1 Definition Untergruppe

Eine Teilmenge U einer Gruppe $(G, *, e)$ heißt Untergruppe von G, falls $(U, *, e)$ eine Gruppe ist. Notation: $U \leq G$
Für den Nachweis, dass eine Teilmenge U von G eine Untergruppe von G ist, reicht es zu zeigen:

1. $U \neq \emptyset$
2. $\forall a, b \in U : a \cdot b^{-1} \in U$

Ist U Teilmenge einer endlichen Gruppe G, so reicht es zu zeigen:

1. $U \neq \emptyset$
2. $\forall a, b \in U : a \cdot b \in U$

2 Beispiele

1. $(2\mathbb{Z}, +, 0)$ bzw. $(k\mathbb{Z}, +, 0)$ als additive Untergrupppen von $(\mathbb{Z}, +, 0)$.
2. $(\{(1), (12)\}, \circ, id) \leq (S_n, \circ, id)$
3. $(\{\sigma \in S_n | \sigma(1) = 1\}, \circ, id) \leq (S_n, \circ, id)$
4. $SL(n, \mathbb{R}) \leq GL(n, \mathbb{R})$

3 Eigenschaften

1. Der Durchschnitt zweier Untergruppen einer Gruppe G ist wieder eine Untergruppe dieser Gruppe G, d.h.
$$V \leq G, W \leq G \Rightarrow V \cap W \leq G$$
2. Die Vereinigung zweier Untergruppen ist im allgemeinen keine Untergruppe. Genauer gilt für $V, W \leq G$:
$$V \cup W \leq G \iff V \subseteq W \vee W \subseteq V$$
3. Das Mengenprodukt zweier Untergruppen ist im allgemeinen keine Untergruppe. Genauer gilt für zwei Untergruppen V, W von G:
$$V * W \leq G \iff V * W = W * V$$
$(V * W := \{v * w | v \in V, w \in W\})$

4. Jede Untergruppe einer abelschen Gruppe ist abelsch.

5. Es gibt abelsche Untergruppen in nicht abelschen Gruppen, z.B.:
$U = \{(1), (12)\} \leq S_3$

6. Es gibt nicht-abelsche Gruppen, in denen jede nicht-triviale Untergruppe abelsch ist (z.B. S_3).

7. Das Zentrum einer Gruppe ist immer eine abelsche Untergruppe.
$\{e\} \leq Z(G) \leq G$

8. Sogenannte triviale Untergruppen sind $\{e\}$ sowie G selbst.

9. p-Sylowuntergruppe
Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe mit $|G| = p^r \cdot m$, $p \in \mathbb{P}$; $r, m \in \mathbb{N}$; $(p, m) = 1$.
Jede Untergruppe $U \leq G$ mit $|U| = p^r$ heißt p-Sylowuntergruppe von G. (Die Existenz dieser Untergruppe(n) sichert der 1. Sylowsatz.)

4 Erzeugte Untergruppen

Sei $\emptyset \neq S \subseteq G$. Dann bezeichne $< S >$ die kleinste Untergruppe in G, die S enthält. Es gilt:

$$< S > := \bigcap \{U | S \subseteq U \leq G\}.$$

$$< S > = \{\prod_{j=1}^{n} s_j,\ s_j \in S \cup S^{-1}, n \in \mathbb{N}\},$$

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall: $|S| = 1$ d.h. $S = \{s\}$

$$< s > = \{\prod_{j=1}^{n} s_j,\ s_j \in \{s, s^{-1}\}, n \in \mathbb{N}\} = \{s^k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Wird eine Gruppe von einem Element erzeugt, so heißt sie zyklisch.
Diedergruppen sind die (im Staatsexamen) wichtigsten von zwei Elementen erzeugten Gruppen. Es gilt:

$$D_n = < d; s >; | < d > | = n; | < s > | = 2; dsd = s \Leftrightarrow sds^{-1} = d^{-1}$$

Dabei bezeichnet d die Drehung und s eine Achsenspiegelung, wenn man die Diedergruppe als Permutationsgruppe eines regelmäßigen Vielecks auffasst.