Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 7. November 2024

Prof. Dr. Alexander Wolff

1. Präsenzübungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2024/25)

Aufgabe 1 – Quadratsumme

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass folgende Gleichung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Aufgabe 2 – O-Notation

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen. Arbeiten Sie mit der Definition aus der Vorlesung, nicht mit Grenzwertbetrachtungen.

a) Für $f\colon n \mapsto \frac{1}{2}n - 2$ gilt $f \in \Omega(\log_2 n)$

b) Für $f\colon n \mapsto 2^{2n}$ gilt $f \in O(2^n)$

Aufgabe 3 – Heaps anwenden

In dieser Aufgabe soll es um MaxHeaps gehen und wie die Algorithmen aus der Vorlesung für MinHeaps auch für MaxHeaps adaptiert werden können. Gegeben sei ein Feld A von Zahlen $A = \langle 4, 1, 7, 5, 3, 2, 10, 8, 9 \rangle$.

a) Wandeln Sie A in einen MaxHeap um. Benutzen Sie dazu den Algorithmus BuildMaxHeap, der analog zu BuildMinHeap aus der Vorlesung definiert ist. Geben Sie jeweils in jedem Schritt das Ergebnis von MaxHeapify (analog zu MinHeapify definiert) an.

b) Rufen Sie IncreaseKey(9, 12) auf folgendem MaxHeap auf $\langle 11, 10, 8, 7, 6, 3, 5, 2, 0, 1, 4 \rangle$, wobei IncreaseKey der korrespondierende Algorithmus zu DecreaseKey aus der Vorlesung ist.

Aufgabe 4 – Rekursionsgleichungen

Gegeben sei folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = \begin{cases} 3T(n/4) + \sqrt{n} & \text{falls } n > 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Geben Sie eine Funktion g an, so dass $T \in \Theta(g)$. Nutzen Sie dazu die jeweilig angegebene Methode. Sie können davon ausgehen, dass n eine Viererpotenz ist.

a) Nutzen Sie die Meister-Methode. Geben Sie dabei die Parameter a, b, f, sowie den zutreffenden Fall der Meister-Methode an.

b) Nutzen Sie die Rekursionsbaum-Methode.

Diese Aufgaben werden eventuell gemeinsam in den Übungen am 12. und 13. November 2024 gelöst. Sie brauchen Sie nicht vorher zu lösen und auch nicht abzugeben.