Satz Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe, $V, W \leq G$

Dann gilt: $V \cup W \leq G \quad \Leftrightarrow \quad (V \subseteq W \ \vee \ W \subseteq V)$

Beweis

" $\Leftarrow$ " $V \subseteq W \ \vee \ W \subseteq V$

$\rightarrow \quad V \cup W = W \quad \vee \quad V \cup W = V$

$\Rightarrow \quad V \cup W \leq G$

" $\Rightarrow$ " Sei $V \nsubseteq W \ \wedge \ W \nsubseteq V$

$\rightarrow \quad \exists\, v \in V \backslash W \ \wedge \ \exists\, w \in W \backslash V$

$\rightarrow$ Offensichtlich gilt: $v, w \in V \cup W$

Annahme 1: $v \cdot w \in V \quad \rightarrow \quad \exists\, \hat{v} \in V : \quad v \cdot w = \hat{v}$

$\rightarrow \quad w = v^{-1} \cdot \hat{v} \in V \quad \lightning$

Annahme 2: $v \cdot w \in W \quad \rightarrow \quad \exists\, \hat{w} \in W : \quad v \cdot w = \hat{w}$

$\rightarrow \quad v = \hat{w} \cdot w^{-1} \in W \quad \lightning$

$\Big\} \Rightarrow \quad v \cdot w \notin V \cup W$

$\Rightarrow \quad V \cdot W \nleq G$

$\square$