1 Definition einer Gruppe

Eine Gruppe ist ein Tripel $(G, *, e)$ mit den folgenden Eigenschaften:
(i) G ist eine nicht leere Menge.
(ii) $*$ ist eine innere Verknüpfung auf G, d.h.

$$* : \begin{cases} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & g_1 * g_2 \end{cases}$$

ist eine wohldefinierte Abbildung.
Man sagt auch, G ist abgeschlossen bezüglich $*$.
(iii) $*$ ist assoziativ, d.h.

$$\forall\, g_1, g_2, g_3 \;\in\; G : (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3).$$

(iv) Es gibt ein neutrales Element e in G; d.h.

$$\exists\, e \in G\; \forall\, g \in G : e * g = g * e = g.$$

(v) Jedes Element g aus G ist invertierbar; d.h.

$$\forall\, g \in G\; \exists\, h_g \in G : g * h_g = h_g * g = e.$$

Eine Gruppe heißt abelsch, wenn jedes Element g aus G mit jedem Element h aus G vertauschbar ist, d.h.

$$\forall\, g, h \in\; G : g * h = h * g.$$

Aus (iv) folgt, dass zumindestens das neutrale Element immer mit jedem Gruppenelement vertauschbar ist.
Das Zentrum einer Gruppe $Z(G)$ ist die Menge aller Elemente aus G, die mit jedem anderen Element vertauschbar sind, d.h.

$$Z(G) := \{g \in G : g * h = h * g \quad \forall\, h \in G\}.$$

Es gilt: $\{e\} \subseteq Z(G) \subseteq G$
Eine Gruppe $(G, *, e)$ heißt endlich, falls G im mengentheoretischen Sinne endlich ist. Die Anzahl der Elemente von G wird dann mit $|G|$ bezeichnet.

2 Beispiele

1. $(\mathbb{Z}, +, 0)$; $(\mathbb{Q}, +, 0)$; $(\mathbb{R}, +, 0)$; $(\mathbb{C}, +, 0)$.
   In additiven Gruppen notiert man das inverse Element h_g als $-g$.

2. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$; $(\mathbb{Q}^+, \cdot, 1)$
   In multiplikativen Gruppen notiert man das inverse Element h_g als g^{-1}.

3. $(Gl(n, \mathbb{R}), \cdot, \mathbb{1})$
   Das ist die Gruppe aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$.

4. $(S(X), \circ, id)$; speziell $(S_n, \circ, id)$
   Zu gegebener Menge X ist S(X) die Gruppe aller bijektiven Abbildungen von X auf sich. $\circ$ ist die Komposition zweier Abbildungen aus S(X). Die Elemente der S_n heißen Permutationen. Eine Permutation, die genau zwei Elemente vertauscht und alle anderen festhält, heißt Transposition.

5. $(A_n, \circ, id)$
   Die alternierende Gruppe A_n ist die Gruppe aller geraden Permutationen aus der Gruppe S_n. Eine Permutation aus S_n heißt gerade, falls sie sich auf irgendeine Weise als Komposition einer geraden Anzahl von Transpositionen schreiben läßt.

6. Diedergruppe $(D_n, \circ, id)$, $n \in \mathbb{N}; n \geq 3$
   Das ist die Gruppe aller Abbildungen, die ein regelmäßiges n-Eck auf sich abbildet.