Satz $Z(Gl(n,\mathbb{R})) = \{k \cdot \mathbb{1}, k \in \mathbb{R}^*\}$

Beweis

Sei $A = (a_{k,l}) \in Z(Gl(n,\mathbb{R}))$, sei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix.

Sei $E_{i,j} = (\delta_{k,l})$ mit $\delta_{k,l} = \begin{cases} 0, & \text{falls } (k,l) \neq (i,j); \\ 1, & \text{falls } (k,l) = (i,j). \end{cases}$

Für $i \neq j$ gilt: $det(\mathbb{1} + E_{i,j}) = 1 \quad \rightarrow \quad \mathbb{1} + E_{i,j} \in Gl(n,\mathbb{R})$

Wenn A ein Zentrumselement ist, ist A insbesondere mit $\mathbb{1} + E_{i,j}$ vertauschbar.

$$\begin{aligned} A \cdot (\mathbb{1} + E_{i,j}) = (\mathbb{1} + E_{i,j}) \cdot A \quad &\Leftrightarrow \quad A + A \cdot E_{i,j} = A + E_{i,j} \cdot A \\ &\Leftrightarrow \quad A \cdot E_{i,j} = E_{i,j} \cdot A \end{aligned}$$

Wir betrachten $(i_0, j_0) \in \{1, \ldots, n\}^2$ beliebig und fest, wobei $i_0 \neq j_0$.

$$A \cdot E_{i_0,j_0} := (b_{r,s}) \overset{!}{=} (c_{r,s}) = E_{i_0,j_0} \cdot A$$

1. Betrachte b_{j_0,j_0}, c_{j_0,j_0}:

$$b_{j_0,j_0} = \sum_{k=1}^{n} a_{j_0,k} \cdot \delta_{k,j_0} \overset{(k,j_0)=(i_0,j_0)}{=} a_{j_0,i_0} \cdot \delta_{i_0,j_0} = a_{j_0,i_0} \cdot 1 = a_{j_0,i_0}$$

$$c_{j_0,j_0} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{j_0,k} \cdot a_{k,j_0} \overset{(j_0,k)\neq(i_0,j_0) \text{ da } i_0 \neq j_0}{=} \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot a_{k,j_0} = 0$$

$\rightarrow a_{j_0,i_0} = 0 \quad \forall\, i_0 \neq j_0$

$\Rightarrow$ Alle Einträge außerhalb der Diagonale von A sind 0.

2. Betrachte b_{i_0,j_0}, c_{i_0,j_0}:

$$b_{i_0,j_0} = \sum_{k=1}^{n} a_{i_0,k} \cdot \delta_{k,j_0} \overset{(k,j_0)=(i_0,j_0)}{=} a_{i_0,i_0} \cdot \delta_{i_0,j_0} = a_{i_0,i_0} \cdot 1 = a_{i_0,i_0}$$

$$c_{i_0,j_0} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i_0,k} \cdot a_{k,j_0} \overset{(i_0,k)=(i_0,j_0)}{=} \delta_{i_0,j_0} \cdot a_{j_0,j_0} = 1 \cdot a_{j_0,j_0} = a_{j_0,j_0}$$

$\rightarrow a_{i_0,i_0} = a_{j_0,j_0} \quad \forall\, i_0 \neq j_0$

$\Rightarrow$ Alle Einträge auf der Diagonale von A sind gleich.

Damit sind die Zentrumselemente notwendig von der Form $k \cdot \mathbb{1}$, $k \in \mathbb{R}$.

Da $A \in Gl(n,\mathbb{R})$, folgt: $\det A \neq 0 \quad \rightarrow \quad k \neq 0$

Noch zu zeigen: Jede Matrix A dieser Form liegt im Zentrum:

$$(k \cdot \mathbb{1}) \cdot A = k \cdot A = k \cdot A \cdot \mathbb{1} = A \cdot (k \cdot \mathbb{1})$$

$\square$