(2) Aufgabe: Finden Sie zu jedem Teiler d von S_4 wenigstens eine Untergruppe $U \leq S_4$ mit $|U| = d$.

Lösung: $|S_4| = 4! = 24$

$T_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

d $= 1 \;\rightarrow\; |U| = 1 \;\rightarrow\; U = \{id\}$

d $= 2 \;\rightarrow\; |U| = 2 \;\rightarrow\; |U| \in \mathbb{P} \;\rightarrow\; U$ ist zyklisch

$\rightarrow$ U wird von einem Element der Ordnung 2 erzeugt:

$U = <(a\ b)>$ oder $U = <(a\ b)(c\ d)>$

d $= 3 \;\rightarrow\; |U| = 3 \;\rightarrow\; |U| \in \mathbb{P} \;\rightarrow\; U$ ist zyklisch

$\rightarrow$ U wird von einem Element der Ordnung 3 erzeugt:

$U = <(a\ b\ c)>$

d $= 4 \;\rightarrow\; |U| = 4 = 2^2$

- 1.Möglichkeit: U ist zyklisch und wird von einem Element der Ordnung 4 erzeugt:
  $U = <(a\ b\ c\ d)>$

- 2.Möglichkeit: U wird von 2 vertauschbaren Elementen der Ordnung 2 erzeugt:

$$\begin{aligned} U &= <(a\ b),\ (c\ d)> \\ &= \{id,\ (a\ b),\ (a\ b)(c\ d),\ (c\ d)\} \end{aligned}$$

oder
$$\begin{aligned} U &= <(a\ b)(c\ d),\ (a\ c)(b\ d)> \\ &= \{id,\ (a\ b)(c\ d),\ (a\ c)(b\ d),\ (a\ d)(b\ c)\} \end{aligned}$$

d $= 6 \;\rightarrow\; |U| = 6 = 2 \cdot 3$

- 1.Möglichkeit: U ist zyklisch und wird von einem Element der Ordnung 6 erzeugt:
  $\lightning$ S_4 besitzt kein Element der Ordnung 6

- 2.Möglichkeit: U ist isomorph zu S_3:
  $U = <(a\ b),\ (a\ b\ c)>$

d $= 8 \;\rightarrow\; |U| = 2^3 \;\rightarrow\; U$ ist 2-Sylow-Untergruppe und isomorph zu D_4

$U = <(a\ b\ c\ d),\ (a\ c)>$

d $= 12 \;\rightarrow\; |U| = 12 = 2^2 \cdot 3 \;\rightarrow\; U$ ist isomorph zu A_4

d $= 24 \;\rightarrow\; |U| = 24 \;\rightarrow\; U = S_4$

Zur genaueren Begründung ist in einigen Fällen mehr Theoriewissen erforderlich