

2. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2023/24)

Aufgabe 1 – O-Notation

Sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen. Arbeiten Sie mit der Definition aus der Vorlesung, nicht mit Grenzwertbetrachtungen.

- a) Für $f: n \mapsto \log_2(n^2)$ gilt $f \in \Theta(\log_{10} n)$. **3 Punkte**
- b) Für $f: n \mapsto n \log n$ gilt $f \in \Omega(n^{1,1})$. **3 Punkte**

Aufgabe 2 – MergeBackwards

Betrachten Sie die Methode `Merge(array of int A, int ℓ , int m , int r)` aus der Vorlesung. Geben Sie ein Feld A an, so dass nach der Ausführung von `Merge(A, 1, 4, 8)` gilt, dass $A = \langle 5, 4, 3, 6, 2, 1, 7, 8 \rangle$.

Wie viele Lösungen gibt es für A ? Begründen Sie Ihre Antwort. **4 Punkte**

Beachten Sie, dass wir anders als in der Vorlesung hier nicht davon ausgehen, dass $A[\ell..m]$ und $A[m+1..r]$ sortiert sind.

Aufgabe 3 – Welle

Ein Feld A von Zahlen ist eine *Welle*, wenn für je drei benachbarte Zahlen gilt, dass die mittlere Zahl entweder größer als ihre beiden Nachbarn ist, oder kleiner.

- a) Geben Sie einen iterativen Algorithmus an, der aus einem Feld A mit paarweise verschiedenen Zahlen eine Welle macht, d.h. nach Ausführung des Algorithmus soll A eine Welle sein und die gleichen Zahlen enthalten wie zuvor. **4 Punkte**
- b) Betrachten Sie folgenden rekursiven Algorithmus `MakeWave`, der als Eingabe ein Feld A mit paarweise verschiedenen Zahlen erhält. Zeigen Sie per Induktion über $n = r - \ell + 1$, dass das Teilfeld $A[\ell..r]$ nach der Ausführung des Algorithmus eine Welle ist. **4 Punkte**

```
MakeWave(int[] A, int  $\ell = 1$ , int  $r = A.length$ )
```

```
if  $\ell < r$  then
```

```
     $m = \lfloor (\ell + r) / 2 \rfloor$ 
```

```
    MakeWave(A,  $\ell$ ,  $m$ )
```

```
    MakeWave(A,  $m + 1$ ,  $r$ )
```

```
    MergeWaves(A,  $\ell$ ,  $m$ ,  $r$ )
```

```
MergeWaves(int[] A, int  $\ell$ , int  $m$ , int  $r$ )
```

```
if  $(m \bmod 2) == 0$  then
```

```
    if  $A[m] > A[m + 1]$  then
```

```
        temp =  $A[m + 1]$ 
```

```
         $A[m + 1] = A[m]$ 
```

```
         $A[m] = temp$ 
```

```
else
```

```
    if  $A[m] < A[m + 1]$  then
```

```
        temp =  $A[m + 1]$ 
```

```
         $A[m + 1] = A[m]$ 
```

```
         $A[m] = temp$ 
```

- c) Nehmen Sie an, dass die Länge n des Eingabefeldes A eine Zweierpotenz ist (also $n = 2^k$ für eine natürliche Zahl k). Analysieren Sie die Laufzeit von $\text{MakeWave}(A)$ für diesen Fall. Schätzen Sie also möglichst genau ab, wie oft zwei Elemente der Eingabe miteinander verglichen werden. **2 Punkte**

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Donnerstag, 02. November 2023, 14:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit PABS gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (sXXXXXX-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.