

Satz Für $n \geq 4$ enthält das Zentrum der symmetrischen Gruppe nur die Identität:

$$Z(A_n) = \{id\}$$

Beweis

Sei $\sigma \in Z(A_n)$, $\sigma \neq id$

$\rightarrow \exists i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$, $i_1 \neq i_2 : \sigma(i_1) = i_2$

1. Fall $\sigma(i_2) = i_1$

Betrachte $\tau = (i_1 \ i_2 \ i_3) \in A_n$

$$\tau\sigma(i_1) = \tau(i_2) = i_3$$

$$\sigma\tau(i_1) = \sigma(i_2) = i_1 \neq i_3 = \tau\sigma(i_1) \rightarrow \tau\sigma \neq \sigma\tau \rightarrow \sigma \notin Z(A_n)$$

2. Fall $\sigma(i_2) = i_2$

Widerspruch zur Injektivität von σ , denn schon $\sigma(i_1) = i_2$

3. Fall $\sigma(i_2) = i_3 \notin \{i_1, i_2\}$

Betrachte $\tau = (i_1 \ i_2)(i_3 \ i_4) \in A_n$ mit $i_4 \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, i_3\}$

$$\tau\sigma(i_1) = \tau(i_2) = i_1$$

$$\sigma\tau(i_1) = \sigma(i_2) = i_3 \neq i_1 = \tau\sigma(i_1) \rightarrow \tau\sigma \neq \sigma\tau \rightarrow \sigma \notin Z(A_n)$$

Anmerkung 1: Der Beweis kann auch in völliger Analogie zum Beweis von $Z(S_n) = \{id\}$ für $n \geq 3$ geführt werden.

Anmerkung 2: $Z(A_3) = \{id, (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\}$

□