1 Definition: Äußeres direktes Produkt von Gruppen

Seien $(G_1, \cdot_1, e_1)$ und $(G_2, \cdot_2, e_2)$ zwei Gruppen.
Das äußere direkte Produkt $G := G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) | g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$ ist eine Gruppe mit der Verknüpfung $\star$ und dem neutralen Element $e = (e_1, e_2)$.

$$(g_1, g_2) \star (h_1, h_2) := (g_1 \cdot_1 h_1, g_2 \cdot_2 h_2).$$

$$(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1_1}, g_2^{-1_2})$$

Falls endlich viele Gruppen vorliegen, verwendet man folgende Schreibweise:

$$G = \prod_{i=1}^{n} G_i = G_1 \times \cdots \times G_n$$

Jedes Gruppenelement hat eine eindeutige Darstellung in den Komponenten, d.h.

$$\forall\ g \in G\ \exists!\ g_1 \in G_1, \ldots g_n \in G_n : g = (g_1, \ldots, g_n).$$

$$f \star g = (f_1, \ldots f_n) \star (g_1, \ldots g_n) = (f_1 \cdot_1 g_1, \ldots, f_n \cdot_n g_n).$$
$$e = (e_1, \ldots, e_n)$$
$$f^{-1} = (f_1^{-1}, \ldots, f_n^{-1}).$$

2 Beispiele

1. $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +, (0, 0))$
2. $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+, *, (0, 1))$
3. $(\mathbb{Z} \times S_n, *, (0, id))$
4. $(D_3 \times D_4, \circ, (id_3, id_4))$