Satz Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und seien zwei $V, W \leq G$ Untergruppen von G. Dann gilt:

$$V \cdot W \ \leq \ G \quad \Leftrightarrow \quad V \cdot W \ = \ W \cdot V$$

Beweis

" $\Rightarrow$ "

Es genügt zu zeigen: $\forall\, v_1 \in V,\ w_1 \in W \quad \exists v_2 \in V, w_2 \in W$, so dass $\quad v_1 w_1 = w_2 v_2$

$$\begin{aligned}
v_1 \in V, w_1 \in W \rightarrow &\quad v_1 w_1 \in V \cdot W \ \leq \ G \\
\rightarrow &\quad (v_1 w_1)^{-1} \in V \cdot W \\
\rightarrow &\quad w_1^{-1} v_1^{-1} \in V \cdot W \\
\rightarrow &\quad \exists \hat{v} \in \ V,\ \hat{w}\ W: \quad w_1^{-1} v_1^{-1} = \hat{v} \cdot \hat{w} \quad \text{bzw.} \quad v_1 w_1 = \hat{w}^{-1} \cdot \hat{v}^{-1}
\end{aligned}$$

Wähle also $\quad w_2 := \hat{w}^{-1}, \quad v_2 := \hat{v}^{-1}$

" $\Leftarrow$ "

(i) $V, W \leq G \quad \rightarrow \quad e \ \in \ V \ \wedge \ e \ \in \ W$

$$e = e \cdot e \ \in \ V \cdot W, \quad V \cdot W \neq \emptyset$$

(ii) Seien $a, b \ \in \ V \cdot W$, zu zeigen: $\quad a \cdot b^{-1} \ \in \ V \cdot W$

$$a \in V \cdot W \quad \rightarrow \quad \exists\, v_a \ \in \ V, w_a \ \in \ W \quad \text{mit} \quad a = v_a \cdot w_a$$

$$b \in V \cdot W \quad \rightarrow \quad \exists\, v_b \ \in \ V, w_b \ \in \ W \quad \text{mit} \quad b = v_b \cdot w_b$$

$$\begin{aligned}
a \cdot b^{-1} \quad &= \quad (v_a w_a) \cdot (v_b w_b)^{-1} \\
&= \quad (v_a w_a) \cdot (w_b^{-1} v_b^{-1}) \\
&= \quad v_a \cdot (w_a w_b^{-1}) \cdot v_b^{-1} \\
&= \quad v_a \cdot (w \cdot v) \\
&\overset{Vor}{=} \quad v_a \cdot (\hat{v} \cdot \hat{w}) \\
&= \quad (v_a \cdot \hat{v}) \cdot \hat{w} \quad \in \ V \cdot W
\end{aligned}$$

$\square$