Herbst 2011 - Thema 2 - Aufgabe 2

Sei G eine endliche Gruppe und sei $n \geq 1$ mit $\text{ggT}(n,\text{ord}(G)) = 1$. Zeigen Sie, dass es zu jedem Element $a \in G$ ein eindeutig bestimmtes Element $b \in G$ gibt mit $b^n = a$.

Lösung:

$\text{ggT}(n,\text{ord}(G)) = 1$

$\rightarrow \quad \exists\, k, l \in \mathbb{Z} : \quad k \cdot n + l \cdot \text{ord}G = 1$

$$\begin{aligned} a &= a^1 \\ &= a^{k\cdot n + l\cdot \text{ord}G} \\ &= (a^k)^n \cdot (a^{\text{ord}G})^l \\ &\overset{Lagrange}{=} (a^k)^n \cdot e^l \\ &= (a^k)^n \end{aligned}$$

Wähle also: $a^k = b \quad \rightarrow \quad$ Existenz

Seien $b_1, b_2 \in G$ mit $b_1^n = a = b_2^n$

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1^1 \\ &= b_1^{k\cdot n + l\cdot \text{ord}G} \\ &= (b_1^n)^k \cdot (b_1^{\text{ord}G})^l \\ &\overset{Lagrange}{=} a^k \cdot e^l \\ &= a^k \\ &= (b_2^n)^k \cdot (b_2^{\text{ord}G})^l \\ &= b_2^1 \\ &= b_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad$ Eindeutigkeit