Herbst 2013 - Thema 3 - Aufgabe 3

a) Eine Permutation σ sei das Produkt zweier disjunkter Zykel der teilerfremden Längen k und l. Welche Ordnung hat σ?

b) Sei $a(n)$ die größte Elementordnung in der symmetrischen Gruppe S_n. Man zeige $\frac{a(n)}{n} \to \infty$

Lösung:

Sei $\sigma \in S_n$ mit $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2$,

τ_1, τ_2 seien disjunkte Zykel mit $\text{ord}(\tau_1) = k$ und $\text{ord}(\tau_2) = l$ mit $(k, l) = 1$

Da τ_1, τ_2 disjunkt sind, gilt: $(i) \quad \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$

$$(ii) \quad < \tau_1 > \ \cap \ < \tau_2 > \ = \ \{id\}$$

Daraus folgt $\sigma^2 \ = \ (\tau_1\tau_2)(\tau_1\tau_2) \ = \ \tau_1(\tau_2\tau_1)\tau_2 \ = \ \tau_1(\tau_1\tau_1)\tau_2 \ = \ \tau_1^2\tau_2^2$

Induktiv folgt: $\sigma^m = \tau_1^m\tau_2^m \quad \forall \ m \ \in \ \mathbb{N}$

Sei $\text{ord}(\sigma) \ = \ m \quad \to \quad id = \tau_1^m\tau_2^m \quad \to \quad < \tau_2 > \ \ni \ \tau_2^{-m} = \tau_1^m \ \in \ < \tau_1 >$

$$\to \quad \tau_1^m \ \in \ < \tau_1 > \ \cap \ < \tau_2 > \ \stackrel{(ii)}{\to} \ \tau_1^m \ = \ id$$
$$\to \ \tau_2^m \ = \ id$$

$$\to \quad \text{ord}\tau_1 \mid m \quad \wedge \quad \text{ord}\tau_2 \mid m$$

$$\to \quad m \stackrel{m \text{ minimal}}{=} kgV(ord(\tau_1), ord(\tau_2)) = kgV(k, l) \stackrel{(k,l)=1}{=} k \cdot l$$

b) Sei $a(n)$ die maximale Elementordnung in S_n

Behauptung: $\frac{a(n)}{n}$ wächst über alle Schranken für $n \to \infty$

Zu zeigen: $\forall \ k \ \in \ \mathbb{N} \ \exists \, n \ \in \ \mathbb{N}$ mit $\frac{a(n)}{n} \geq k$

Sei also $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Wähle $n = 4k + 1$

Betrachte die disjunkten Zykel $\tau_1 = (1 \dots 2k)$, $\tau_2 = (2k+1 \ \ 2k+2 \ \dots 4k+1)$ aus S_n

Es gilt: $\quad$ ord $(\tau_1) = 2k$, ord $\tau_2 = 2k + 1$

und $(2k, 2k + 1) = 1$ $\quad$ (2 aufeinander folgende Zahlen sind teilerfremd)

$\stackrel{a)}{\to}$ $\quad$ ord $(\tau_1\tau_2) = 2k \cdot (2k + 1)$

$$\frac{a(n)}{n} \quad \geq \quad \frac{2k \cdot (2k+1)}{4k+1} \quad \geq \quad \frac{2k \cdot (2k+1)}{4k+2} \quad = \quad k$$