Satz Für $n \geq 3$ enthält das Zentrum der symmetrischen Gruppe nur die Identität:

$Z(S_n) = \{id\}$

Beweis

Sei $\sigma \in Z(S_n),\ \sigma \neq id$

$\rightarrow \exists\, i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\},\ i_1 \neq i_2 :\ \sigma(i_1) = i_2$

Da $n \geq 3$ gibt es $i_3 \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2\}$

Da $\sigma \in Z(S_n)$, muss σ mit <u>jeder</u> Permutation aus S_n vertauschbar sein, insbesondere mit

$$\tau = (i_1\ \ i_2\ \ i_3)$$

$$\tau\sigma = \sigma\tau \qquad \Leftrightarrow \qquad \tau = \sigma\tau\sigma^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad (i_1\ i_2\ i_3) = (\sigma(i_1)\, \sigma(i_2)\, \sigma(i_3))$$

Da $\sigma(i_1) = i_2$, gilt auch $\sigma(i_2) = i_3$ und $\sigma(i_3) = i_1$.

Mit dieser erweiterten Information testen wir, ob σ mit $\tilde{\tau} = (i_1\ i_2)$ vertauschbar ist.

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}\sigma = \sigma\tilde{\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\tau} &= \sigma\tilde{\tau}\sigma^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad (i_1\ i_2) &= (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)) \\ \Leftrightarrow \quad (i_1\ i_2) &= (i_2\ i_3) \end{aligned}$$

$\lightning$ da $i_3 \notin \{i_1,\, i_2\}$

$\square$