Satz

Für $n \geq 3$ gilt:

$$Z(D_n) = \begin{cases} \{id\} & , \text{ falls } n \text{ ungerade} \\ \{id,\ d^{\frac{n}{2}}\} & , \text{ falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Beweis: $D_n = <d, s>$ mit

ord $d = n$, ord $s = 2$,
$dsd = s \quad \Leftrightarrow \quad sds = d^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad sd^k = d^{-k}s \quad \forall\, k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$D_n = \{id, d, d^2, \ldots, d^{n-1}, s, sd, sd^2, \ldots, sd^{n-1}\}$

$Z := Z(D_n)$

Annahme 1: $\exists\, k \in \{0, \ldots, n-1\}: \quad sd^k \in Z$

$\rightarrow$ sd^k ist mit d vertauschbar

$\rightarrow \ (sd^k) \cdot d = d \cdot (sd^k)$

$\rightarrow \ sd^{k+1} = dsd^k \qquad | \cdot d^{-k}$

$$\left.\begin{array}{lrcl} \rightarrow & sd & = & ds \\ \text{Aber:} & sd & = & d^{-1}s \end{array}\right\} \rightarrow \quad d = d^{-1}$$

$\rightarrow \quad d^2 = id \quad \rightarrow \quad \text{ord}\, d \leq 2$

$\lightning$ ord $d = n \geq 3$

$\} \Rightarrow \quad \forall\, k \in \{0, \ldots, n-1\}: \quad sd^k \notin Z$

Annahme 2: $\exists\, k \in \{1, \ldots, n-1\}: \quad d^k \in Z$

$\rightarrow$ d^k ist mit s vertauschbar

$$\left.\begin{array}{lrcl} \rightarrow & sd^k & = & d^k s \\ \text{Aber:} & sd^k & = & d^{-k}s \end{array}\right\} \rightarrow \quad d^k = d^{-k} \quad \rightarrow \quad d^{2k} = id$$

$\rightarrow \quad n \,|\, 2k$

$\rightarrow \quad \exists\, l \in \mathbb{N}: \quad 2k = l \cdot n$

Da $k \leq n - 1 \quad \rightarrow \quad 2k \leq 2(n-1) < 2n$

$\} \rightarrow \quad l < 2 \quad \rightarrow \quad l = 1$

$\Rightarrow \quad 2k = n$

<u>1.Fall:</u> n ungerade

$\rightarrow \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\}: \ d^k \notin Z$

$\rightarrow \quad Z = \{id\}$

<u>2.Fall:</u> n gerade

$\rightarrow \quad d^k \in Z \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{n}{2}$

$\rightarrow \quad Z = \{id, d^{\frac{n}{2}}\}$