Gruppe 1 - 3.4.

Aufgabe 3

Behauptung: Sei $(G, \cdot, e)$ endliche Gruppe, $V, W \leq G$ mit $V \cap W = \{e\}$

Es gilt $| < V \cup W > | \geq |V| \cdot |W|$

Beweis:

Da G endlich ist, müssen auch V und W endlich sein. Wir wählen folgende Notation:

$V := \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ mit $v_1 = e$

$W := \{w_1, w_2, \ldots, w_l\}$ mit $w_1 = e$

(1) Wir betrachten $V \cdot W = \{v \cdot w \,|\, v \in V, \; w \in W\}$ und behaupten

$$|V \cdot W| = |V| \cdot |W| = k \cdot l$$

Klar ist nach Konstruktion von $V \cdot W$, dass $|V \cdot W| \leq |V| \cdot |W|$ gilt.

Können wir " $<$ " ausschließen?

Annahme: $\exists\, v_i, v_j \in V \;\; i, j \in \{1, \ldots, k\} \quad \exists\, w_m, w_r \in V \;\; m, r \in \{1, \ldots, l\}$

mit $v_i \cdot w_m = v_j \cdot w_r$ und $(v_i \neq v_j \;\vee\; w_m \neq w_r)$

Sei also $v_i \cdot w_m = v_j \cdot w_r$

$\Leftrightarrow \quad v_j^{-1} \cdot v_i = w_r \cdot w_m^{-1}$

$v_j^{-1} \cdot v_i \in V \;\wedge\; w_r \cdot w_m^{-1} \in W$

$\rightarrow \quad v_j^{-1} \cdot v_i \in V \cap W \;\wedge\; w_r \cdot w_m^{-1} \in V \cap W$

$\xrightarrow{Voraussetzung} \quad v_j^{-1} \cdot v_i = e \;\wedge\; w_r \cdot w_m^{-1} = e$

$\Rightarrow \quad v_i = v_j \;\wedge\; w_r = w_m \quad ↯$

(2) Nach Definition ist $< V \cup W >$ die kleinste Untergruppe in G, die V und W enthält. Wegen der Abgeschlossenheit muss dann auch $V \cdot W$ in $< V \cup W >$ liegen

$\rightarrow \quad V \cdot W \subseteq \; < V \cup W >$

$\} \Rightarrow \quad |V| \cdot |W| \overset{(1)}{=} |V \cdot W| \overset{(2)}{\leq} | < V \cup W > |$