

7. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2024/25)

Aufgabe 1 – Pfade im Suchbaum

Gegeben sei eine Folge ganzer Zahlen $A[1..k]$. Wir betrachten das Problem, zu entscheiden, ob es einen binären Suchbaum B gibt, so dass A die Folge von Zahlen ist, die bei der Suche nach $A[k]$ in B evaluiert wird. $A[1]$ wäre also die Wurzel von B , $A[2]$ ein Kind der Wurzel usw.

- a) Lösen Sie dieses Entscheidungsproblem für die folgenden Zahlenfolgen. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. **3 Punkte**
1. $A = \langle 2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363 \rangle$
 2. $A = \langle 924, 220, 911, 244, 898, 258, 362, 363 \rangle$
 3. $A = \langle 935, 278, 347, 621, 299, 392, 358, 363 \rangle$
- b) Beschreiben Sie mit Worten und in Pseudocode einen Algorithmus, der dieses Entscheidungsproblem für eine beliebige gegebene Zahlenfolge löst. Die Worst-Case-Laufzeit des Algorithmus soll $\Theta(k)$ sein. **3 Punkte**

Aufgabe 2 – Bäume transformieren

Als ADS-Hörer:in stellen Sie sich zu Hause natürlich nicht irgendeine Zimmerpflanze auf, sondern einen binären Suchbaum. Ihr Suchbaum heißt B_1 und hat n Knoten. Ihr:e Übungspartner:in hat auch einen binären Suchbaum, der B_2 genannt wird und zufälligerweise genau dieselben Schlüssel wie Ihr Suchbaum enthält. Er sieht aber schöner aus. Deshalb möchten Sie Ihren Suchbaum so transformieren, dass er am Ende wie B_2 aussieht.

Zeigen Sie hierzu, dass Sie stets in der Lage sind, B_1 durch $O(n)$ Rotationen in B_2 zu transformieren, egal wie die beiden binären Suchbäume konkret aussehen.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $n - 1$ Rotationen ausreichen, um einen beliebigen Suchbaum in einen Suchbaum zu transformieren, in dem kein Knoten ein linkes Kind hat. **5 Punkte**

Aufgabe 3 – Höhe von Rot-Schwarz-Bäumen

Im Folgenden beziehen sich die Anzahl der Knoten und die Höhe eines Rot-Schwarz-Baums auf den Baum *ohne* die nil-Blätter.

Stellen Sie sicher, dass rote und schwarze Knoten klar voneinander unterscheidbar sind. Sie brauchen die nil-Blätter nicht zu zeichnen.

- a) Zeichnen Sie einen gültigen Rot-Schwarz-Baum der Höhe 3, bei dem die Anzahl der Knoten minimal ist. **2 Punkte**
- b) Zeichnen Sie einen binären Suchbaum der Höhe 3, für den es keine Färbung gibt, welche die Eigenschaften eines Rot-Schwarz-Baums erfüllt. Dieser Suchbaum soll die maximale Anzahl von Knoten enthalten. **2 Punkte**

Aufgabe 4 – Operationen in Rot-Schwarz-Bäumen

- a) In einen anfangs leeren Rot-Schwarz-Baum werden nacheinander die Zahlen 50, 42, 38, 13, 17 und 5 eingefügt. Zeichnen Sie den Baum nach jeder dieser Einfügeoperationen. **3 Punkte**
- b) Anschließend werden die Zahlen 5, 13, 17 und 38 nacheinander gelöscht. Zeichnen Sie den Baum nach jeder dieser Löschoperationen. **2 Punkte**

Stellen Sie sicher, dass rote und schwarze Knoten klar voneinander unterscheidbar sind. Sie brauchen die nil-Blätter nicht zu zeichnen.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Donnerstag, 19. Dezember 2024, 14:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit **PABS** gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (sXXXXXX-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.