Frühjahr 2013 - Thema 2 - Aufgabe 2

Sei $q > 1$ eine Potenz einer Primzahl p, und sei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen. Sei n eine natürliche Zahl, und sei $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ die Gruppe der invertierbaren $(n \times n)-$Matrizen über $\mathbb{F}_q$.

a) Zeigen Sie, dass die Gruppe G von Ordnung $q^{\binom{n}{2}} \cdot (q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die oberen Dreiecksmatrizen mit charakteristischem Polynom $(X - 1)^n$ eine Sylowsche $p-$Untergruppe von $Gl_n(\mathbb{F}_q)$ bilden.

Lösung:

Sei $q = p^k$, $p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N}$

a) Behauptung: $|G| = q^{\binom{n}{2}} \cdot (q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1) = q^{\binom{n}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{n} (q^i - 1)$

Sei $A \in G$, $A = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$ mit den Spaltenvektoren a_i.

Bekanntlich ist A genau dann invertierbar, wenn die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.

Daher bleiben als Möglichkeiten für

$$\begin{array}{lll} a_1: & q^n - 1 & \text{da } a_1 \neq \vec{0} \\ a_2: & q^n - q & \text{da } a_2 \notin span(a_1) \\ a_3: & q^n - q^2 & \text{da } a_3 \notin span(a_1, a_2) \\ \vdots & & \\ a_i: & q^n - q^{i-1} & \text{da } a_i \notin span(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}) \\ \vdots & & \\ a_n: & q^n - q^{n-1} & \text{da } a_n \notin span(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \end{array}$$

Für die Mächtigkeit von G ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} |G| &= (q^n - 1) \cdot (q^n - q) \cdot \dots \cdot (q^n - q^{n-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (q^n - q^{i-1}) \\ &= (q^n - 1) \cdot q \cdot (q^{n-1} - 1) \dots q^{n-1} \cdot (q - 1) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (q^{i-1} \cdot (q^i - 1)) \\ &= q^{\sum_{i=0}^{n-1} i} \cdot \prod_{j=1}^{n} (q^j - 1)) \\ &= q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{n} (q^j - 1) \\ &= q^{\binom{n}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{n} (q^j - 1) \\ &= (p^k)^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot m \end{aligned}$$

$$\text{mit } p \nmid m = \prod_{j=1}^{n} (q^j - 1) = \prod_{j=1}^{n} \Big((p^k)^j - 1 \Big)$$

b) Sei $H := \{B \mid B$ ist obere Dreiecksmatrix mit $\chi_B = (X-1)^n\}$

Behauptung: $H \in Syl_p(G)$, d.h. H ist Untergruppe von G und hat Ordnung $(p^k)^{\frac{n^2-n}{2}}$

Beweis:

Da B obere Dreiecksmatrix ist mit $\chi_B = (X-1)^n$, folgt: $$B = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B hat damit n Eins-Einträge auf der Diagonalen, $\frac{n^2-n}{2}$ Null-Einträge unterhalb der Diagonalen und $\frac{n^2-n}{2}$ freie Plätze aus $\mathbb{F}_q$.

$\rightarrow \quad |H| = q^{\frac{n^2-n}{2}} = (p^k)^{\frac{n^2-n}{2}} \qquad \rightarrow \quad$ Ordnung von H ist $(p^k)^{\frac{n^2-n}{2}}$.

Noch zu zeigen:

H ist Untergruppe von G.

Da G endliche Gruppe ist und $H \subseteq G$ genügt es zu zeigen, dass H abgeschlossen.
D.h. $\forall B, C \in H$ gilt: $D = B \cdot C \in H$:

$$B, C \in H, \text{ d.h. } b_{ij}, c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i > j; \\ 1, & \text{falls } i = j; \\ b_{ij} \text{ bzw. } c_{ij}, & \text{falls } i < j. \end{cases}$$

$$D = (d_{ij}) \text{ mit } \qquad d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot c_{kj}$$

<u>1.Fall:</u> $i > j$

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{j} b_{ik} \cdot c_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} b_{ik} \cdot c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{j} 0 \cdot c_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} b_{ik} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

<u>2.Fall:</u> $i = j$

$$\begin{aligned} d_{ii} &= \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot c_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} \cdot c_{ki} + b_{ii} \cdot c_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik} \cdot c_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot c_{ki} + 1 \cdot 1 + \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik} \cdot 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

<u>3.Fall:</u> $i < j$

Einträge beliebig $\quad \rightarrow \quad H$ Untergruppe von $G \quad \Rightarrow \quad H$ p-Sylow-Untergruppe von G