Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 16. November 2023

Prof. Dr. Alexander Wolff
Felix Klesen, M. Sc.

4. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2023/24)

Aufgabe 1 – Rekursionsgleichungen lösen

Sei $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $T(n)$ für $n = 1$ einen konstanten Wert annimmt und für alle anderen $n \in \mathbb{N}$ durch eine der folgenden Rekursionsgleichungen definiert ist. Geben Sie für jedes der folgenden T eine Funktion g an, so dass $T \in \Theta(g)$. Eine Begründung Ihrer Lösung ist zwingend erforderlich.

Drei Teilaufgaben sind mit der Meistermethode lösbar (geben Sie den jeweiligen Fall an), eine jedoch nicht (diese wird mit 2 Punkten bewertet). Nutzen Sie für diese die Rekursionsbaummethode. Nehmen Sie an, dass $n = 2^m$, für ein $m \in \mathbb{N}$. **5 Punkte**

a) $T(n) = 3T(\lfloor n/9 \rfloor) + \sqrt{n}$
b) $T(n) = 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^3$
c) $T(n) = 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2 \log_2 n$
d) $T(n) = 5T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2$

Aufgabe 2 – Sortieren in Linearzeit

a) Geben Sie in kommentiertem Pseudocode einen Algorithmus an, der ein Eingabefeld A der Länge n mit Wertebereich $\{1, \dots, n^2 - 1\}$ in $O(n)$ Zeit sortiert! **4 Punkte**

b) Die Eingabe sei eine Liste von t Feldern $A_1, \dots, A_t$ mit einer Gesamtlänge von $n = \sum_{i=1}^{t} A_i.\mathrm{length}$. Der Wertebereich ist für jedes Feld $\{1, \dots, k\}$ und weiter gilt $t \leq k$.

   Geben Sie in Worten einen Algorithmus an, der alle Felder in insgesamt $O(n + k)$ Zeit sortiert! Jedes Feld soll am Ende die gleichen Elemente enthalten wie zu Beginn (nur in sortierter Reihenfolge). Begründen Sie die Laufzeit. **3 Punkte**

Tipp: Verwenden Sie Methoden aus der Vorlesung. Wandeln Sie jedoch zunächst die Zahlen in eine geeignete Darstellung um.

Aufgabe 3 – Sanderring

Fährt man vom Hubland kommend auf der Zeppelinstraße in Richtung Sanderring, so überquert man auf einer durch Ampeln geregelten Kreuzung die Trautenauer Straße. Wir nehmen an, dass die Grünphase und die Rotphase der Ampel jeweils eine Minute dauern; die Gelbphase vernachlässigen wir.

a) Sei X eine Zufallsvariable, die angibt, wie lange ein Autofahrer an dieser Ampel warten muss. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ von X. **2 Punkte**

b) Möchte man als Fußgänger die Trautenauer Straße überqueren, muss man zunächst immer an einer roten Fußgängerampel halten. Um weiterzugehen muss man erst einen Knopf drücken und dann solange warten, bis die Verkehrsampel für Autos zum nächsten Mal von Rot auf Grün springt. Erst dann schaltet auch die Fußgängerampel auf Grün. Sei Y eine Zufallsvariable, die angibt, wie lange ein Fußgänger an dieser Ampel warten muss. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(Y)$ von Y.

   Natürlich kann man in der Praxis das Glück haben, dass bereits ein anderer Fußgänger den Knopf betätigt hat, wenn man an die Kreuzung kommt. Diesen Fall vernachlässigen wir hier. **2 Punkte**

Aufgabe 4 – Münzwurf

Eine faire Münze wird dreimal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Münze mit dem Kopf nach oben landet.

a) Wie groß ist $E[X^3]$? **2 Punkte**

b) Wie groß ist $(E[X])^3$? **2 Punkte**

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Donnerstag, 23. November 2023, 14:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit $\boxed{\text{PABS}}$ gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (*sXXXXXX*-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.