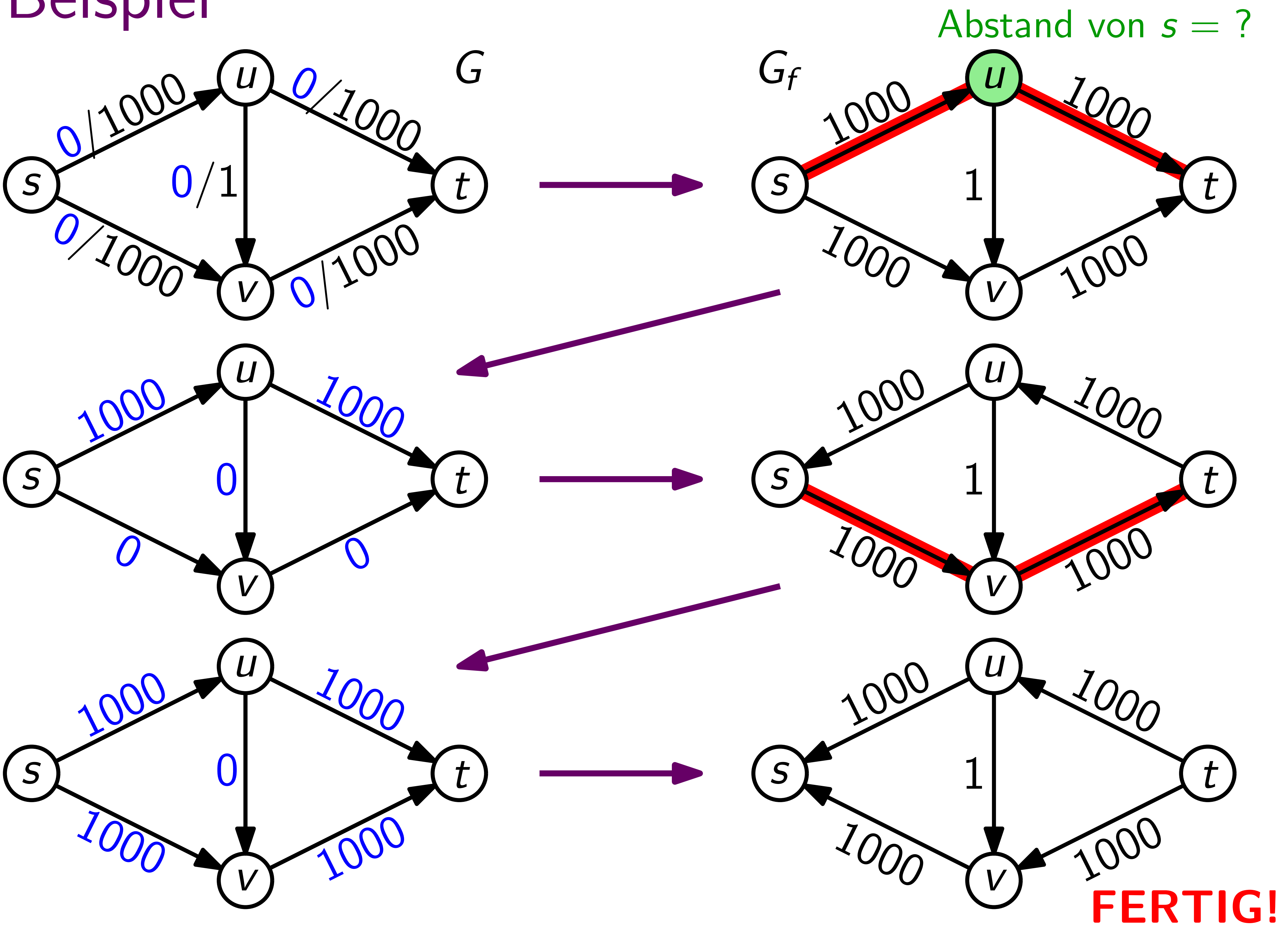
Beispiel


G
G_f
s
u
v
t
0/1000
0/1
0/1000
0/1000
0/1000
1000
1
1000
1000
1000
1000
1000
0
0
0
1000
1000
1000
1000
1
1000
1000
1000
1000
1000
0
1000
1000
1000
1000
1
1000
1000

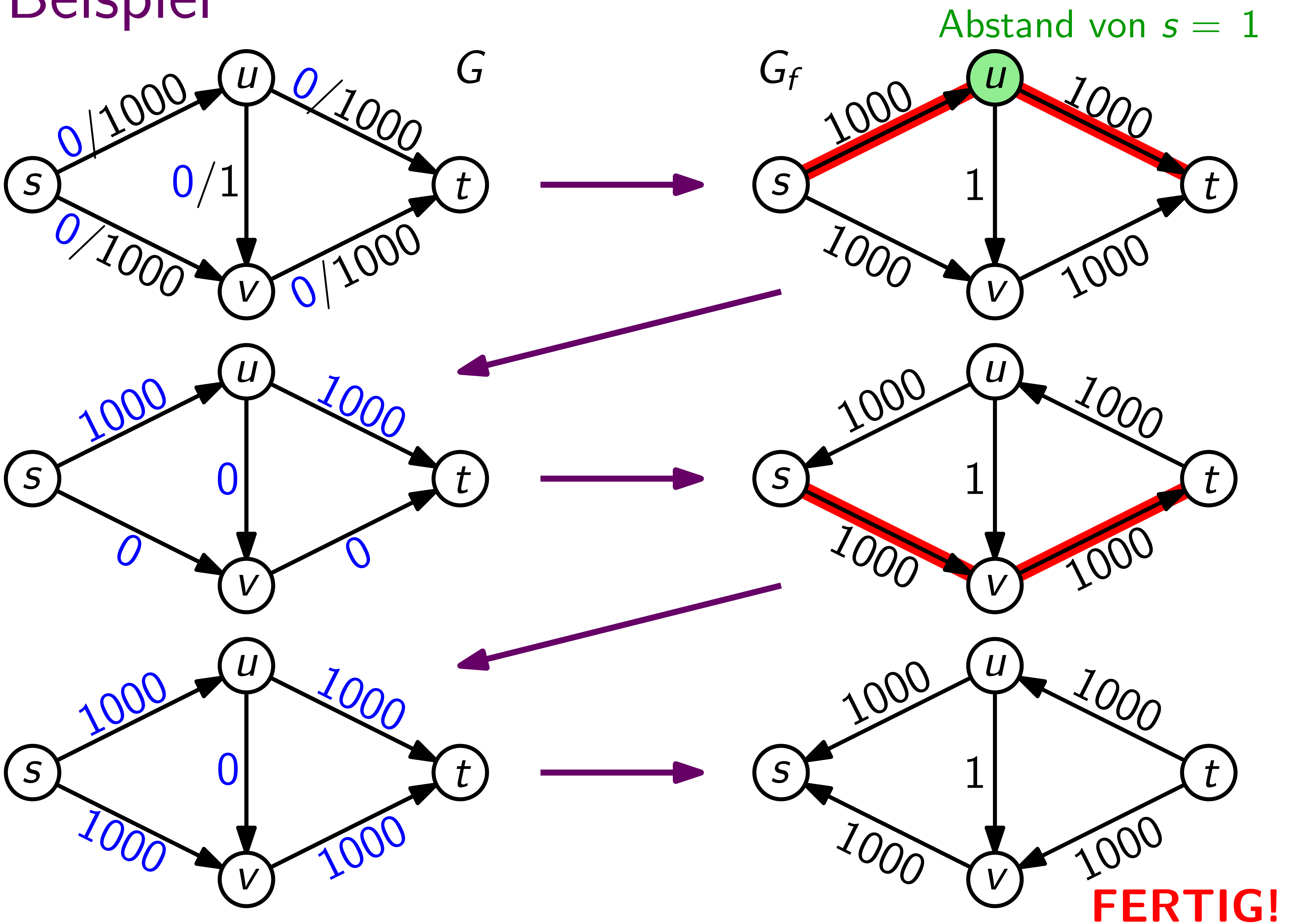
Beispiel


G
G_f
s
u
v
t
0/1000
0/1
0/1000
0/1000
0/1000
1000
1000
1
1000
1000
1000
1000
0
0
0
1000
1000
1000
1000
1
1000
1000
1000
1000
0
1000
1000
1000
1000
1
1000
1000
FERTIG!

Beispiel

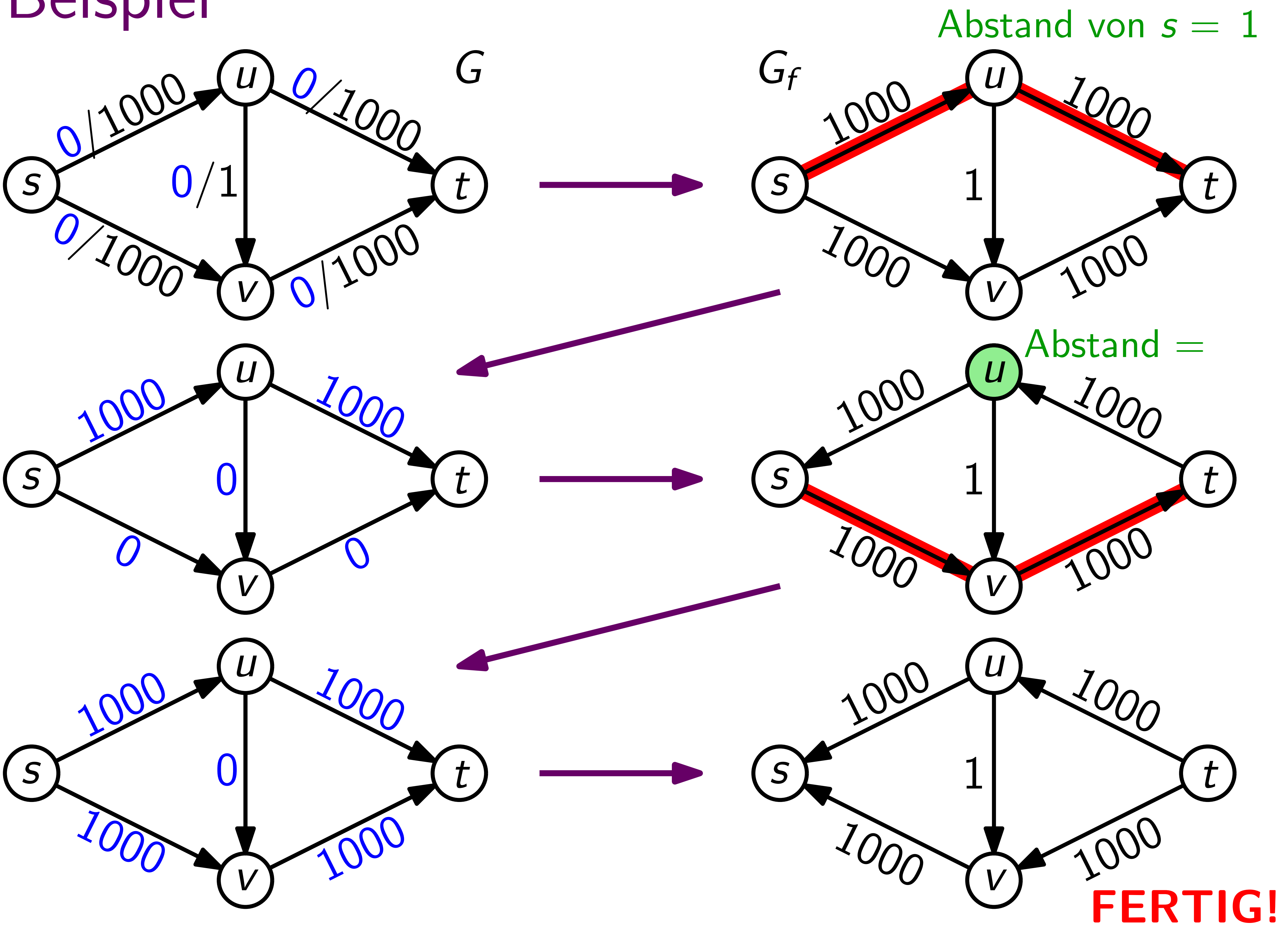


Beispiel

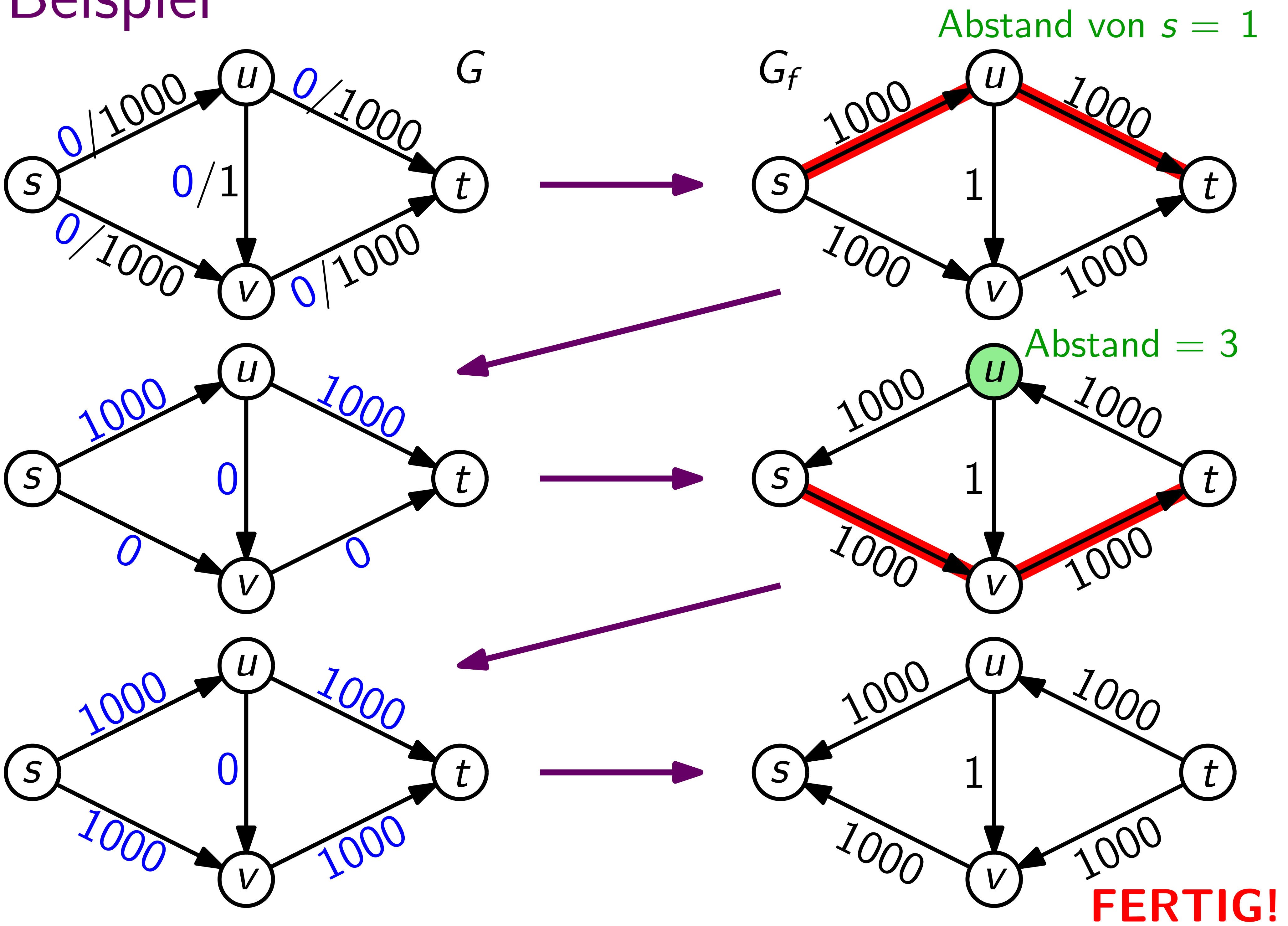


Abstand von $s = 1$
G
G_f
s
u
v
t
0/1000
0/1
0/1000
0/1000
0/1000
1000
1
1000
1000
1000
0
0
0
1000
1000
FERTIG!

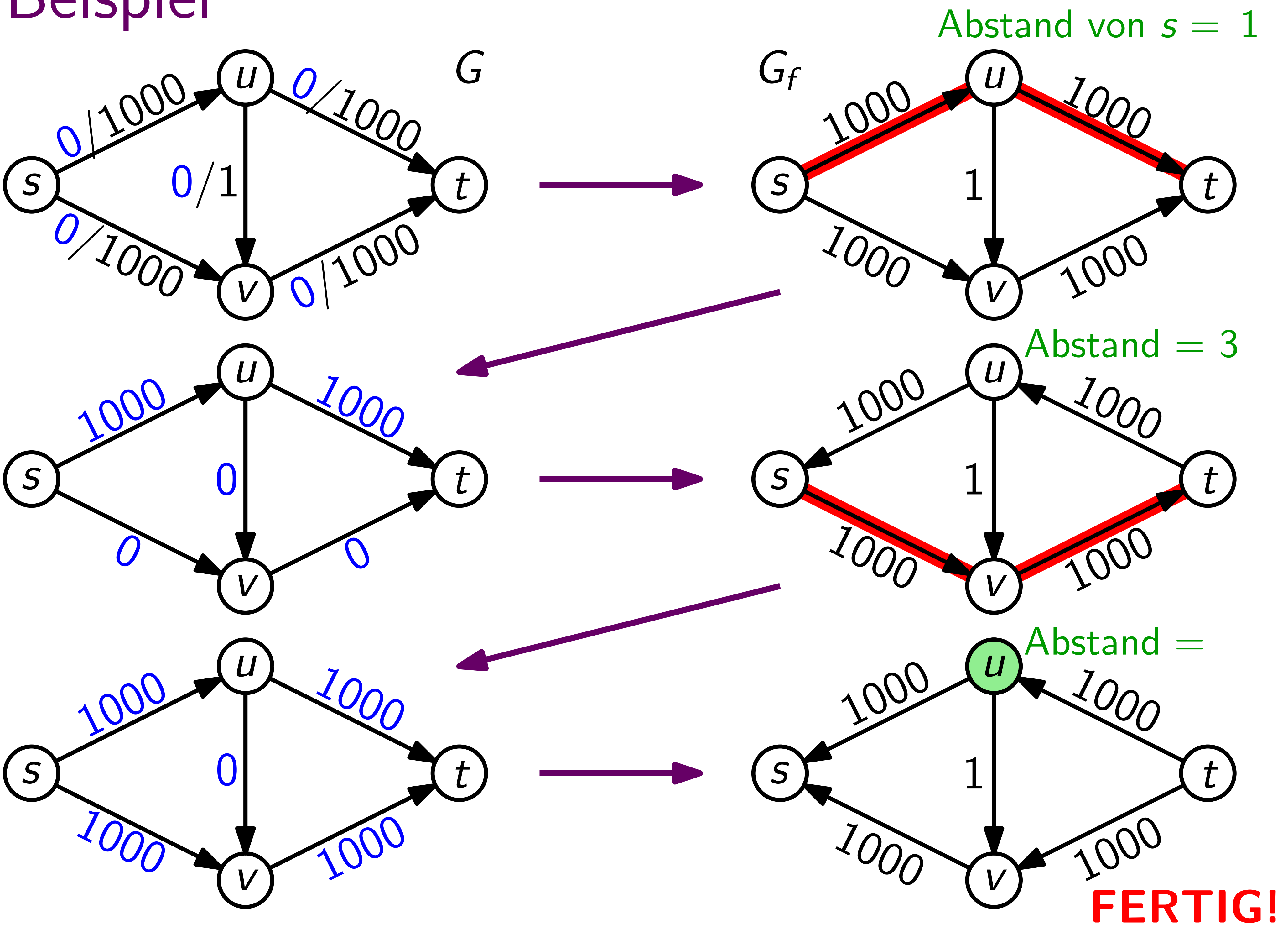
Beispiel



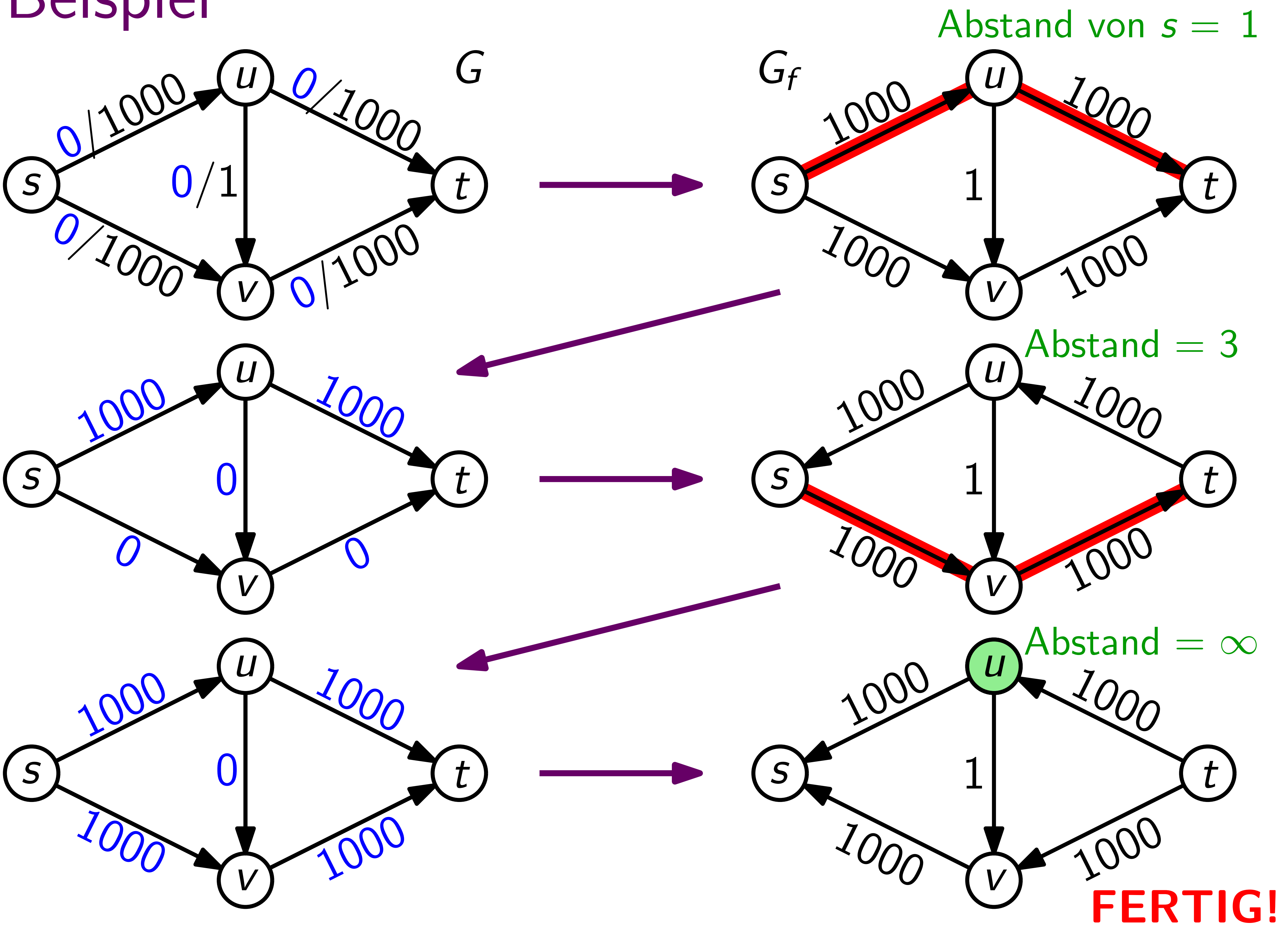
Beispiel


Abstand von s = 1
G
G_f
0/1000
0/1000
0/1
0/1000
0/1000
Abstand = 3
FERTIG!

Beispiel



Beispiel



Abstand von s = 1
G
G_f
s
u
v
t
0/1000
0/1000
0/1
0/1000
0/1000
1000
1000
1
1000
1000
Abstand = 3
1000
1000
0
0
0
1000
1000
1
1000
1000
Abstand = ∞
1000
1000
0
1000
1000
1000
1000
1
1000
1000
FERTIG!

Kürzeste Wege machen effiziente Algorithmen!

Def. Sei $\delta_f(u, v)$ die Länge (= Anz. Kanten) eines kürzesten u-v-Wegs in G_f.

Kürzeste Wege machen effiziente Algorithmen!

Def. Sei $\delta_f(u, v)$ die Länge (= Anz. Kanten) eines kürzesten u-v-Wegs in G_f.

Lemma. Während EdmondsKarp(G, s, t) gilt für jeden Knoten $v \in V$, dass $\delta_f(s, v)$ mit jeder Flussvergrößerung monoton zunimmt.

Kürzeste Wege machen effiziente Algorithmen!

Def. Sei $\delta_f(u, v)$ die Länge (= Anz. Kanten) eines kürzesten u-v-Wegs in G_f.

Lemma. Während EdmondsKarp(G, s, t) gilt für jeden Knoten $v \in V$, dass $\delta_f(s, v)$ mit jeder Flussvergrößerung monoton zunimmt.

Beweis.

Kürzeste Wege machen effiziente Algorithmen!

Def. Sei $\delta_f(u, v)$ die Länge (= Anz. Kanten) eines kürzesten u-v-Wegs in G_f.

Lemma. Während EdmondsKarp(G, s, t) gilt für jeden Knoten $v \in V$, dass $\delta_f(s, v)$ mit jeder Flussvergrößerung monoton zunimmt.

Beweis. Annahme: es gibt einen Knoten v derart, dass $\delta_f(s, v)$ bei einer Vergrößerung von f *abnimmt*.

Kürzeste Wege machen effiziente Algorithmen!

Def. Sei $\delta_f(u,v)$ die Länge (= Anz. Kanten) eines kürzesten u-v-Wegs in G_f.

Lemma. Während EdmondsKarp(G,s,t) gilt für jeden Knoten $v \in V$, dass $\delta_f(s,v)$ mit jeder Flussvergrößerung monoton zunimmt.

Beweis. Annahme: es gibt einen Knoten v derart, dass $\delta_f(s,v)$ bei einer Vergrößerung von f *abnimmt*.

Sei f der Fluss *vor* der Vergrößerung;
sei f' der Fluss *nach* der Vergrößerung.

Kürzeste Wege machen effiziente Algorithmen!

Def. Sei $\delta_f(u, v)$ die Länge (= Anz. Kanten) eines kürzesten u-v-Wegs in G_f.

Lemma. Während EdmondsKarp(G, s, t) gilt für jeden Knoten $v \in V$, dass $\delta_f(s, v)$ mit jeder Flussvergrößerung monoton zunimmt.

Beweis. Annahme: es gibt einen Knoten v derart, dass $\delta_f(s, v)$ bei einer Vergrößerung von f *abnimmt*.

Sei f der Fluss *vor* der Vergrößerung;
sei f' der Fluss *nach* der Vergrößerung.

Ab jetzt sei v unter den Knoten mit $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$ einer mit *minimalem* Wert von $\delta_{f'}(s, v)$.

Kürzeste Wege machen effiziente Algorithmen!

Def. Sei $\delta_f(u,v)$ die Länge (= Anz. Kanten) eines kürzesten u-v-Wegs in G_f.

Lemma. Während EdmondsKarp(G,s,t) gilt für jeden Knoten $v \in V$, dass $\delta_f(s,v)$ mit jeder Flussvergrößerung monoton zunimmt.

Beweis. Annahme: es gibt einen Knoten v derart, dass $\delta_f(s,v)$ bei einer Vergrößerung von f *abnimmt*.

Sei f der Fluss *vor* der Vergrößerung;
sei f' der Fluss *nach* der Vergrößerung.

„kleinster Schurke“

Ab jetzt sei v unter den Knoten mit $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$ einer mit *minimalem* Wert von $\delta_{f'}(s,v)$.

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow$

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s, v) = \delta_{f'}(s, u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s, v) = \delta_{f'}(s, u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s, u) \geq \delta_f(s, u)$

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s, v) = \delta_{f'}(s, u) + 1.$ [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s, u) \geq \delta_f(s, u)$ [u ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s, v) = \delta_{f'}(s, u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s, u) \geq \delta_f(s, u)$ [u ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]

Beh. $uv \notin E_f$

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$ [u ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]

Beh. $uv \notin E_f$

Beweis.

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s, v) = \delta_{f'}(s, u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s, u) \geq \delta_f(s, u)$ [u ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]

Beh. $uv \notin E_f$

Beweis. Angenommen $uv \in E_f$

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$ [u ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]

Beh. $uv \notin E_f$

Beweis. Angenommen $uv \in E_f \quad \Rightarrow$

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1.$ [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$ [u ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]

Beh. $uv \notin E_f$

Beweis. Angenommen $uv \in E_f \quad \Rightarrow \delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u) + 1$

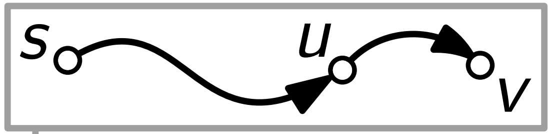
Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$ [u ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]



Beh. $uv \notin E_f$

Beweis. Angenommen $uv \in E_f$ $\Rightarrow$ $\delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u) + 1$

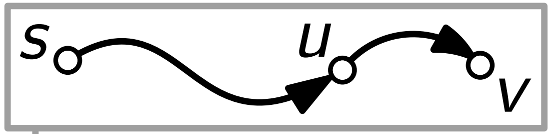
Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1.$ [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$ [u ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]



Beh. $uv \notin E_f$

Beweis. Angenommen $uv \in E_f$ $\Rightarrow \delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u) + 1$

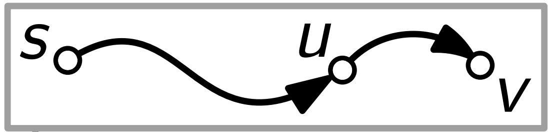
Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s, v) = \delta_{f'}(s, u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s, u) \geq \delta_f(s, u)$ [*u* ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]



Beh. $uv \notin E_f$

Beweis. Angenommen $uv \in E_f$ $\Rightarrow \delta_f(s, v) \leq \delta_f(s, u) + 1$

$$\leq \delta_{f'}(s, u) + 1$$

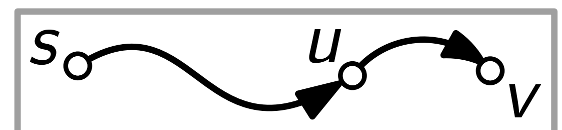
Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$ [u ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]



Beh. $uv \notin E_f$

Beweis. Angenommen $uv \in E_f$ $\Rightarrow \delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u) + 1$

$$\leq \delta_{f'}(s,u) + 1$$

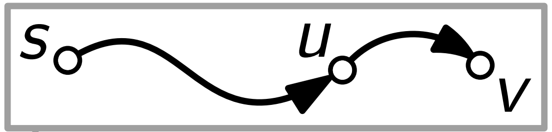
Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$ [*u* ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]



Beh. $uv \notin E_f$

Beweis. Angenommen $uv \in E_f$ $\Rightarrow$ $\delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u) + 1$

$$\leq \delta_{f'}(s,u) + 1$$

$$= \delta_{f'}(s,v)$$

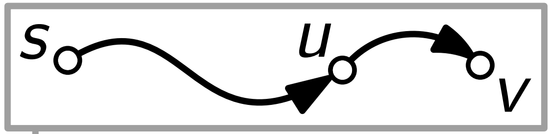
Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$ [u ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]



Beh. $uv \notin E_f$

Beweis. Angenommen $uv \in E_f$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \delta_f(s,v) &\leq \delta_f(s,u) + 1 \\ &\leq \delta_{f'}(s,u) + 1 \\ &= \delta_{f'}(s,v) \end{aligned}$$

Widerspruch zur Annahme, dass $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$. △

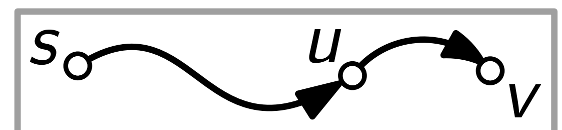
Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s, v) = \delta_{f'}(s, u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s, u) \geq \delta_f(s, u)$ [u ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]



Beh. $uv \notin E_f$

Beweis. Angenommen $uv \in E_f$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \delta_f(s, v) &\leq \delta_f(s, u) + 1 \\ &\leq \delta_{f'}(s, u) + 1 \\ &= \delta_{f'}(s, v) \end{aligned}$$

Widerspruch zur Annahme, dass $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$. △

Aber wie können wir $uv \notin E_f$ und $uv \in E_{f'}$ erklären??

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

2. Fall: $vu \in E$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \not\in E_f$ bedeutet

2. Fall: $vu \in E$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

2. Fall: $vu \in E$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet

2. Fall: $vu \in E$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

2. Fall: $vu \in E$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\leadsto$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\leadsto$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

$\leadsto$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Der Fluss wird in beiden Fällen entlang vu vergrößert.

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Der Fluss wird in beiden Fällen entlang vu vergrößert.

Da EdmondsKarp entlang kürzester Wege vergrößert, muss v Vorgänger von u auf einem kürzesten s-u-Weg in G_f sein.

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Der Fluss wird in beiden Fällen entlang vu vergrößert.
Da EdmondsKarp entlang kürzester Wege vergrößert, muss v Vorgänger von u auf einem kürzesten s-u-Weg in G_f sein.

$\Rightarrow \delta_f(s, v) =$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\leadsto$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

$\leadsto$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Der Fluss wird in beiden Fällen entlang vu vergrößert.

Da EdmondsKarp entlang kürzester Wege vergrößert, muss v Vorgänger von u auf einem kürzesten s-u-Weg in G_f sein.

$\Rightarrow \delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) - 1$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Der Fluss wird in beiden Fällen entlang vu vergrößert.

Da EdmondsKarp entlang kürzester Wege vergrößert, muss v Vorgänger von u auf einem kürzesten s-u-Weg in G_f sein.

[u kein Schurke]

$$\Rightarrow \delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) - 1 \leq$$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\leadsto$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

$\leadsto$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Der Fluss wird in beiden Fällen entlang vu vergrößert.
Da EdmondsKarp entlang kürzester Wege vergrößert, muss v Vorgänger von u auf einem kürzesten s-u-Weg in G_f sein.

$$\Rightarrow \delta_f(s, v) \overset{[u \text{ kein Schurke}]}{=} \delta_f(s, u) - 1 \;\leq\; \delta_{f'}(s, u) - 1$$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Der Fluss wird in beiden Fällen entlang vu vergrößert.
Da EdmondsKarp entlang kürzester Wege vergrößert, muss v Vorgänger von u auf einem kürzesten s-u-Weg in G_f sein.

[u kein Schurke] [u liegt auf W vor v]

$$\Rightarrow \delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) - 1 \leq \delta_{f'}(s,u) - 1 =$$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Der Fluss wird in beiden Fällen entlang vu vergrößert.

Da EdmondsKarp entlang kürzester Wege vergrößert, muss v Vorgänger von u auf einem kürzesten s-u-Weg in G_f sein.

$$\Rightarrow \delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) - 1 \underset{[u \text{ kein Schurke}]}{\leq} \delta_{f'}(s,u) - 1 \underset{[u \text{ liegt auf } W \text{ vor } v]}{=} \delta_{f'}(s,v) - 2$$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Der Fluss wird in beiden Fällen entlang vu vergrößert.

Da EdmondsKarp entlang kürzester Wege vergrößert, muss v Vorgänger von u auf einem kürzesten s-u-Weg in G_f sein.

$$\Rightarrow \delta_f(s,v) \underset{<}{=} \delta_f(s,u) - 1 \overset{[u \text{ kein Schurke}]}{\leq} \delta_{f'}(s,u) - 1 \overset{[u \text{ liegt auf } W \text{ vor } v]}{=} \delta_{f'}(s,v) - 2$$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Der Fluss wird in beiden Fällen entlang vu vergrößert.
Da EdmondsKarp entlang kürzester Wege vergrößert, muss v Vorgänger von u auf einem kürzesten s-u-Weg in G_f sein.

$$\Rightarrow \delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) - 1 \overset{[u \text{ kein Schurke}]}{\leq} \delta_{f'}(s,u) - 1 \overset{[u \text{ liegt auf } W \text{ vor } v]}{=} \delta_{f'}(s,v) - 2 < \delta_{f'}(s,v).$$

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Der Fluss wird in beiden Fällen entlang vu vergrößert.
Da EdmondsKarp entlang kürzester Wege vergrößert, muss v Vorgänger von u auf einem kürzesten s-u-Weg in G_f sein.

$$\Rightarrow \delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) - 1 \overset{[u \text{ kein Schurke}]}{\leq} \delta_{f'}(s,u) - 1 \overset{[u \text{ liegt auf } W \text{ vor } v]}{=} \delta_{f'}(s,v) - 2$$

$$< \delta_{f'}(s,v). \quad \text{Widerspr. zur Ann. } \delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v).$$

$\square$

Anzahl Flusserhöhungen & Laufzeit

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Anzahl Flusserhöhungen & Laufzeit

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Korollar. Der Edmonds-Karp-Algorithmus läuft in $O(VE^2)$ Zeit.

Anzahl Flusserhöhungen & Laufzeit

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Korollar. Der Edmonds-Karp-Algorithmus läuft in $O(VE^2)$ Zeit.

Beweis. Jede der $O(VE)$ Flussvergrößerungen benötigt $O(E)$ Zeit bei Anwendung von Breitensuche. $\square$

Beweis (Satz)

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis. Sei f der aktuelle, nicht maximale Fluss in G.

Sei W der kürzeste s-t-Weg in G_f, entlang dem der Fluss vergrößert wird.

Beweis (Satz)

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis. Sei f der aktuelle, nicht maximale Fluss in G.

Sei W der kürzeste s-t-Weg in G_f, entlang dem der Fluss vergrößert wird. Kante e auf W heißt *kritisch*, wenn $c_f(e) = \Delta_W$.

Beweis (Satz)

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis. Sei f der aktuelle, nicht maximale Fluss in G.

Sei W der kürzeste s-t-Weg in G_f, entlang dem der Fluss vergrößert wird. Kante e auf W heißt *kritisch*, wenn $c_f(e) = \Delta_W$.

Zeige: Jede Kante uv kann höchstens $O(V)$ mal kritisch sein.

Beweis (Satz)

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis. Sei f der aktuelle, nicht maximale Fluss in G.

Sei W der kürzeste s-t-Weg in G_f, entlang dem der Fluss vergrößert wird. Kante e auf W heißt *kritisch*, wenn $c_f(e) = \Delta_W$.

Zeige: Jede Kante uv kann höchstens $O(V)$ mal kritisch sein.

$\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$, da uv auf *kürzestem* Weg W in G_f.

Beweis (Satz)

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis. Sei f der aktuelle, nicht maximale Fluss in G.

Sei W der kürzeste s-t-Weg in G_f, entlang dem der Fluss vergrößert wird. Kante e auf W heißt *kritisch*, wenn $c_f(e) = \Delta_W$.

Zeige: Jede Kante uv kann höchstens $O(V)$ mal kritisch sein.

$\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$, da uv auf *kürzestem* Weg W in G_f.

Nach Flussvergrößerung entlang W verschwindet uv aus G_f.

Beweis (Satz)

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis. Sei f der aktuelle, nicht maximale Fluss in G.

Sei W der kürzeste s-t-Weg in G_f, entlang dem der Fluss vergrößert wird. Kante e auf W heißt *kritisch*, wenn $c_f(e) = \Delta_W$.

Zeige: Jede Kante uv kann höchstens $O(V)$ mal kritisch sein.

$\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$, da uv auf *kürzestem* Weg W in G_f.

Nach Flussvergrößerung entlang W verschwindet uv aus G_f.

Die Kante uv erscheint erst wieder im Residualgraphen, nachdem Fluss entlang vu vergrößert wurde $\Rightarrow$

Beweis (Satz)

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis. Sei f der aktuelle, nicht maximale Fluss in G.

Sei W der kürzeste s-t-Weg in G_f, entlang dem der Fluss vergrößert wird. Kante e auf W heißt *kritisch*, wenn $c_f(e) = \Delta_W$.

Zeige: Jede Kante uv kann höchstens $O(V)$ mal kritisch sein.

$\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$, da uv auf *kürzestem* Weg W in G_f.

Nach Flussvergrößerung entlang W verschwindet uv aus G_f.

Die Kante uv erscheint erst wieder im Residualgraphen, nachdem Fluss entlang vu vergrößert wurde $\Rightarrow$ $vu \in E_{f'}$

f' = Fluss direkt *vor* dieser Vergrößerung (aber *nach* dem Zeitpunkt, als f der Fluss war.)

Fortsetzung Beweis

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis (Forts.)

Da vu auf kürzestem flussvergrößerndem Weg in $G_{f'}$ liegt, gilt

$$\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) + 1$$

Fortsetzung Beweis

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis (Forts.)

Da vu auf kürzestem flussvergrößerndem Weg in $G_{f'}$ liegt, gilt

$$\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) + 1$$

voriges Lemma

$$\geq$$

Fortsetzung Beweis

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis (Forts.)

Da vu auf kürzestem flussvergrößerndem Weg in $G_{f'}$ liegt, gilt

voriges Lemma

$$\begin{aligned}\delta_{f'}(s,u) &= \delta_{f'}(s,v) + 1 \\ &\geq \delta_f(s,v) + 1 \\ &= \end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis (Forts.)

Da vu auf kürzestem flussvergrößerndem Weg in $G_{f'}$ liegt, gilt

$$\begin{aligned}\delta_{f'}(s,u) &= \delta_{f'}(s,v) + 1 \\ &\geq \delta_f(s,v) + 1 \\ &= \end{aligned}$$

voriges Lemma

uv auf W in G_f

Fortsetzung Beweis

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis (Forts.)

Da vu auf kürzestem flussvergrößerndem Weg in $G_{f'}$ liegt, gilt

$$\begin{aligned}
\delta_{f'}(s,u) &= \delta_{f'}(s,v) + 1 \\
\text{voriges Lemma} \quad &\geq \delta_f(s,v) + 1 \\
uv \text{ auf } W \text{ in } G_f \quad &= \delta_f(s,u) + 1 + 1.
\end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis (Forts.)

Da vu auf kürzestem flussvergrößerndem Weg in $G_{f'}$ liegt, gilt

voriges Lemma

uv auf W in G_f

$$\begin{aligned} \delta_{f'}(s,u) &= \delta_{f'}(s,v) + 1 \\ &\geq \delta_f(s,v) + 1 \\ &= \delta_f(s,u) + 1 + 1. \end{aligned}$$

Also steigt $\delta_{\square}(s,u)$, bis uv das nächste Mal kritisch ist, um ≥ 2.

Fortsetzung Beweis

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis (Forts.)

Da vu auf kürzestem flussvergrößerndem Weg in $G_{f'}$ liegt, gilt

$$\begin{aligned} \delta_{f'}(s,u) &= \delta_{f'}(s,v) + 1 \\ &\geq \delta_f(s,v) + 1 && \text{voriges Lemma} \\ &= \delta_f(s,u) + 1 + 1. && uv \text{ auf } W \text{ in } G_f \end{aligned}$$

Also steigt $\delta_{\square}(s,u)$, bis uv das nächste Mal kritisch ist, um ≥ 2.

Kürzeste Wege sind *einfach*, d.h. besuchen jeden Knoten $\leq 1\times$.

Fortsetzung Beweis

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis (Forts.)

Da vu auf kürzestem flussvergrößerndem Weg in $G_{f'}$ liegt, gilt

$$\begin{aligned}
\delta_{f'}(s,u) &= \delta_{f'}(s,v) + 1 \\
\text{voriges Lemma} \quad &\geq \delta_f(s,v) + 1 \\
uv \text{ auf } W \text{ in } G_f \quad &= \delta_f(s,u) + 1 + 1.
\end{aligned}$$

Also steigt $\delta_\square(s,u)$, bis uv das nächste Mal kritisch ist, um ≥ 2.

Kürzeste Wege sind *einfach*, d.h. besuchen jeden Knoten $\leq 1\times$.

$\Rightarrow \delta_\square(s,u) < |V|$, solange u von s erreicht werden kann.

Fortsetzung Beweis

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis (Forts.)

Da vu auf kürzestem flussvergrößerndem Weg in $G_{f'}$ liegt, gilt

$$\begin{aligned} \delta_{f'}(s,u) &= \delta_{f'}(s,v) + 1 \\ &\geq \delta_{f}(s,v) + 1 \\ &= \delta_{f}(s,u) + 1 + 1. \end{aligned}$$

voriges Lemma

uv auf W in G_f

Also steigt $\delta_{\Box}(s,u)$, bis uv das nächste Mal kritisch ist, um ≥ 2.

Kürzeste Wege sind *einfach*, d.h. besuchen jeden Knoten $\leq 1\times$.

$\Rightarrow \delta_{\Box}(s,u) < |V|$, solange u von s erreicht werden kann.

$\Rightarrow$ Die Kante uv kann nur $O(V)$ mal kritisch sein. $\Box$

Kurze Geschichte der Berechnung max. Flüsse

Methode	*Laufzeit* $O(\cdot)$	*Autoren*
Allgemeine gerichtete Graphen		
shortest resid. s-t path	VE^2	Dinic '70, Ed. & Karp '72

Kurze Geschichte der Berechnung max. Flüsse

Methode	*Laufzeit* $O(\cdot)$	*Autoren*
	Allgemeine gerichtete Graphen	
shortest resid. s-t path	VE^2	Dinic '70, Ed. & Karp '72
push relabel	V^2E	Goldberg '87

Kurze Geschichte der Berechnung max. Flüsse

Methode	*Laufzeit* $O(\cdot)$	*Autoren*
	Allgemeine gerichtete Graphen	
shortest resid. s-t path	VE^2	Dinic '70, Ed. & Karp '72
push relabel	V^2E	Goldberg '87
relabel to front	V^3	Goldberg & Tarjan '88
	$VE\log(V^2/E+2)$	— " —

Kurze Geschichte der Berechnung max. Flüsse

Methode	*Laufzeit* $O(\cdot)$	*Autoren*
	Allgemeine gerichtete Graphen	
shortest resid. s-t path	VE^2	Dinic '70, Ed. & Karp '72
push relabel	V^2E	Goldberg '87
relabel to front	V^3	Goldberg & Tarjan '88
	$VE\log(V^2/E+2)$	— " —
blocking flow	$\min(V^{2/3}, E^{1/2}) \cdot E \cdot$	Goldberg & Rao '98
	$\cdot \log(V^2/E+2) \cdot \log C$,	wobei $C = \sum_{e \in E} c(e)$

Kurze Geschichte der Berechnung max. Flüsse

Methode	*Laufzeit* $O(\cdot)$	*Autoren*
	Allgemeine gerichtete Graphen	
shortest resid. s-t path	VE^2	Dinic '70, Ed. & Karp '72
push relabel	V^2E	Goldberg '87
relabel to front	V^3	Goldberg & Tarjan '88
	$VE\log(V^2/E+2)$	— " —
blocking flow	$\min(V^{2/3}, E^{1/2}) \cdot E \cdot$	Goldberg & Rao '98
	$\cdot \log(V^2/E+2) \cdot \log C$,	wobei $C = \sum_{e \in E} c(e)$
new	VE	Orlin '13

Kurze Geschichte der Berechnung max. Flüsse

Methode	*Laufzeit* $O(\cdot)$	*Autoren*
	Allgemeine gerichtete Graphen	
shortest resid. s-t path	VE^2	Dinic '70, Ed. & Karp '72
push relabel	V^2E	Goldberg '87
relabel to front	V^3	Goldberg & Tarjan '88
	$VE\log(V^2/E+2)$	— " —
blocking flow	$\min(V^{2/3}, E^{1/2}) \cdot E \cdot$	Goldberg & Rao '98
	$\cdot \log(V^2/E+2) \cdot \log C$,	wobei $C = \sum_{e \in E} c(e)$
new	VE	Orlin '13
	s-t-planare Graphen	
shortest path in dual	V	Hassin '81
		+ Henzinger et al. '97

Kurze Geschichte der Berechnung max. Flüsse

Methode	*Laufzeit* $O(\cdot)$	*Autoren*
	Allgemeine gerichtete Graphen	
shortest resid. s-t path	VE^2	Dinic '70, Ed. & Karp '72
push relabel	V^2E	Goldberg '87
relabel to front	V^3	Goldberg & Tarjan '88
	$VE\log(V^2/E+2)$	— " —
blocking flow	$\min(V^{2/3}, E^{1/2}) \cdot E \cdot$ $\cdot \log(V^2/E+2) \cdot \log C$,	Goldberg & Rao '98 wobei $C = \sum_{e \in E} c(e)$
new	VE	Orlin '13
	s-t-planare Graphen	
shortest path in dual	V	Hassin '81 + Henzinger et al. '97
	Planare Graphen	
leftmost resid. s-t path	$V\log V$	Borradaile & Klein '06
+ vertex capacities	$V\log V$	Kaplan & Nussbaum '09