Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 16. Januar 2025

Prof. Dr. Alexander Wolff
Samuel Wolf, M. Sc.

9. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2024/25)

Aufgabe 1 – Springer auf Schachfeld

Gesucht ist ein Algorithmus, der ermittelt, wieviele Züge ein Springer benötigt, um auf einem Schachbrett mit $n \times n$ Feldern von Feld (x_1, y_1) zu Feld (x_2, y_2) zu kommen.

a) Wie lässt sich dieses Problem als Kürzeste-Wege-Problem auf einem Graphen modellieren? Was repräsentieren die Knoten und Kanten des Graphen? **1 Punkt**

b) Geben Sie für das gewöhnliche Schachbrett mit 8×8 Feldern die genaue Anzahl der Kanten des Graphen an. **1 Punkt**

c) Geben Sie für ein Schachbrett mit $n \times n$ Feldern eine obere Schranke für die Anzahl der Kanten an. Verwenden Sie dafür die Groß-O-Notation. **1 Punkt**

d) Geben Sie einen Algorithmus an, der die erforderliche Anzahl an Zügen in $\Theta(n^2)$ Zeit berechnet. Begründen Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus. **2 Punkte**

Aufgabe 2 – Wandern im Gebirge

Sie planen eine gefährliche Wanderung in einem gebirgigen Terrain, bei der Sie immer wieder über tiefe Schluchten springen müssen. Ihnen steht eine Wanderkarte zur Verfügung, auf der Berggipfel und Wegabschnitte eingezeichnet sind. Ein Wegabschnitt verbindet immer zwei Berggipfel und enthält genau eine Schlucht, die man auf dem Wegabschnitt überwinden muss. Zu jedem Wegabschnitt ist zusätzlich die Breite der zu überwindenden Schlucht in Zentimetern angegeben. Einige Wegabschnitte kann man nur in eine Richtung gehen, weil man z.B. hinunterspringen muss.

Sie starten Ihre Wanderung auf einem Berggipfel s und möchten herausfinden, wie weit man springen können muss, um jeden Berggipfel von s aus zu erreichen. (Ein Berggipfel t ist für Sie von s aus erreichbar, wenn es einen Weg von s nach t gibt, bei der Sie jede Schlucht überspringen können.)

a) Noch aus dem Sportunterricht in der Schule wissen Sie, dass Sie lediglich ℓ Zentimeter weit springen können. Sie können also über Schluchten, die breiter als ℓ sind, nicht springen.

Sie möchten herausfinden, welche Berggipfel Sie von s aus erreichen können. Modellieren Sie zunächst das Problem als ein Graphenproblem. Geben Sie anschließend einen Algorithmus in Worten an, der dieses Problem löst und eine Worst-Case-Laufzeit hat, die linear in der Anzahl der Berggipfel und Wegabschnitte ist.

6 Punkte

b) Sie möchten vor Ihrer Wanderung trainieren und Ihre Sprungweite verbessern. Hierzu möchten Sie für jeden Berggipfel t herausfinden, wie weit Sie springen können müssen, um t von s aus zu erreichen.

Geben Sie in Worten einen Algorithmus an, der dieses Problem möglichst effizient löst. Geben Sie seine Worst-Case-Laufzeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Berggipfel und der Anzahl der Wegabschnitte an. **4 Punkte**

Aufgabe 3 – Tiefensuche

Geben Sie für jedes der geforderten Beispiele den Graphen und das Ergebnis einer Tiefensuche in Form der resultierenden Bäume sowie der Entdeckungs- und Abschlusszeiten an. In dieser Aufgabe sind keine Selbst- oder Mehrfachkanten erlaubt.

a) Geben Sie ein Beispiel an, das folgende Behauptung widerlegt:

Sei G ein gerichteter Graph, der einen Pfad von u nach v enthält, und sei $u.d < v.d$ das Resultat einer Tiefensuche in G. Dann folgt, dass v im Tiefensuchbaum ein Nachkomme von u ist (d.h. es gibt in diesem Baum einen u-v-Pfad). **2 Punkte**

b) Geben Sie ein Beispiel an, das folgende Behauptung widerlegt:

Sei G ein gerichteter Graph, der einen Pfad von u nach v enthält. Für die Entdeckungs- und Abschlusszeiten jeder Tiefensuche in G gilt dann $v.d < u.f$.

1 Punkt

c) Geben Sie ein Beispiel für eine Tiefensuche in einem gerichteten Graphen G an, in der ein Baum mit einem einzelnen Knoten u gebildet wird, obwohl u sowohl eingehende als auch ausgehende Kanten hat. **2 Punkte**

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Donnerstag, 23. Januar 2025, 14:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit PABS gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (*sXXXXXX*-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.