Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2023/24

15. Vorlesung

Augmentieren von Datenstrukturen

Tim Hegemann *Lehrstuhl für Informatik I*

Plan

Wir kennen schon eine ganze Reihe von Datenstrukturen:

Plan

Wir kennen schon eine ganze Reihe von Datenstrukturen:

- doppelt verkettete Liste
- Stapel und Schlange
- Hashtabelle
- Heap
- binärer Suchbaum

Plan

Wir kennen schon eine ganze Reihe von Datenstrukturen:

- doppelt verkettete Liste
- Stapel und Schlange
- Hashtabelle
- Heap
- binärer Suchbaum

Allerdings gibt es viele Situationen, wo keine davon genau passt.

Plan

Wir kennen schon eine ganze Reihe von Datenstrukturen:

- doppelt verkettete Liste
- Stapel und Schlange
- Hashtabelle
- Heap
- binärer Suchbaum

Allerdings gibt es viele Situationen, wo keine davon genau passt.

Herangehensweise: *Augmentieren* von Datenstrukturen

Plan

Wir kennen schon eine ganze Reihe von Datenstrukturen:

- doppelt verkettete Liste
- Stapel und Schlange
- Hashtabelle
- Heap
- binärer Suchbaum

Allerdings gibt es viele Situationen, wo keine davon genau passt.

Herangehensweise: *Augmentieren* von Datenstrukturen,

d.h. wir verändern Datenstrukturen,
indem wir zusätzliche Informationen
hinzufügen und aufrechterhalten.

Ein Beispiel

Bestimme für eine dynamische Menge v. Zahlen den Mittelwert.

Ein Beispiel

Bestimme für eine dynamische Menge v. Zahlen den Mittelwert.

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?

Ein Beispiel

Bestimme für eine dynamische Menge v. Zahlen den Mittelwert.

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - Liste

Ein Beispiel

Bestimme für eine dynamische Menge v. Zahlen den Mittelwert.

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - Liste
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?

Ein Beispiel

Bestimme für eine dynamische Menge v. Zahlen den Mittelwert.

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - Liste
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Summe der Elemente (sum)
   - Anzahl der Elemente ($size$)

Ein Beispiel

Bestimme für eine dynamische Menge v. Zahlen den Mittelwert.

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - Liste
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Summe der Elemente (sum)
   - Anzahl der Elemente ($size$)
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

Ein Beispiel

Bestimme für eine dynamische Menge v. Zahlen den Mittelwert.

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - Liste
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Summe der Elemente (sum)
   - Anzahl der Elemente ($size$)
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?
   - konstanter Aufwand beim Einfügen und Löschen

Ein Beispiel

Bestimme für eine dynamische Menge v. Zahlen den Mittelwert.

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - Liste
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Summe der Elemente (sum)
   - Anzahl der Elemente ($size$)
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?
   - konstanter Aufwand beim Einfügen und Löschen
4. Implementiere neue Operationen!

Ein Beispiel

Bestimme für eine dynamische Menge v. Zahlen den Mittelwert.

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - Liste
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Summe der Elemente (*sum*)
   - Anzahl der Elemente (*size*)
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?
   - konstanter Aufwand beim Einfügen und Löschen
4. Implementiere neue Operationen!

```
double getMean()  // gibt Fließkommazahl zurück
    return sum/size
```

Ein Beispiel

Bestimme für eine dynamische Menge v. Zahlen den Mittelwert.

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - Liste
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Summe der Elemente (sum)
   - Anzahl der Elemente ($size$)
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?
   - konstanter Aufwand beim Einfügen und Löschen
4. Implementiere neue Operationen!

   double getMean() // gibt Fließkommazahl zurück

   return $sum/size$

   Ähnlich für Standardabweichung $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2}$.

Probieren Sie's!

Neues Beispiel

Wir wollen das Auswahlproblem für dynamische Mengen lösen.

Neues Beispiel

Wir wollen das Auswahlproblem für dynamische Mengen lösen.

D.h. wir wollen zu jedem Zeitpunkt effizient

- das i.-kleinste Element (z.B. den Median)
- den *Rang* eines Elements

in einer dynamischen Menge bestimmen können.

Neues Beispiel

Wir wollen das Auswahlproblem für dynamische Mengen lösen.

D.h. wir wollen zu jedem Zeitpunkt effizient

- das i.-kleinste Element (z.B. den Median): Elem Select(int i)
- den *Rang* eines Elements: int Rank(Elem e)

in einer dynamischen Menge bestimmen können.

Neues Beispiel

Wir wollen das Auswahlproblem für dynamische Mengen lösen.

D.h. wir wollen zu jedem Zeitpunkt effizient

- das i.-kleinste Element (z.B. den Median): Elem Select(int i)
- den *Rang* eines Elements: int Rank(Elem e)

in einer dynamischen Menge bestimmen können.

Fahrplan:

Neues Beispiel

Wir wollen das Auswahlproblem für dynamische Mengen lösen.

D.h. wir wollen zu jedem Zeitpunkt effizient

- das i.-kleinste Element (z.B. den Median): Elem Select(int i)
- den *Rang* eines Elements: int Rank(Elem e)

in einer dynamischen Menge bestimmen können.

Fahrplan:

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung?
4. Implementiere neue Operationen!

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?

Das dynamische Auswahlproblem

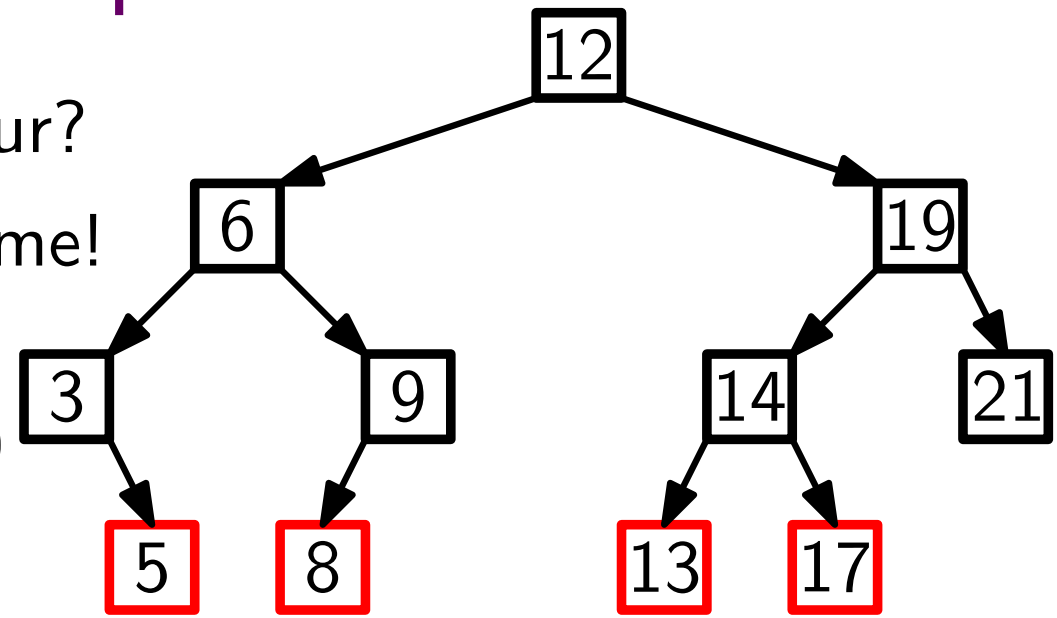
1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$

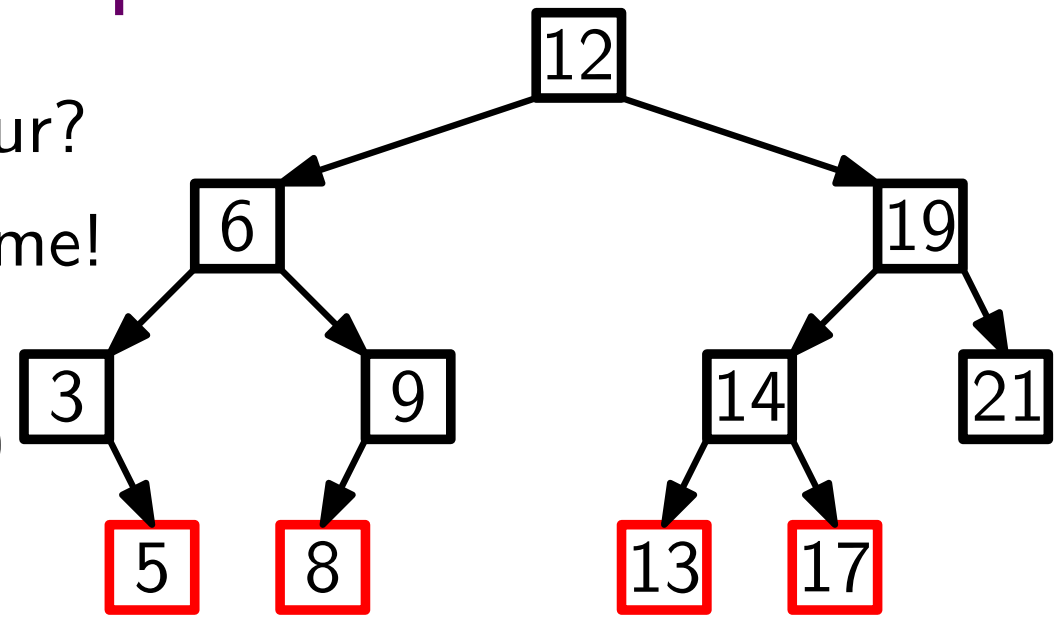
Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



Das dynamische Auswahlproblem

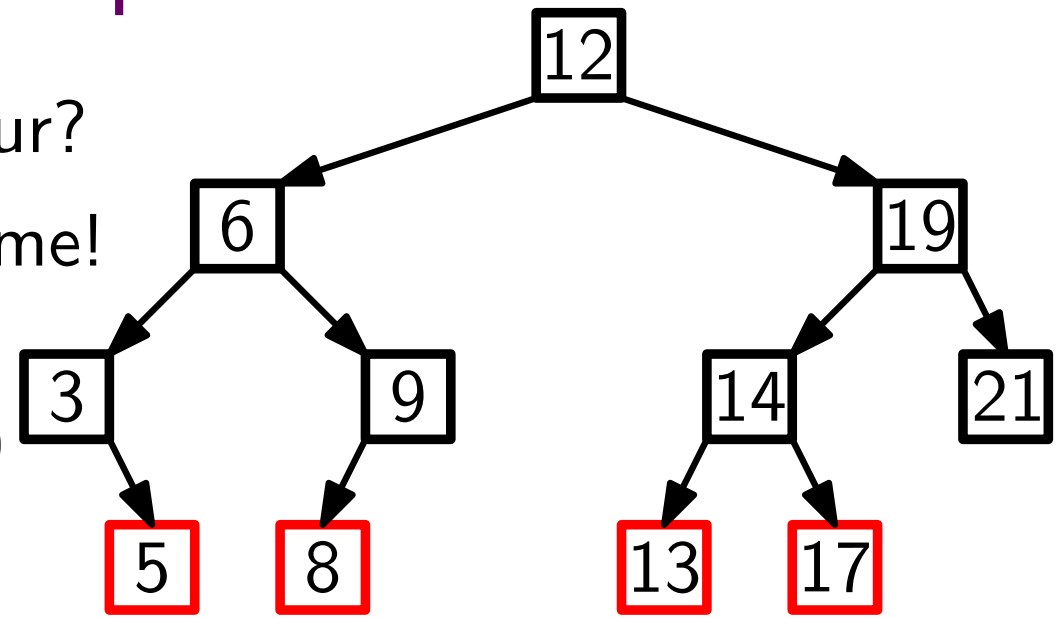
1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?

Das dynamische Auswahlproblem

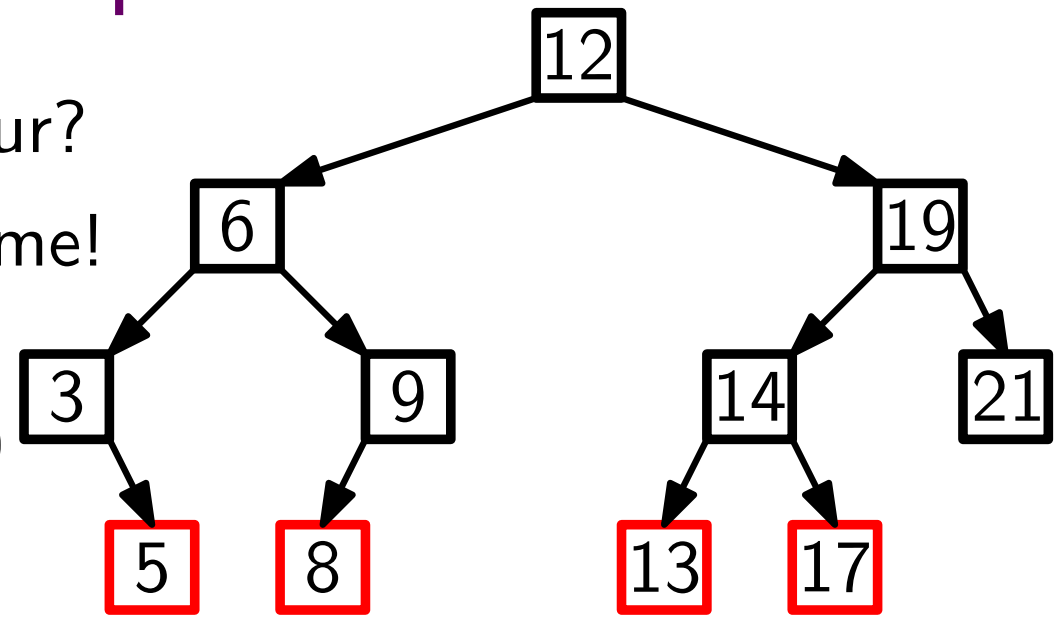
1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

Das dynamische Auswahlproblem

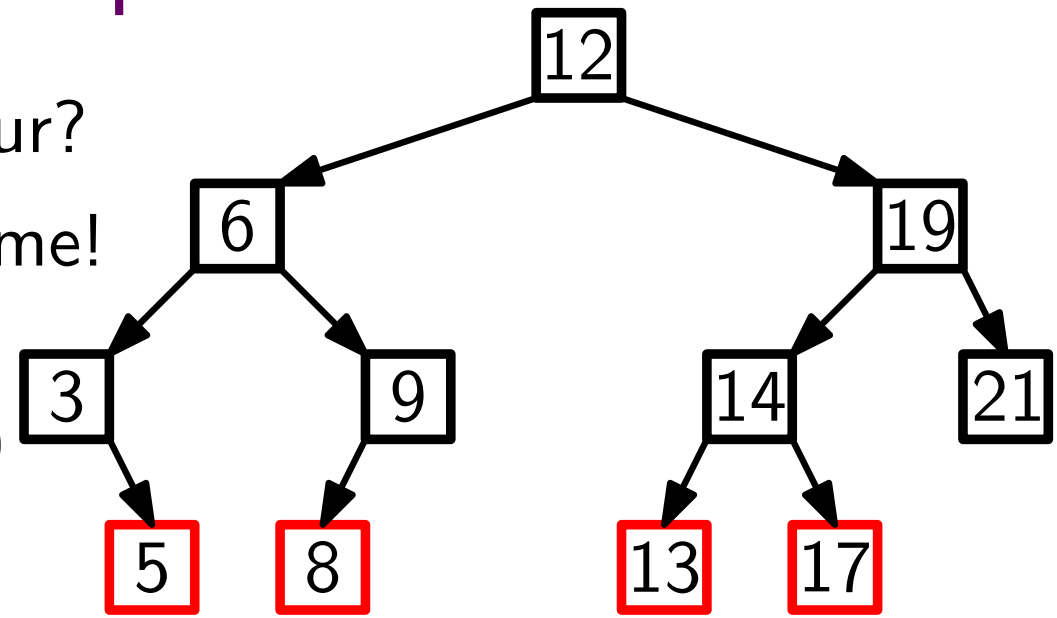
1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?
4. Implementiere neue Operationen!

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere neue Operationen!

Select(int i):

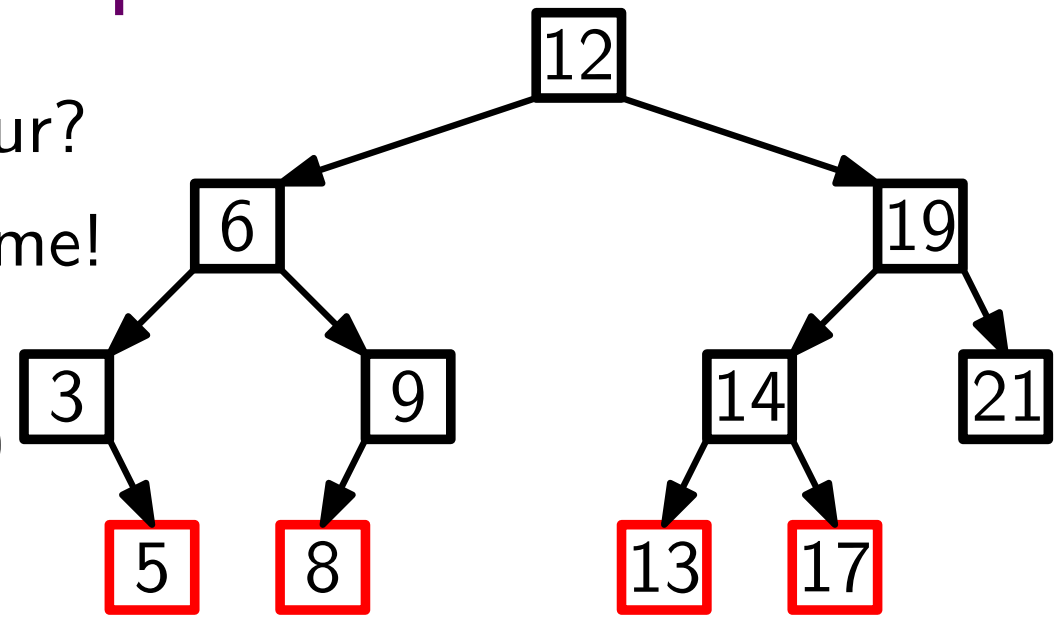
liefert i.-kleinstes Element

Rank(Node v):

Wievieltes Element ist v?

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere neue Operationen!

Select(int i):

liefert i.-kleinstes Element

Rank(Node v):

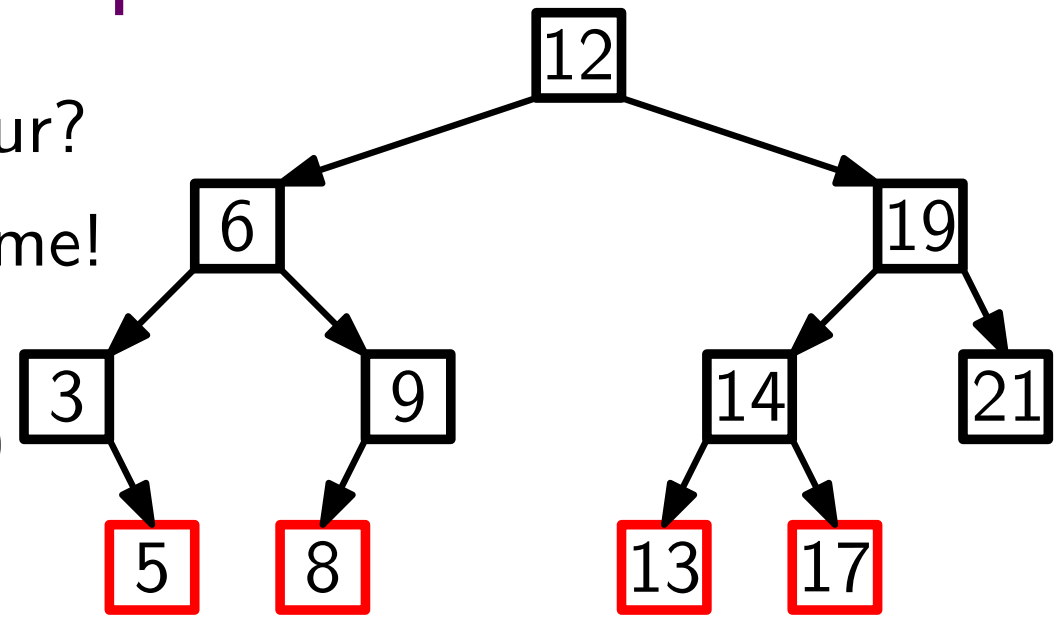
Wievieltes Element ist v?

Aufgabe

Schreiben Sie Pseudocode für Select() und Rank() unter Benutzung von Successor() u. Predecessor()!

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere neue Operationen!

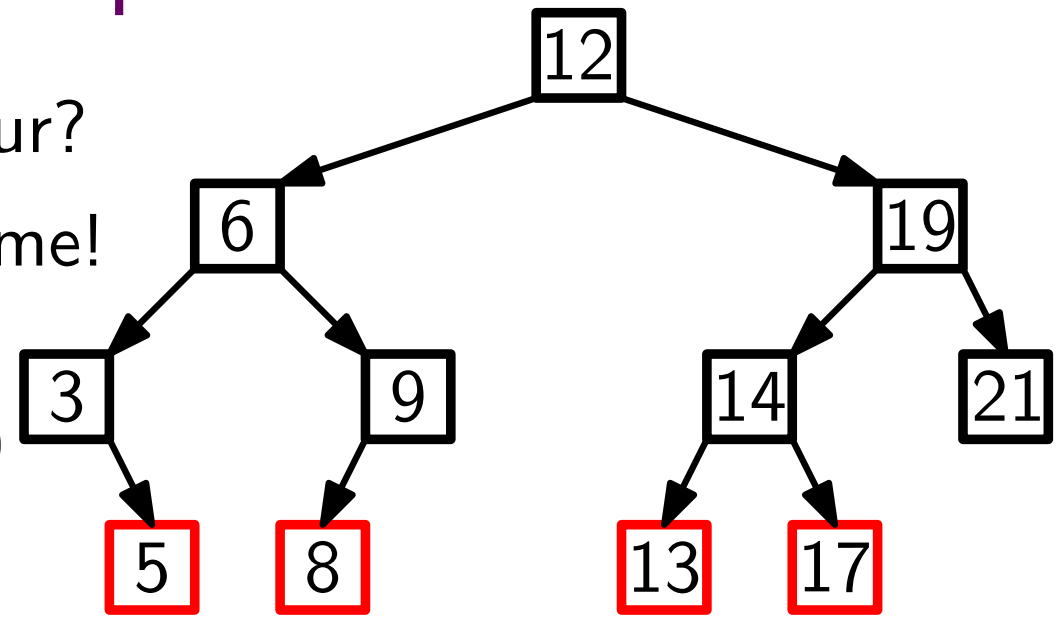
Select(int i):

```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v):

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere neue Operationen!

Select(int i):

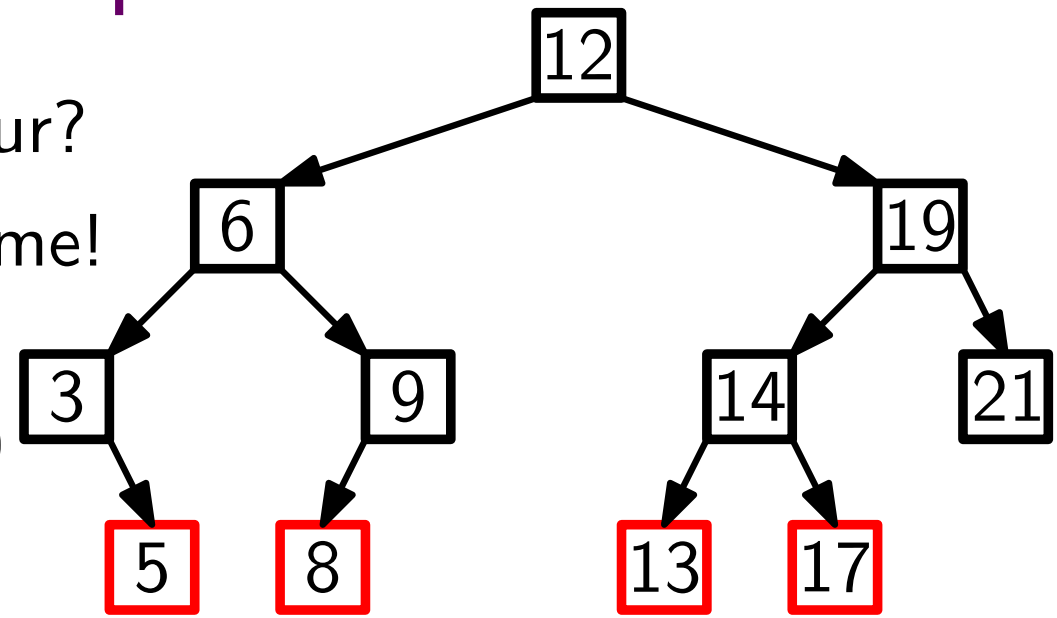
```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v):

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere! Laufzeit?

Select(int i):

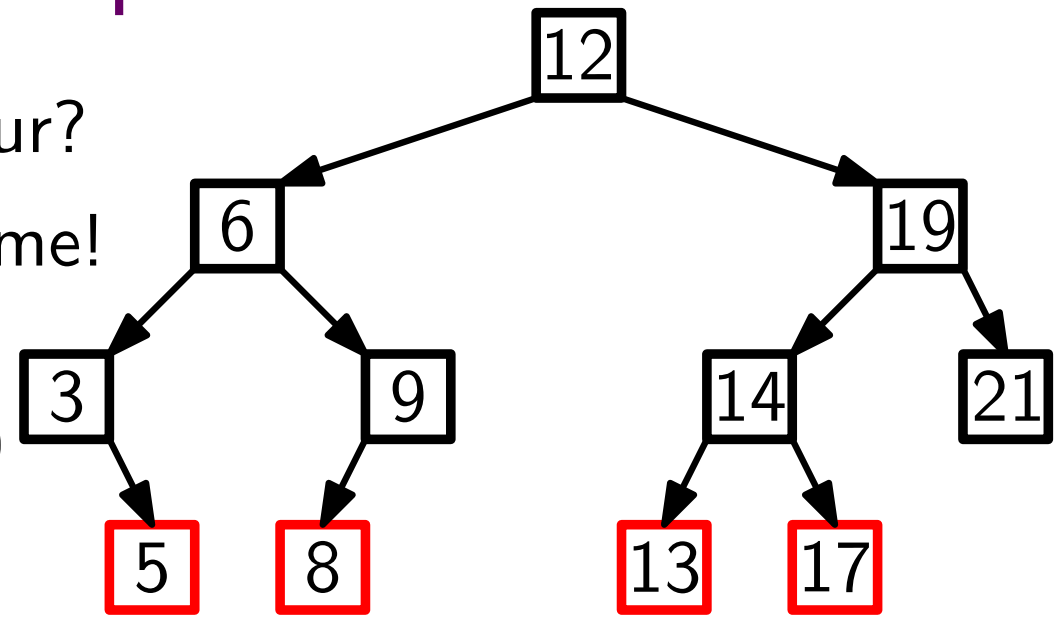
```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v):

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere! Laufzeit?

Select(int i): $O(i \cdot h)$

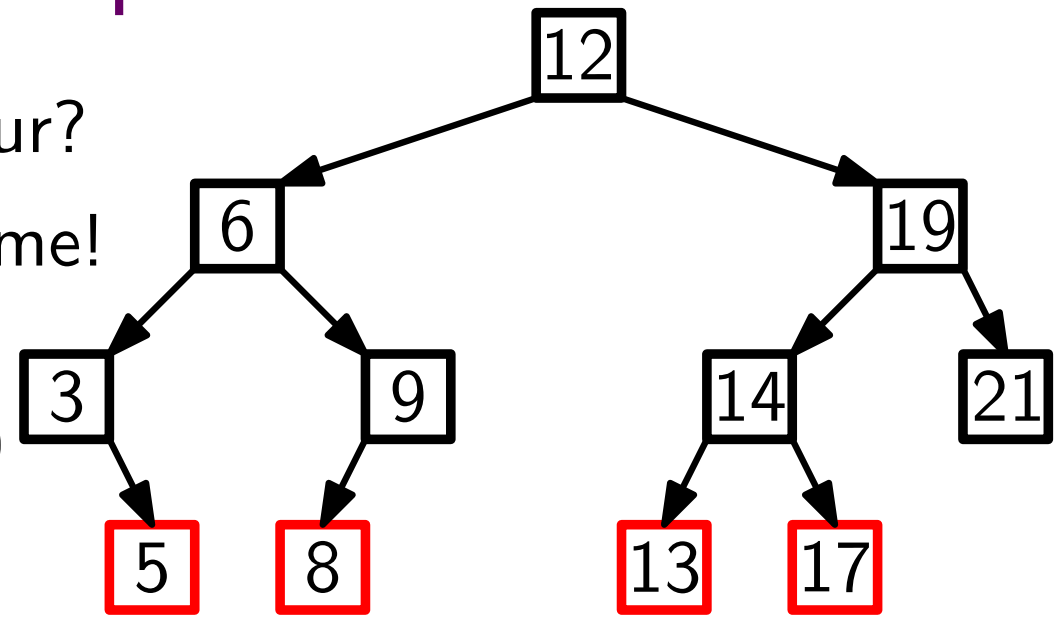
```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v):

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere! Laufzeit?

Select(int i): $O(i \cdot h)$

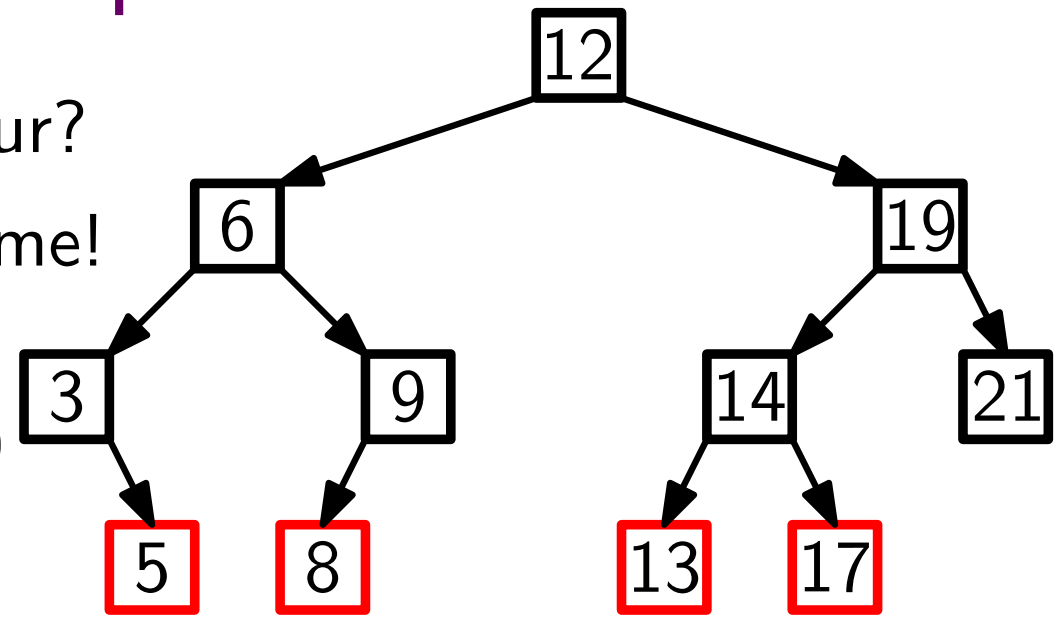
```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich?

Select(int i): $O(i \cdot h)$

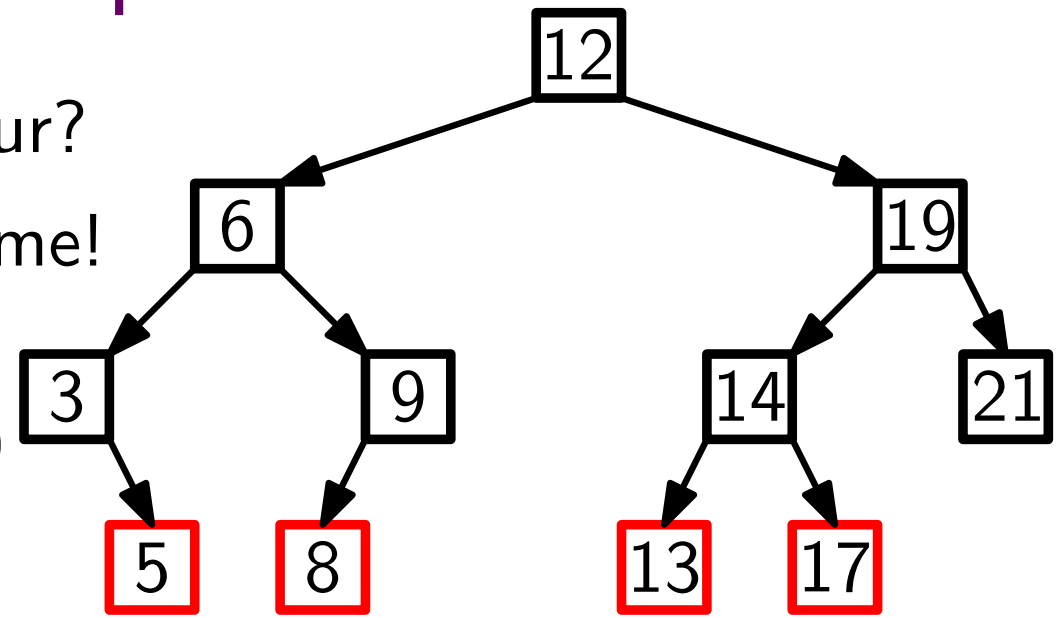
```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich? Nein!

Select(int i): $O(i \cdot h)$

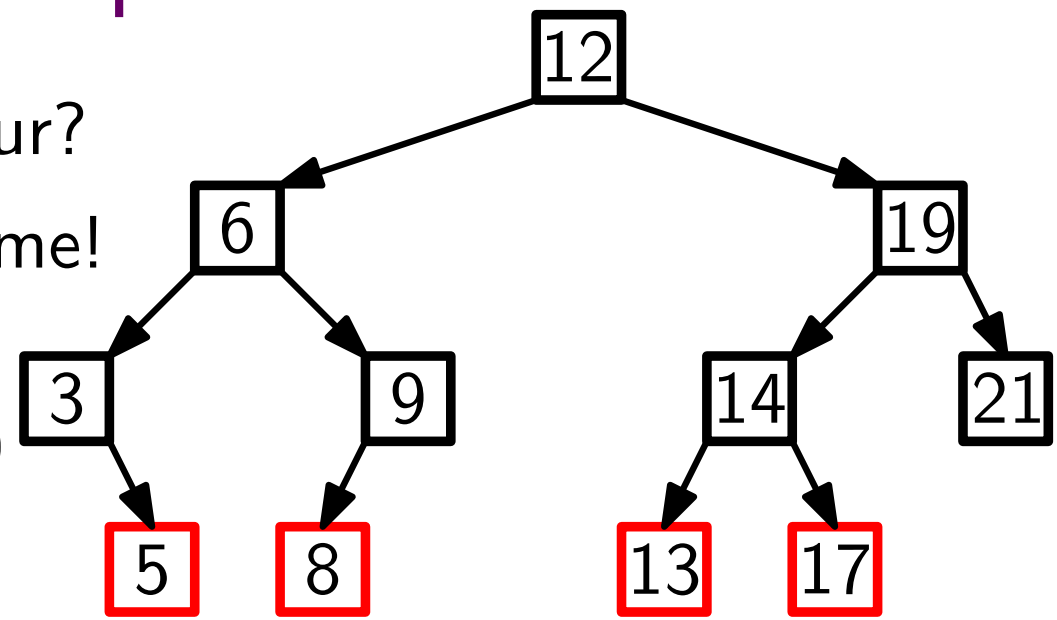
```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem

Select(7)



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?
4. Implementiere! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich? Nein!

Select(int i): $O(i \cdot h)$

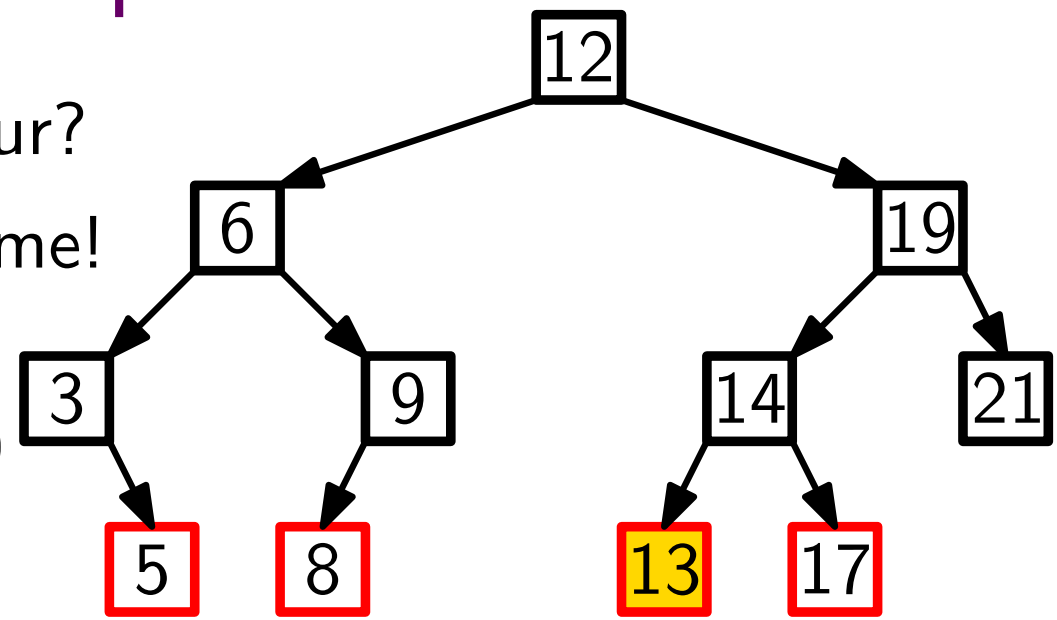
```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem

Select(7)



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?
4. Implementiere! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich? Nein!

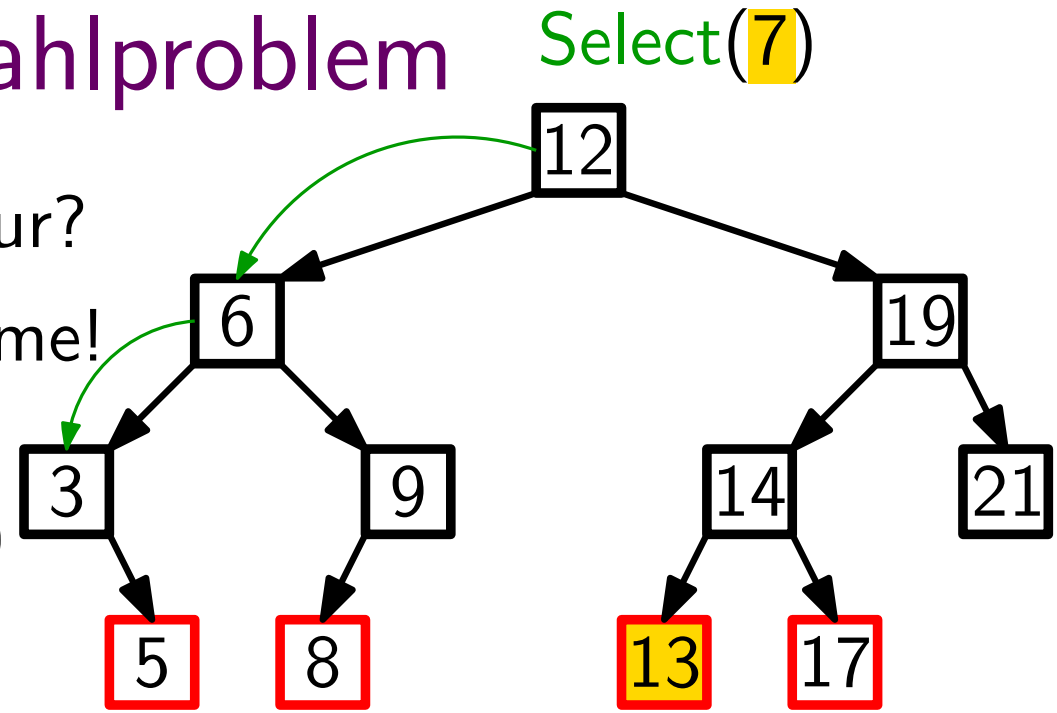
Select(int i): $O(i \cdot h)$

```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?
4. Implementiere! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich? Nein!

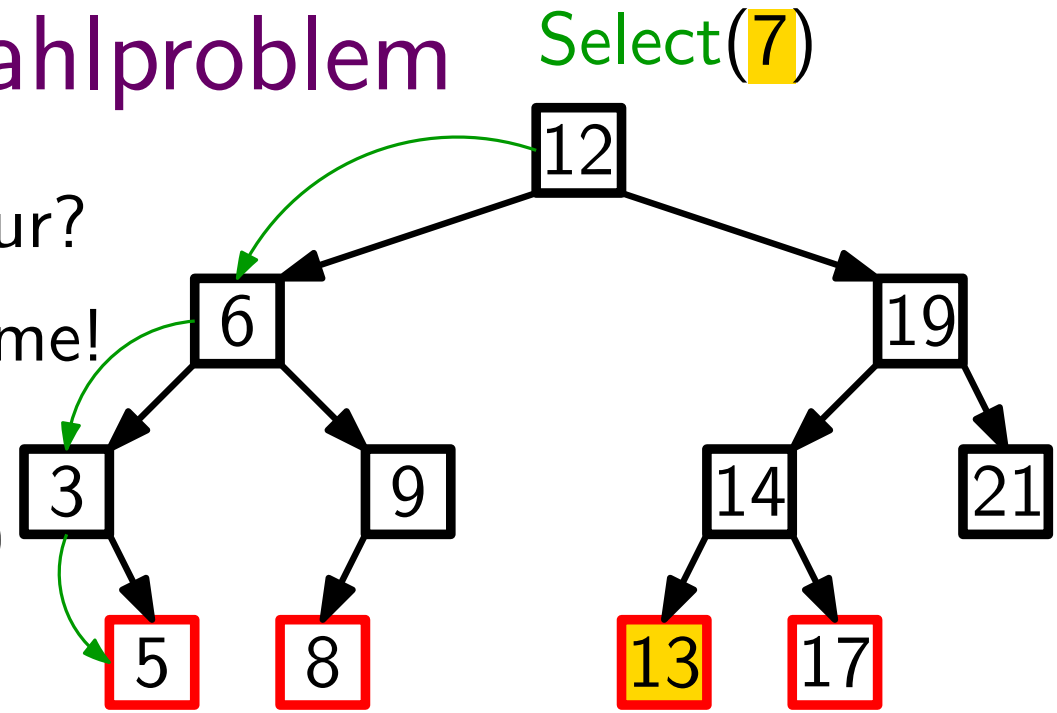
Select(int i): $O(i \cdot h)$

```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?
4. Implementiere! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich? Nein!

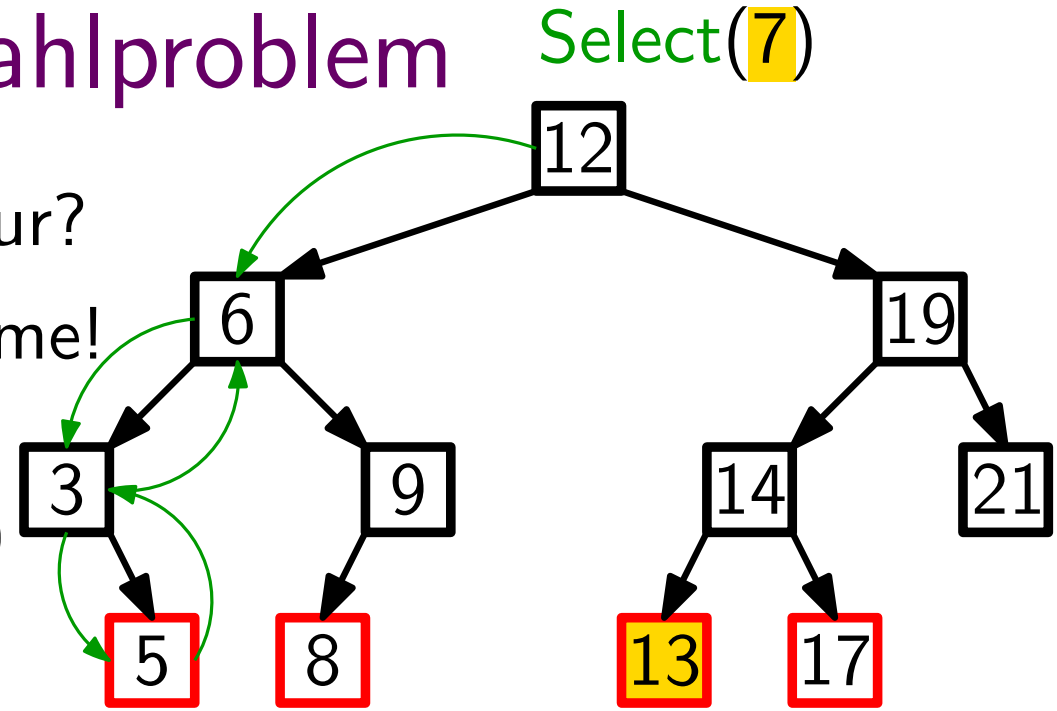
Select(int i): $O(i \cdot h)$

```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?
4. Implementiere! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich? Nein!

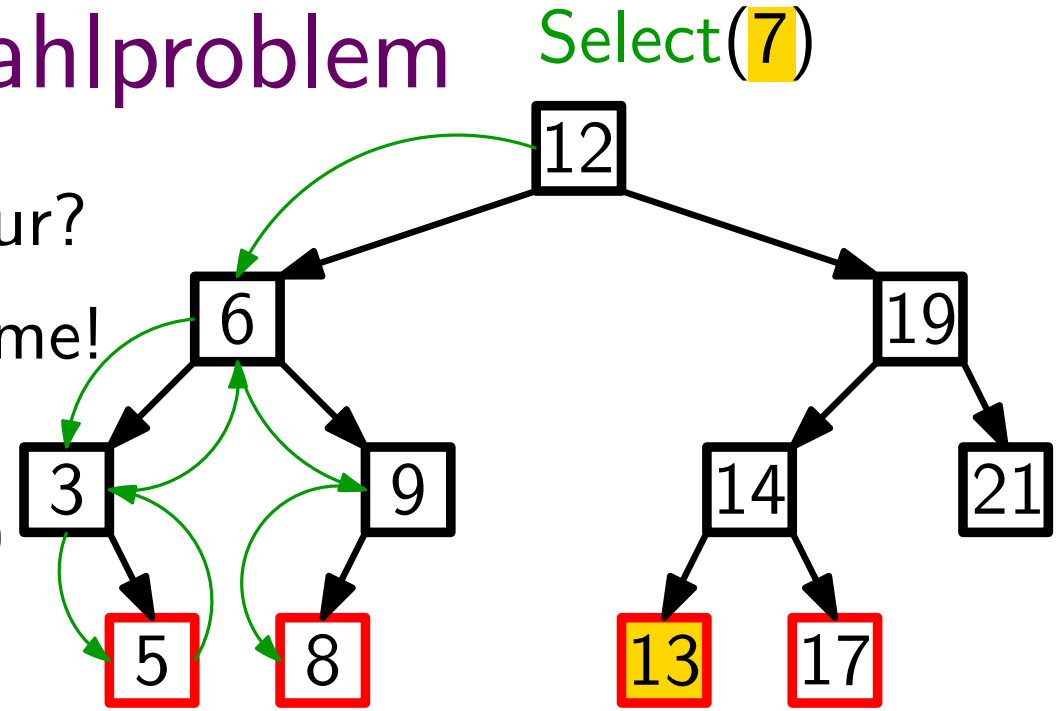
Select(int i): $O(i \cdot h)$

```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?
4. Implementiere! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich? Nein!

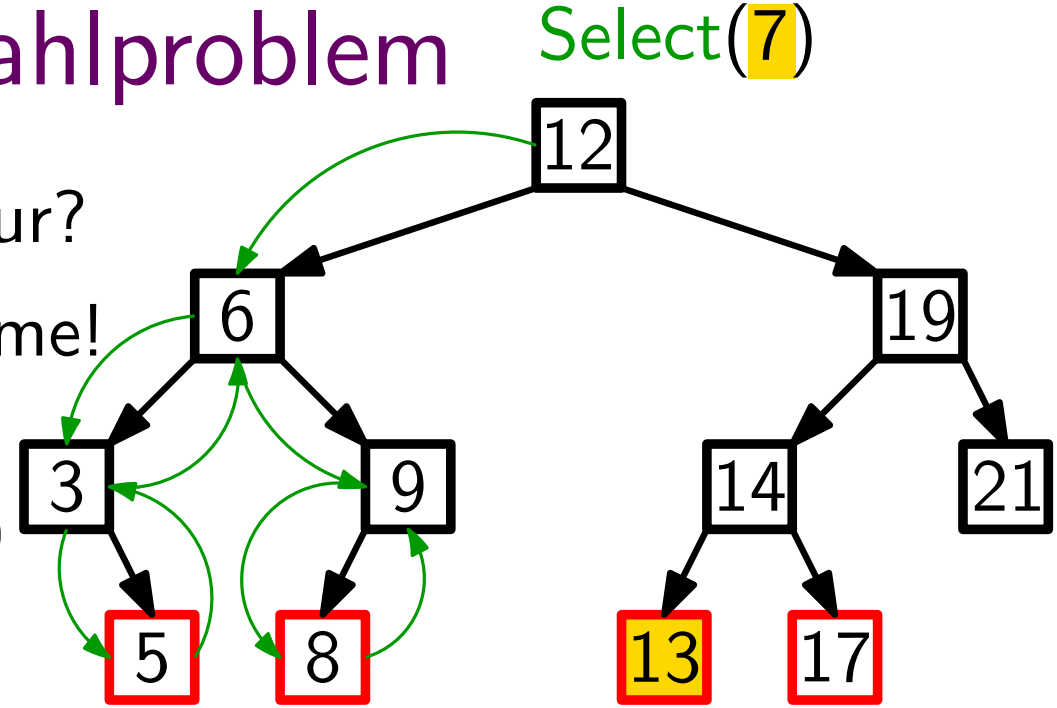
Select(int i): $O(i \cdot h)$

```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?
4. Implementiere! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich? Nein!

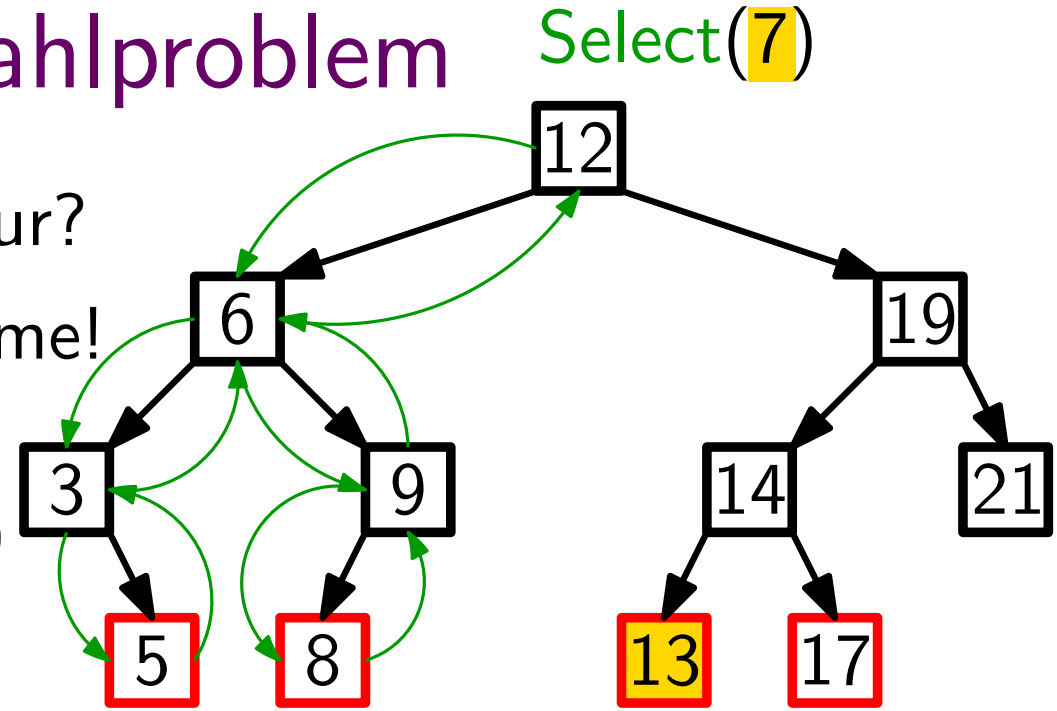
Select(int i): $O(i \cdot h)$

```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?
4. Implementiere! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich? Nein!

Select(int i): $O(i \cdot h)$

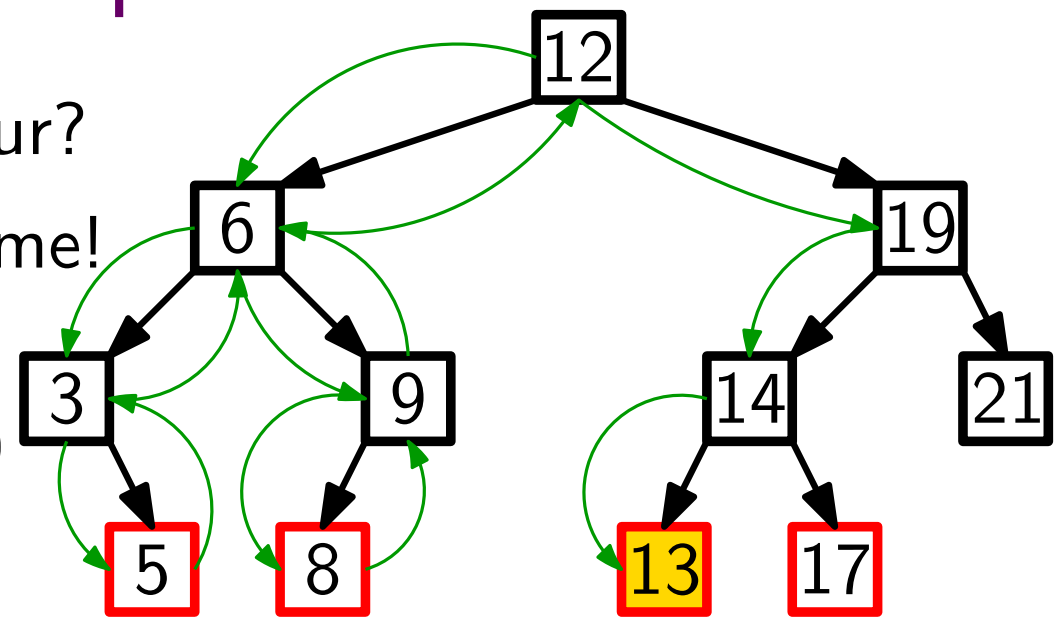
```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem

Select(7)



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$

2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich? Nein!

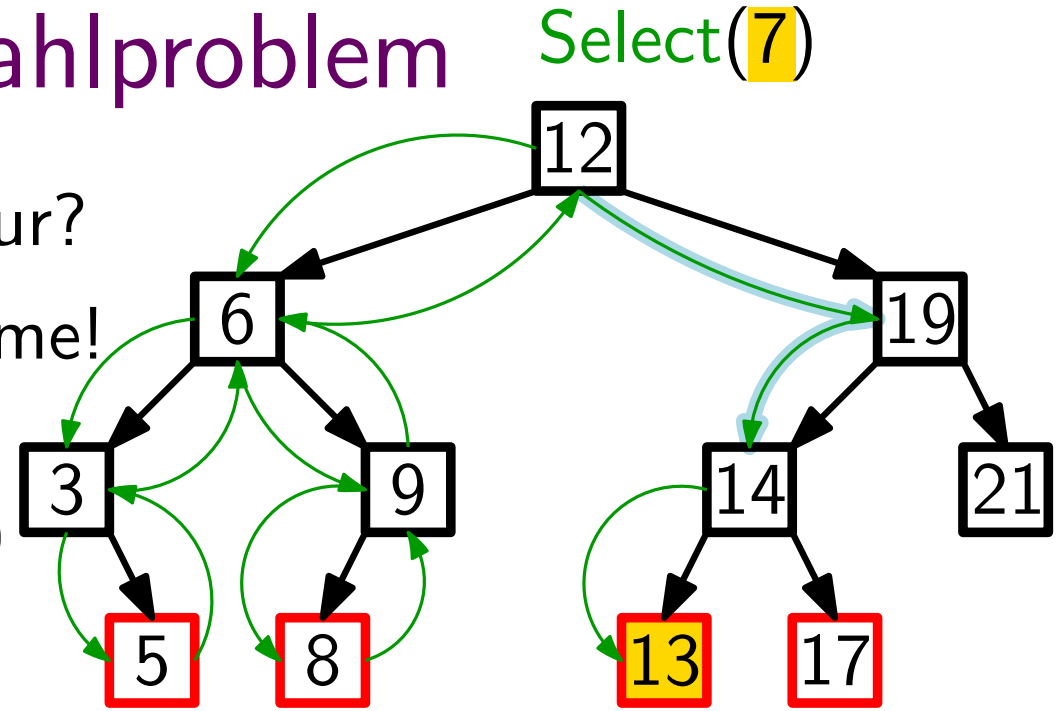
Select(int i): $O(i \cdot h)$

```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$

2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich? Nein!

Select(int i): $O(i \cdot h)$

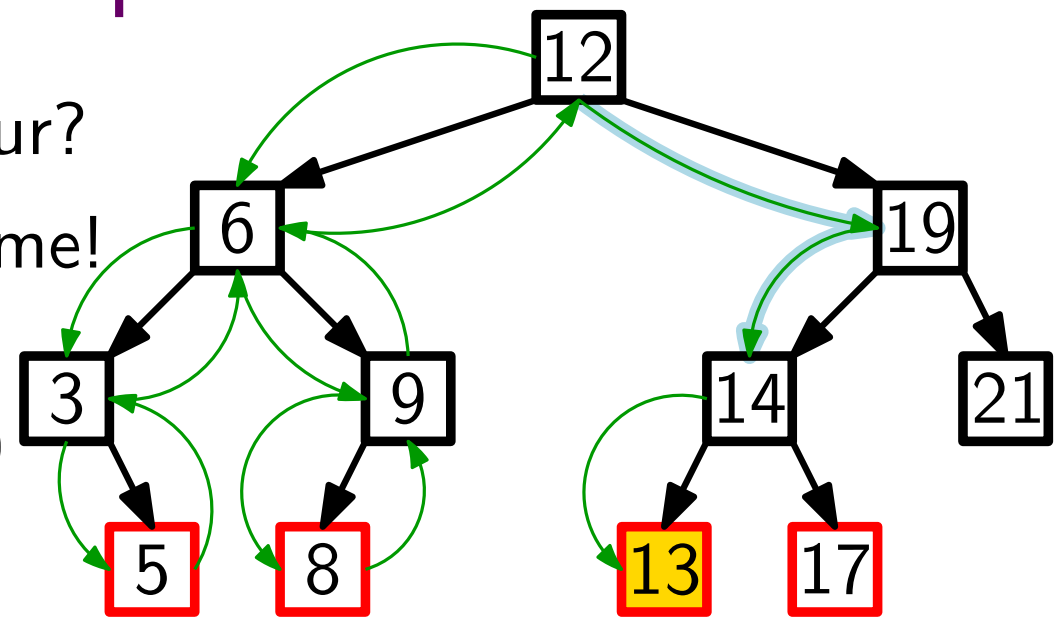
```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank \cdot h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem

Select(7)



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$

2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere! Laufzeit?

Select(int i): $O(i+h)$

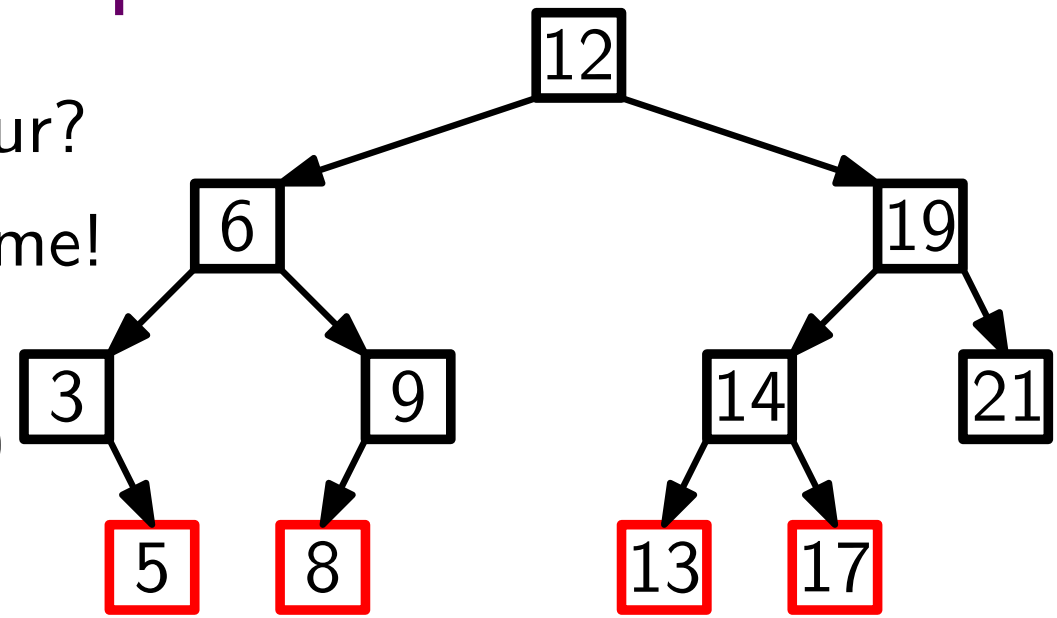
```
v = Minimum()
while v ≠ nil and i > 1 do
    v = Successor(v)
    i = i − 1
return v
```

Rank(Node v): $O(rank+h)$

```
j = 0
while v ≠ nil do
    v = Predecessor(v)
    j = j + 1
return j
```

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   – balancierte binäre Suchbäume!
   z.B. Rot-Schwarz-Bäume
   $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten? – gar keine?!?

4. Implementiere! Laufzeit?
   Select(int i): $O(i+h)$ Rank(Node v): $O(rank+h)$

Problem: Wenn $i \in \Theta(n)$ – z.B. beim Median –,
dann ist die Laufzeit linear (wie im statischen Fall!).

Vorlesungsumfrage

Sehr geehrter Herr Prof. Dr. Wolff,

die Rücklaufquote der Umfrage "Algorithmen und Datenstrukturen" liegt aktuell bei 8% (Teilnehmerzahl insgesamt: 296).

Dieser Wert liegt unter einer definierten Schwelle von 50%. Wir möchten Sie daher bitten, Ihre Teilnehmer nochmals zu ermuntern, sich an der Umfrage zu beteiligen.

Bitte beachten Sie, dass die Umfrage am 15.12.2023 23:59:00 geschlossen wird.

Ihr EvaSys Administrator

Vorlesungsumfrage – jetzt!

Bitte suchen Sie die E-Mail, die Sie von EvaSys bekommen haben, und klicken Sie dort auf den Link zur Umfrage.

Vorlesungsumfrage – jetzt!

Bitte suchen Sie die E-Mail, die Sie von EvaSys bekommen haben, und klicken Sie dort auf den Link zur Umfrage.

All questions are optional. Should a question not be applicable to a course, you can leave the answer open.

1 Course as a whole

1.1 Please rate the course as a whole.

very good ○ ○ ○ ○ ○ insufficient

2 Lecture

2.1 The lecturer is well prepared and presents the material in a way that is easy to understand.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all

2.2 The supplied lecture materials (writings on the blackboard, presentation slides, videos, additional literature) are well prepared and improve my understanding of the course contents.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all

2.3 Portions of the lecture were held online (live stream, recorded lecture) and helped improve the lecture.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all | ○ no online parts

3 Exercises

3.1 The tutor is well prepared and presents the material in a way that is easy to understand.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all | ○ no exercises

3.2 The exercises are comprehensible and improve my understanding of the course contents.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all | ○ no exercises

Vorlesungsumfrage – jetzt!

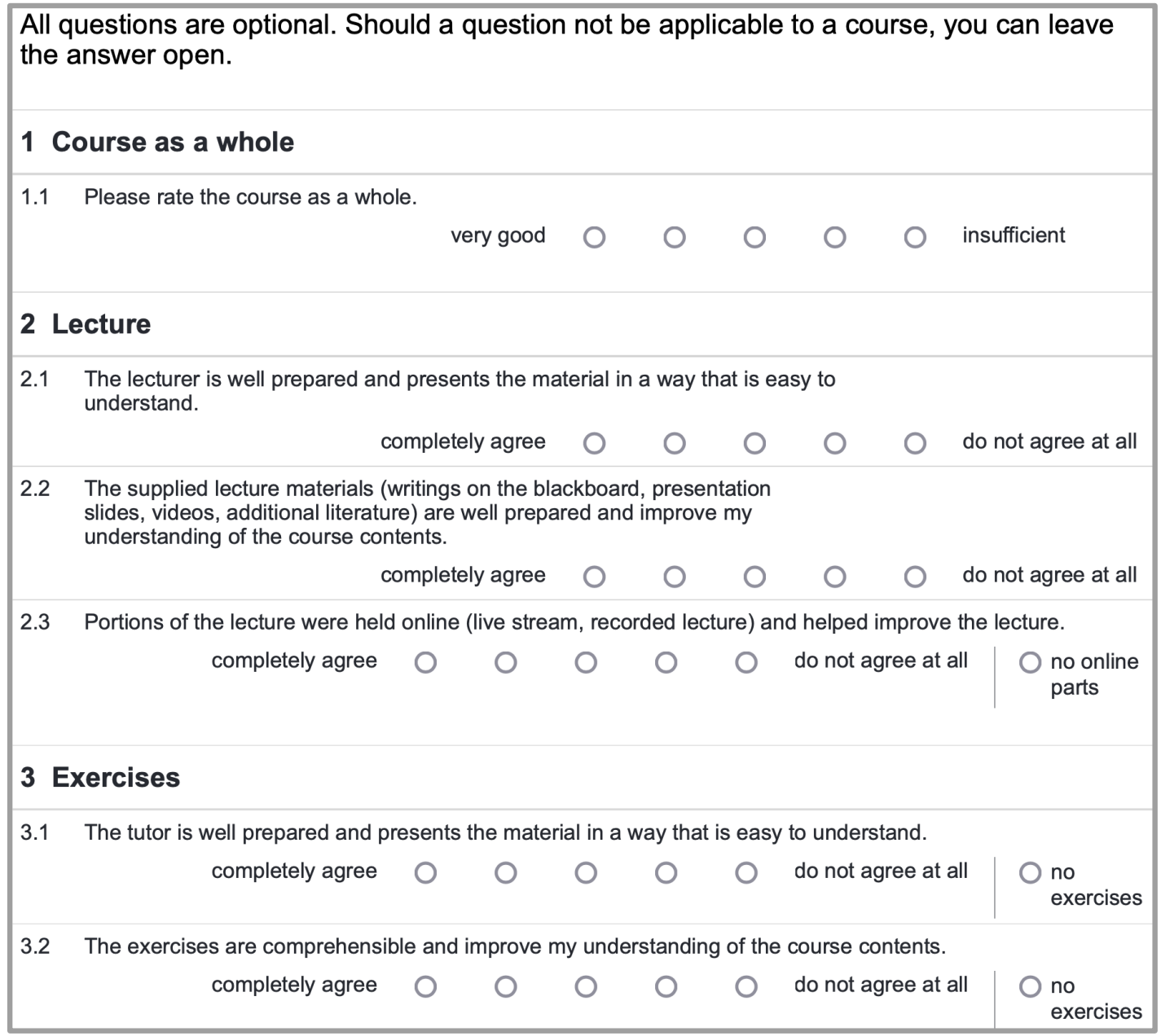
Bitte suchen Sie die E-Mail, die Sie von EvaSys bekommen haben, und klicken Sie dort auf den Link zur Umfrage.

4. Additional remarks

4.1 What did you especially like in this course?

4.2 From your perspective, what could be improved? What do you criticize?

Zum Beispiel:
- Folien
- Übungsaufgaben
- Roter Faden?
- Beweise?
- Reaktion auf Fragen?
- Buch zur Vorlesung?
- Zwischentests
- Aufgaben in der VL
- ...



All questions are optional. Should a question not be applicable to a course, you can leave the answer open.

1 Course as a whole

1.1 Please rate the course as a whole.

very good ○ ○ ○ ○ ○ insufficient

2 Lecture

2.1 The lecturer is well prepared and presents the material in a way that is easy to understand.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all

2.2 The supplied lecture materials (writings on the blackboard, presentation slides, videos, additional literature) are well prepared and improve my understanding of the course contents.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all

2.3 Portions of the lecture were held online (live stream, recorded lecture) and helped improve the lecture.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all | ○ no online parts

3 Exercises

3.1 The tutor is well prepared and presents the material in a way that is easy to understand.

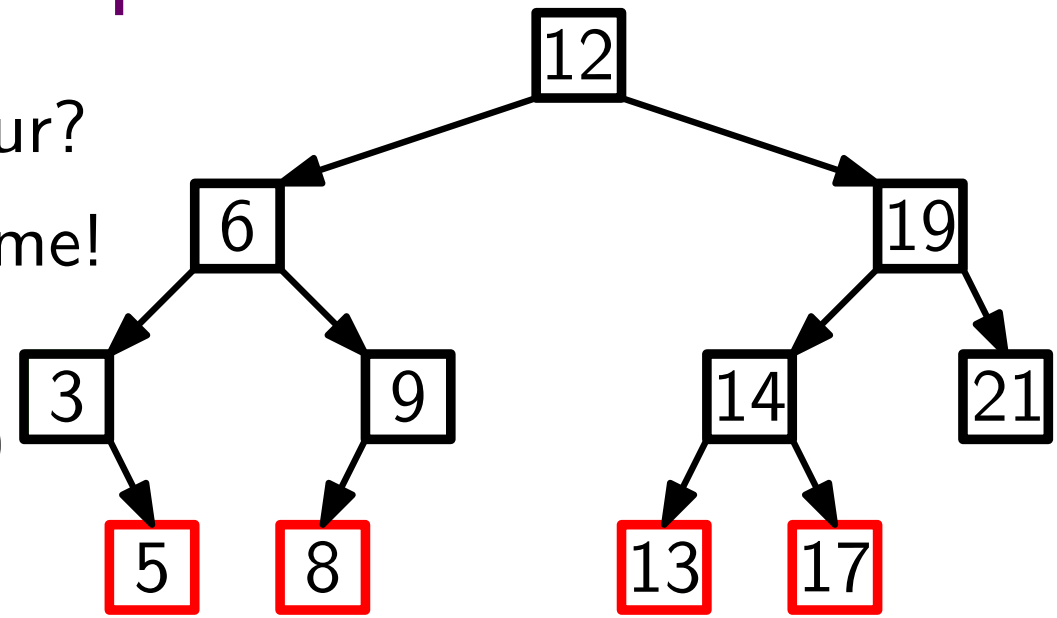
completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all | ○ no exercises

3.2 The exercises are comprehensible and improve my understanding of the course contents.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all | ○ no exercises

Das dynamische Auswahlproblem

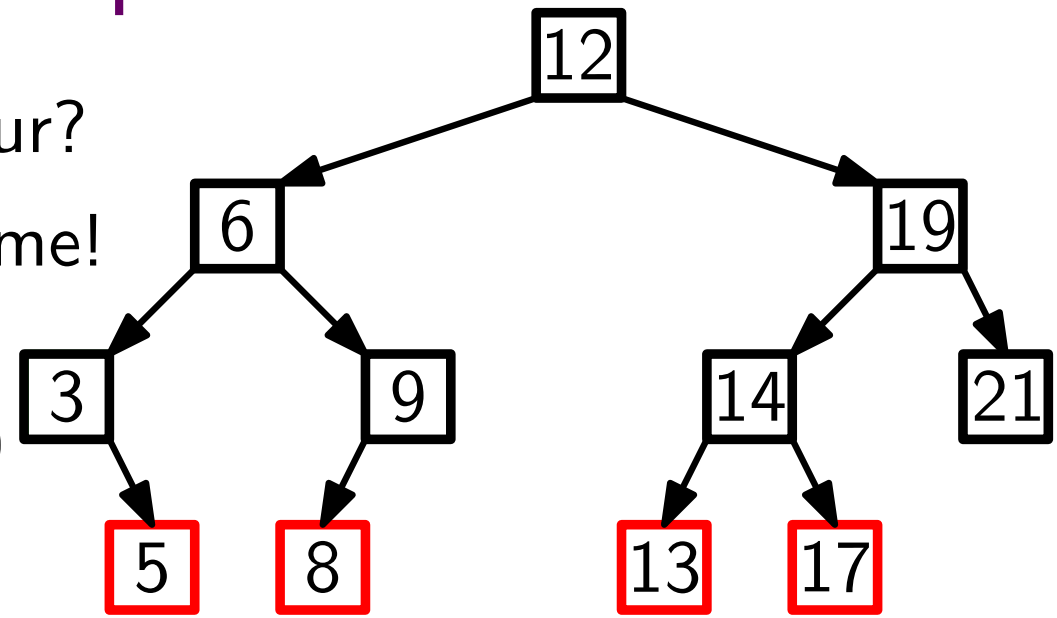
1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?

Das dynamische Auswahlproblem

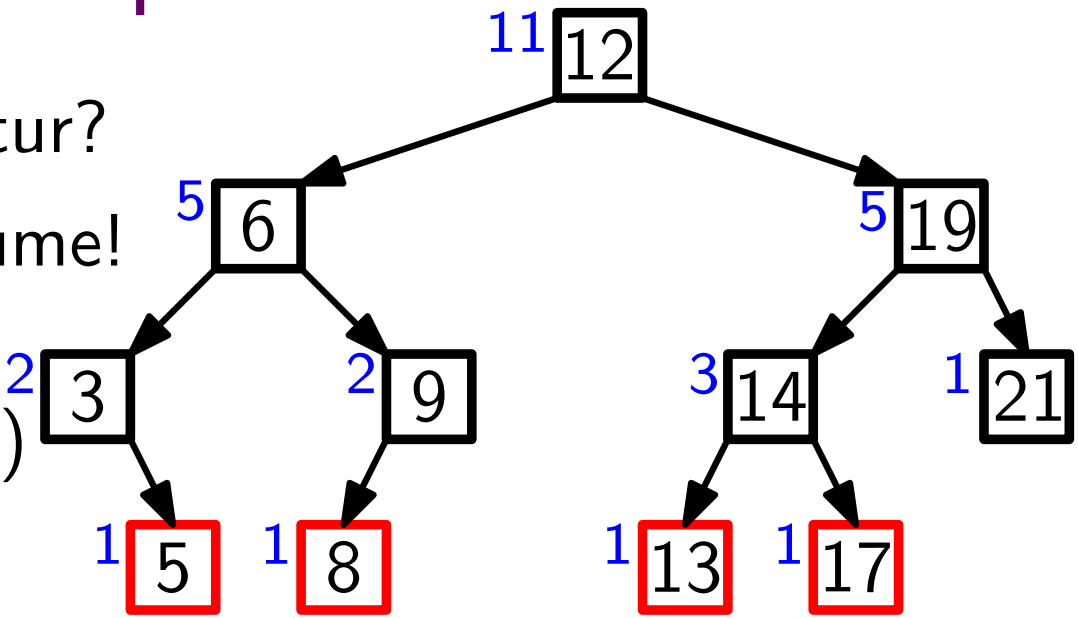
1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume

Das dynamische Auswahlproblem

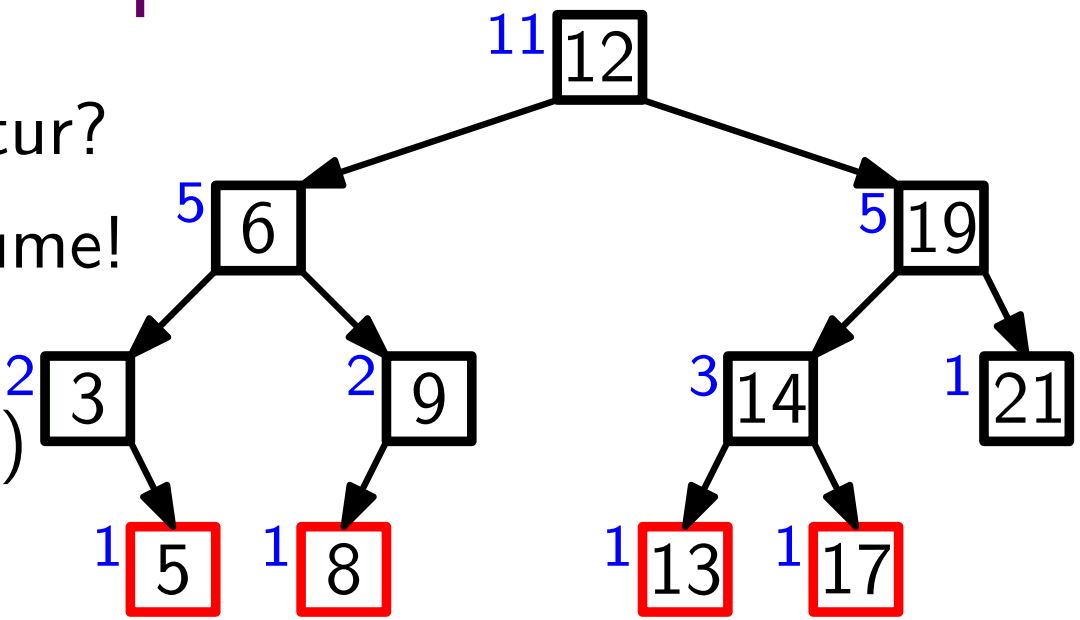
1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



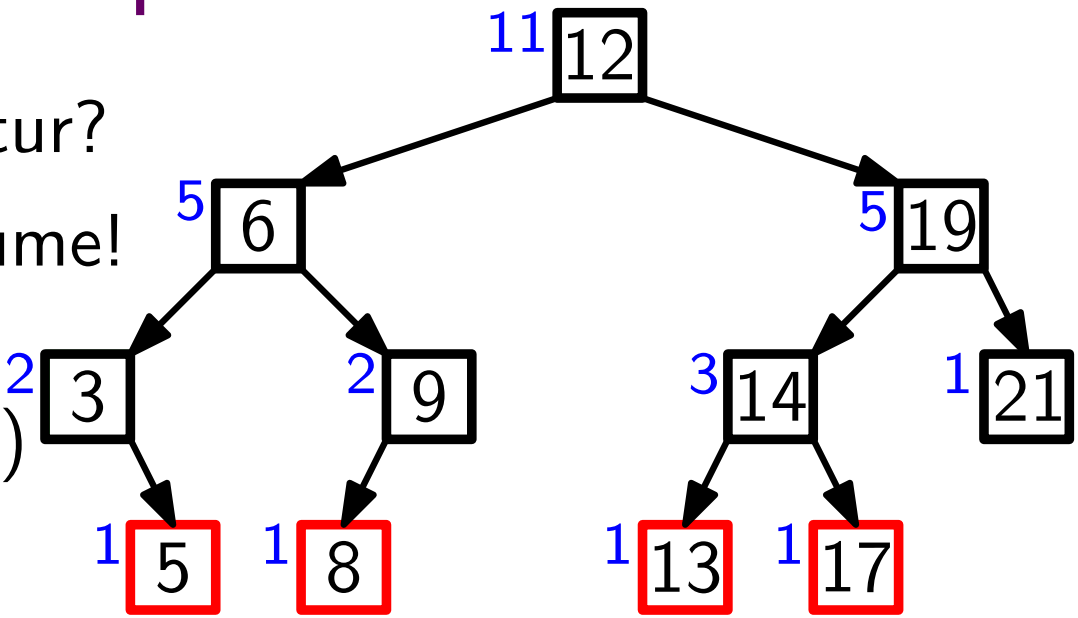
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

Rank(Node v):

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

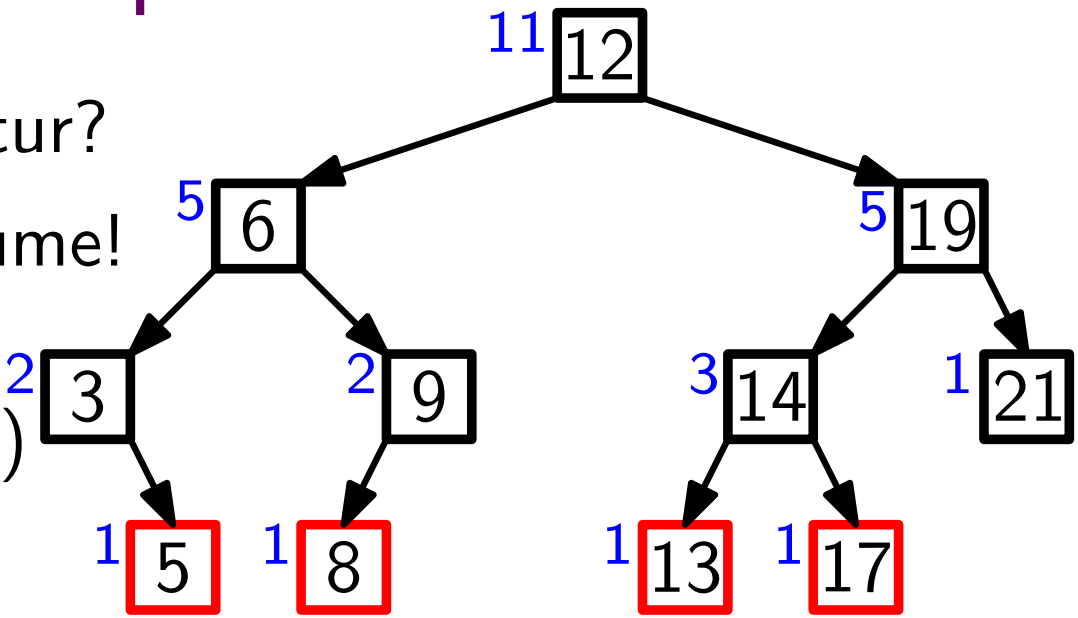
```
r = v.left.size + 1
if i == r then return
else
    if i < r then
        return
    else
        return
```

Rank(Node v):

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

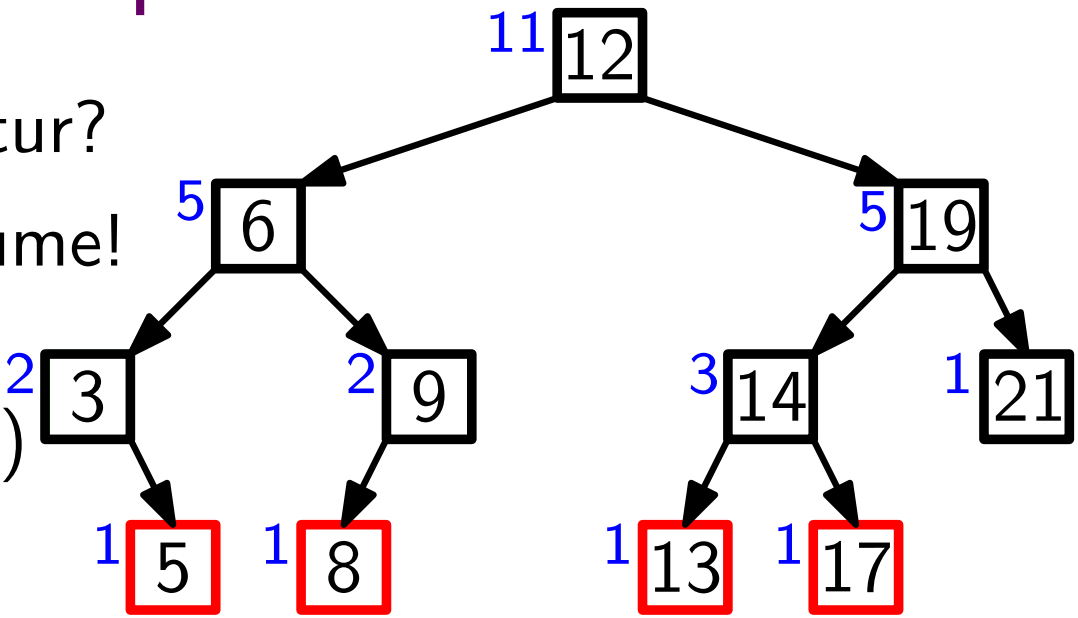
```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return
    else
        return
```

Rank(Node v):

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

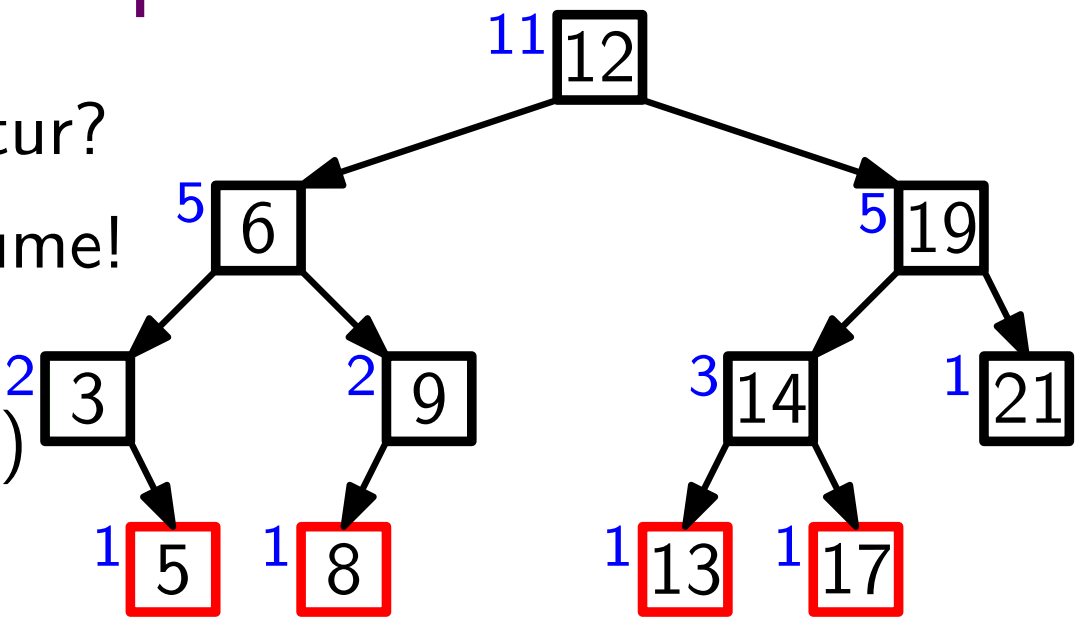
```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return
```

Rank(Node v):

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

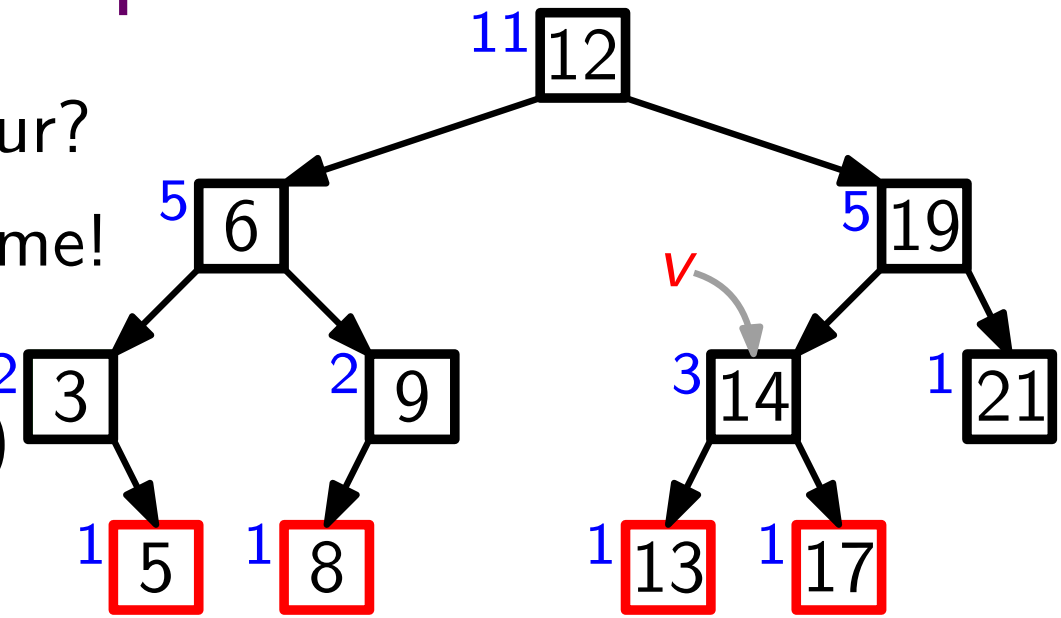
```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

Rank(Node v):

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

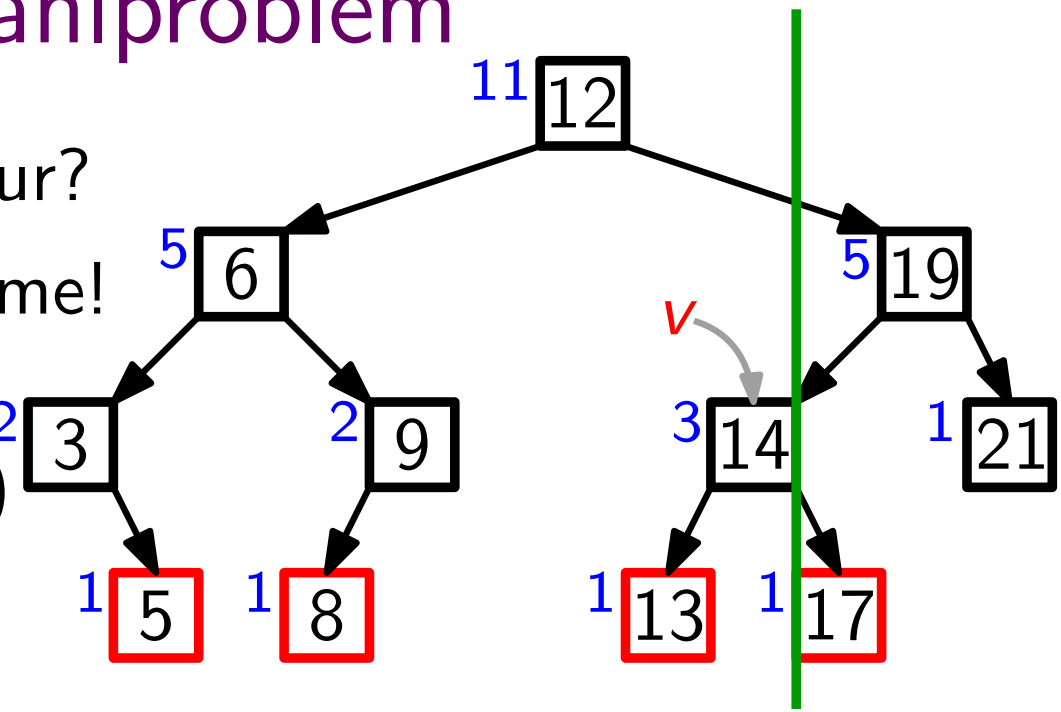
```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

Rank(Node v):

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

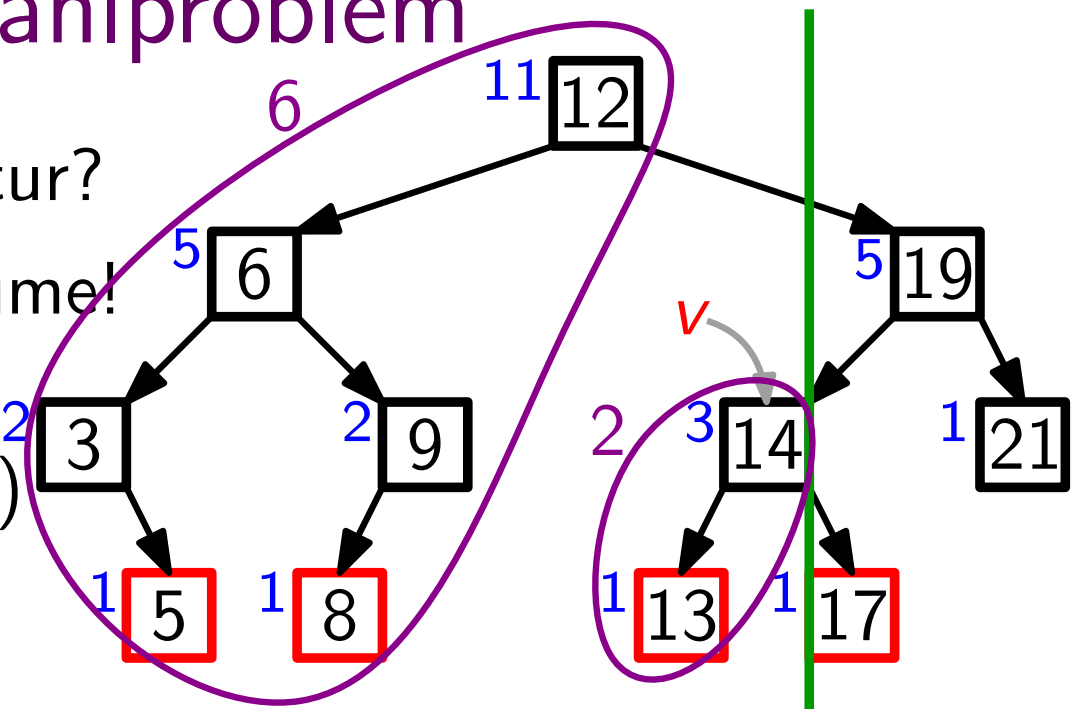
```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

Rank(Node v):

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

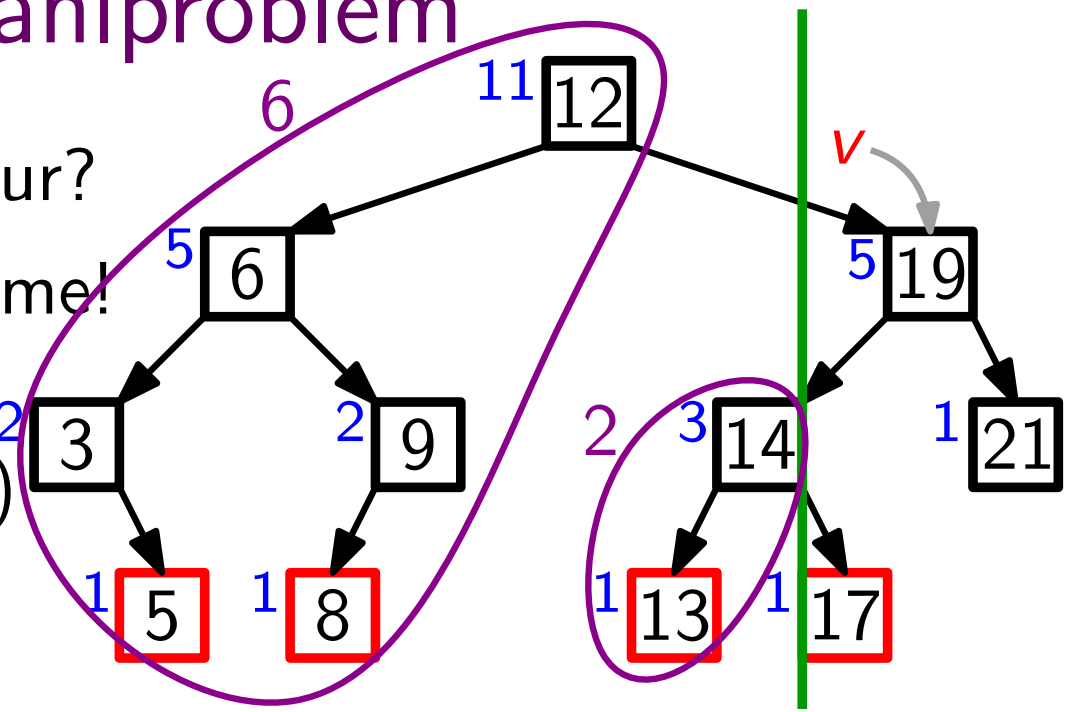
```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

Rank(Node v):

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

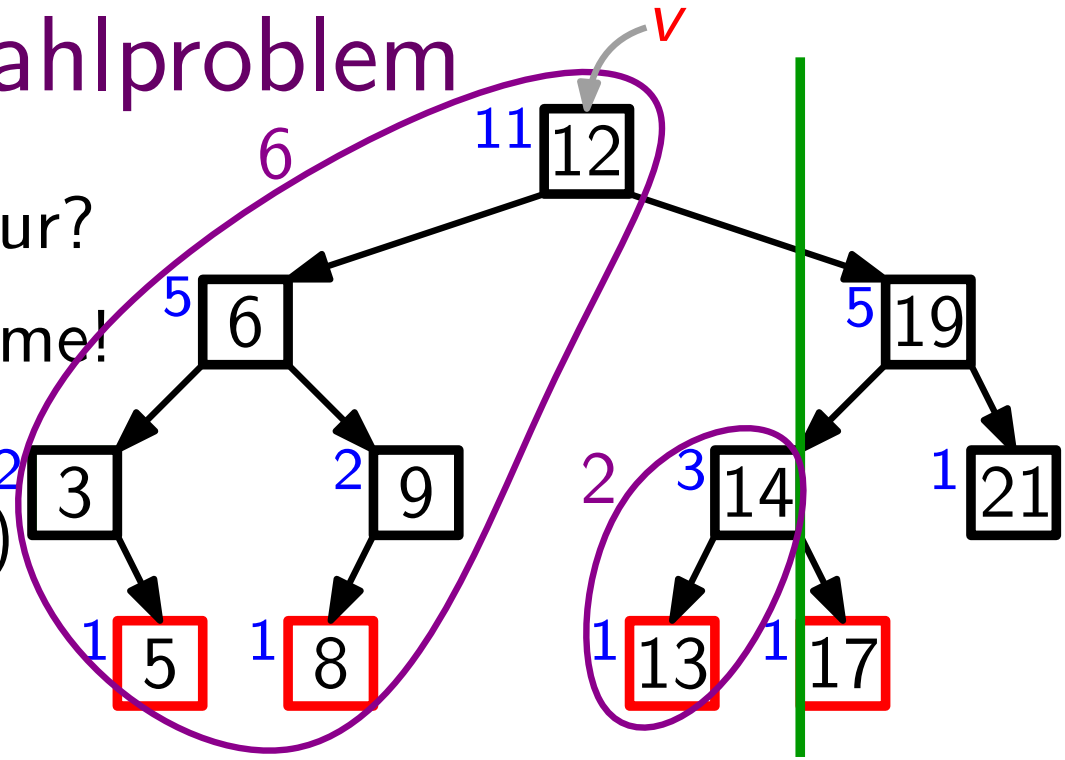
4. Select(Node $v = root$, int i):

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

Rank(Node v):

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$

2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

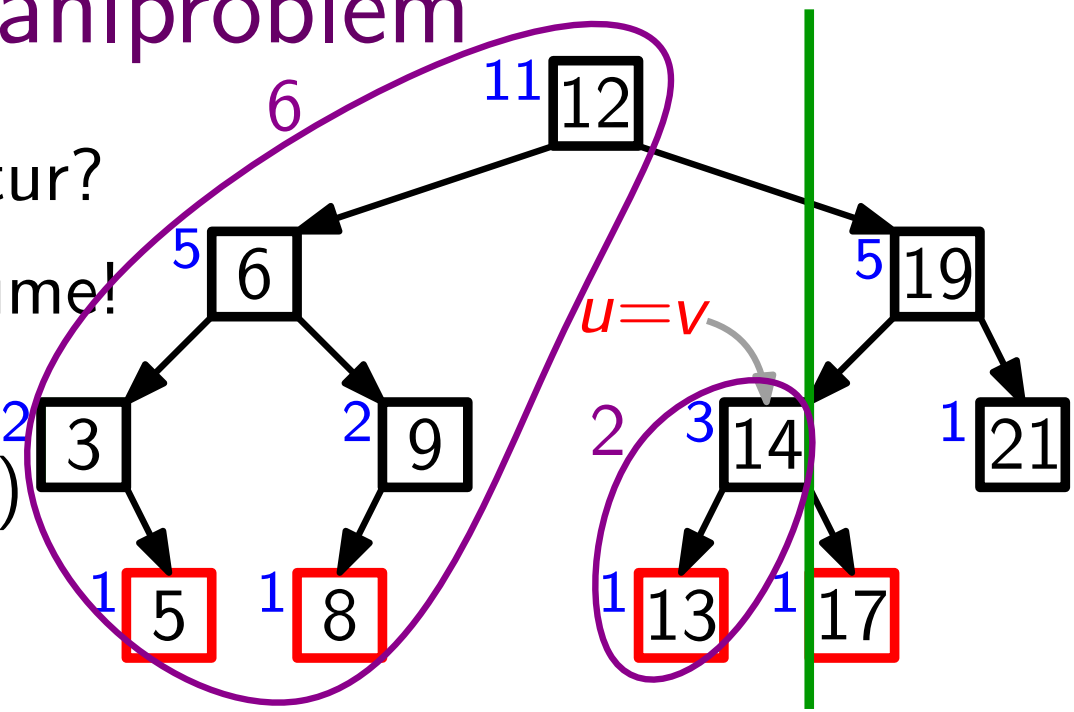
```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

Rank(Node v):

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

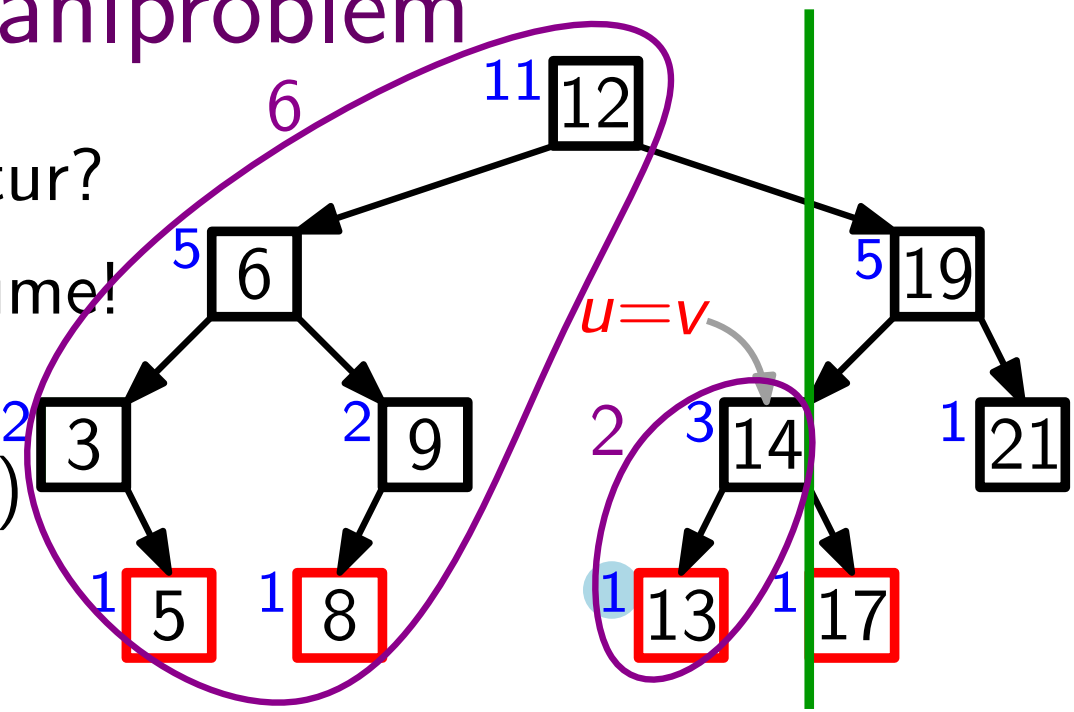
Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    [          ]
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

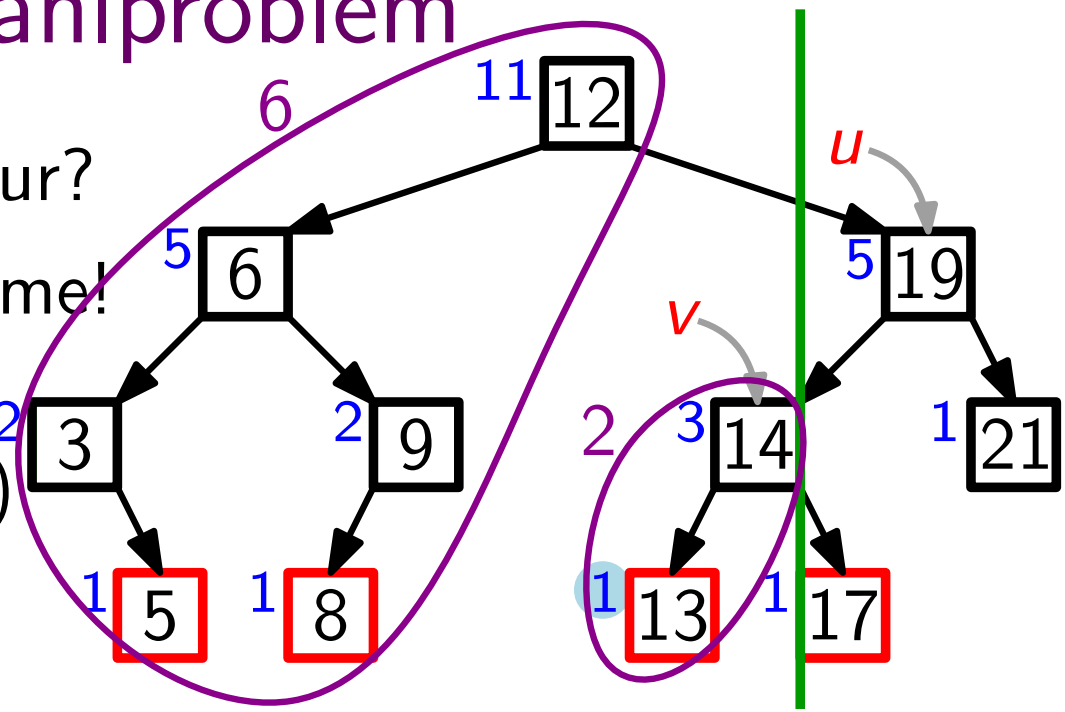
Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    [          ]
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

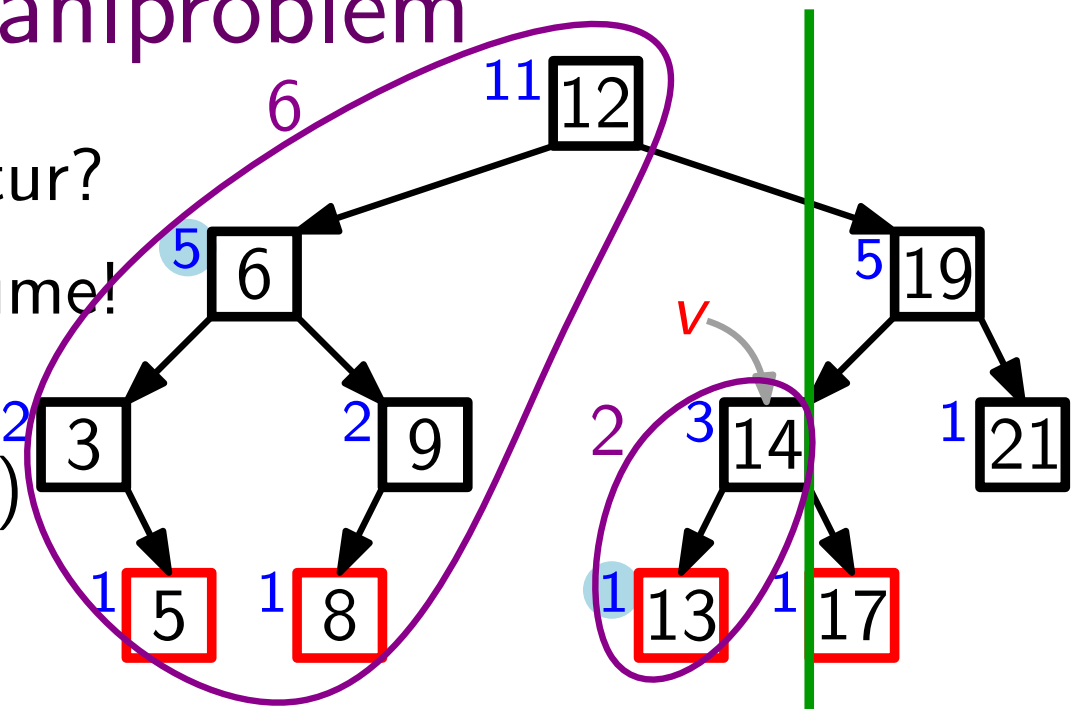
Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    [redacted]
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

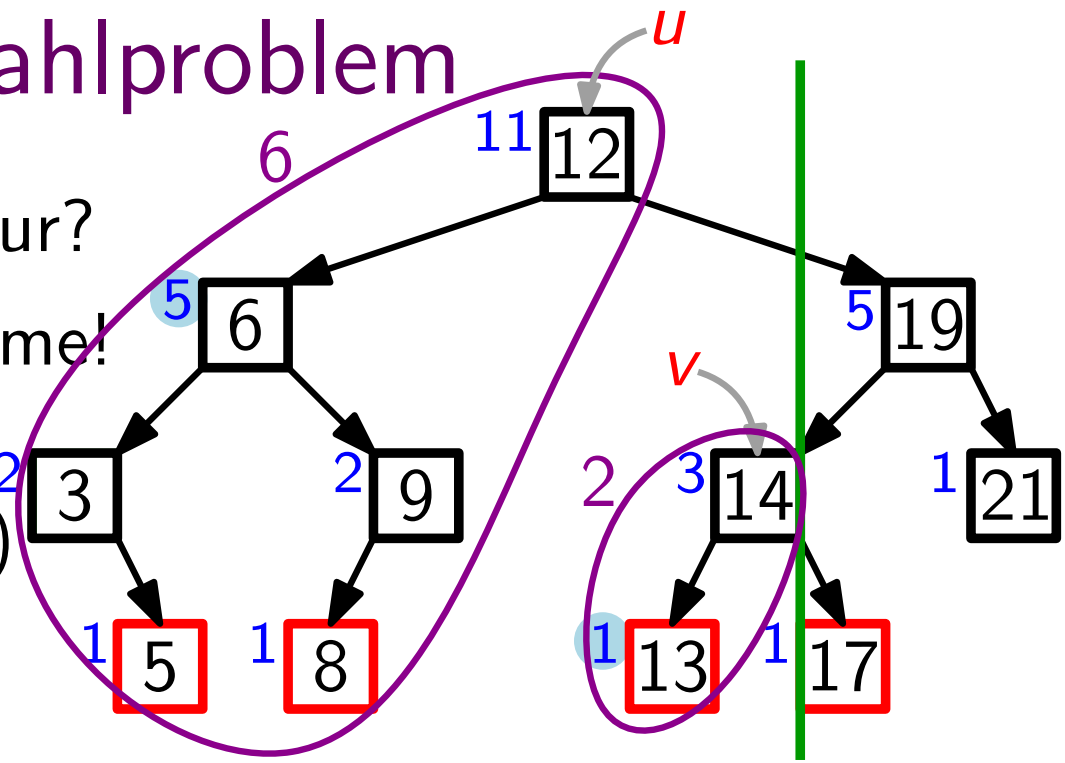
Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    [          ]
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

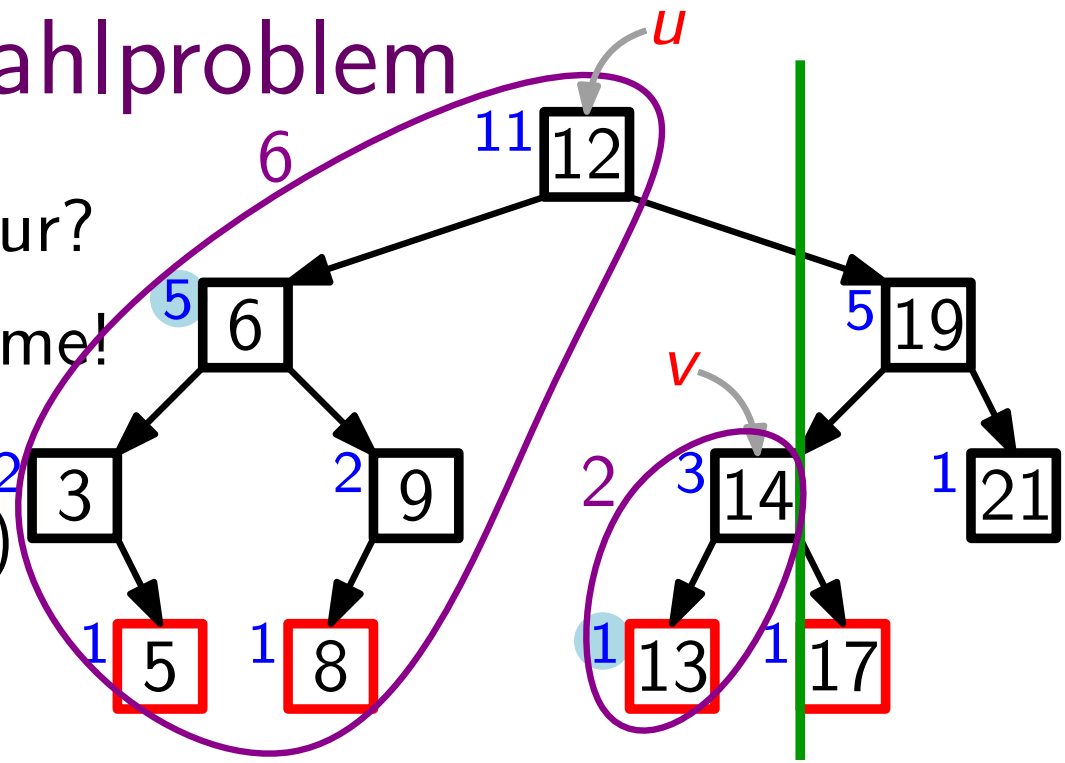
Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    [          ]
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

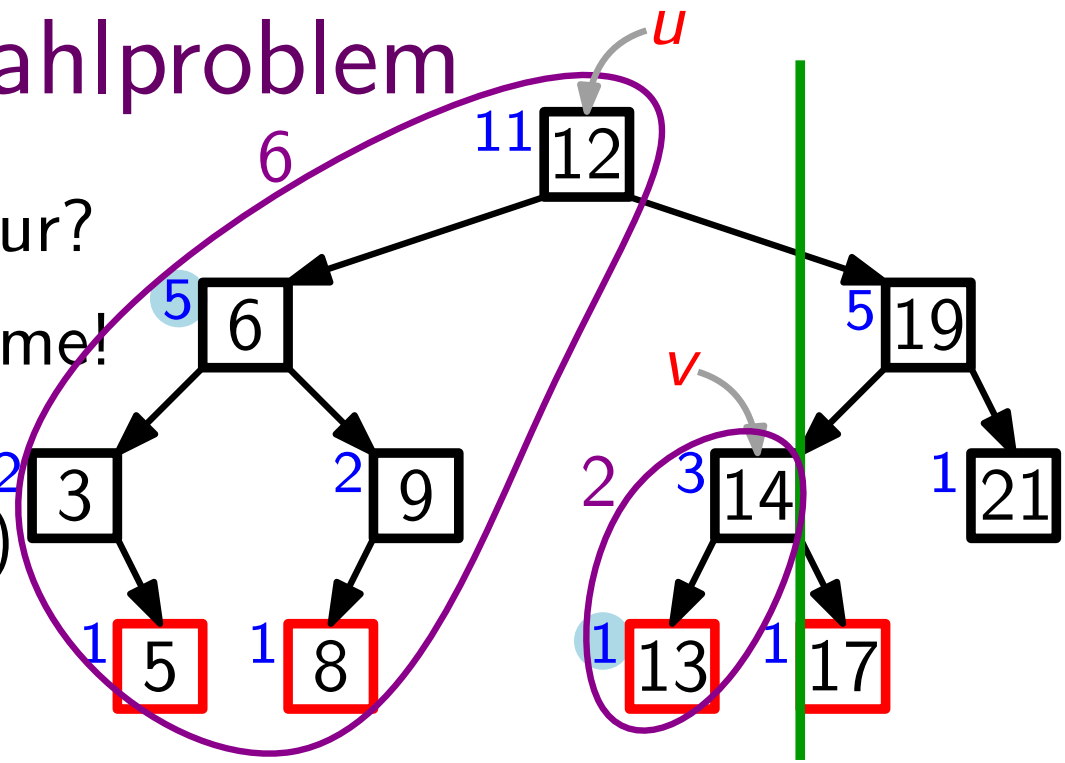
Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        [redacted]
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i):

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

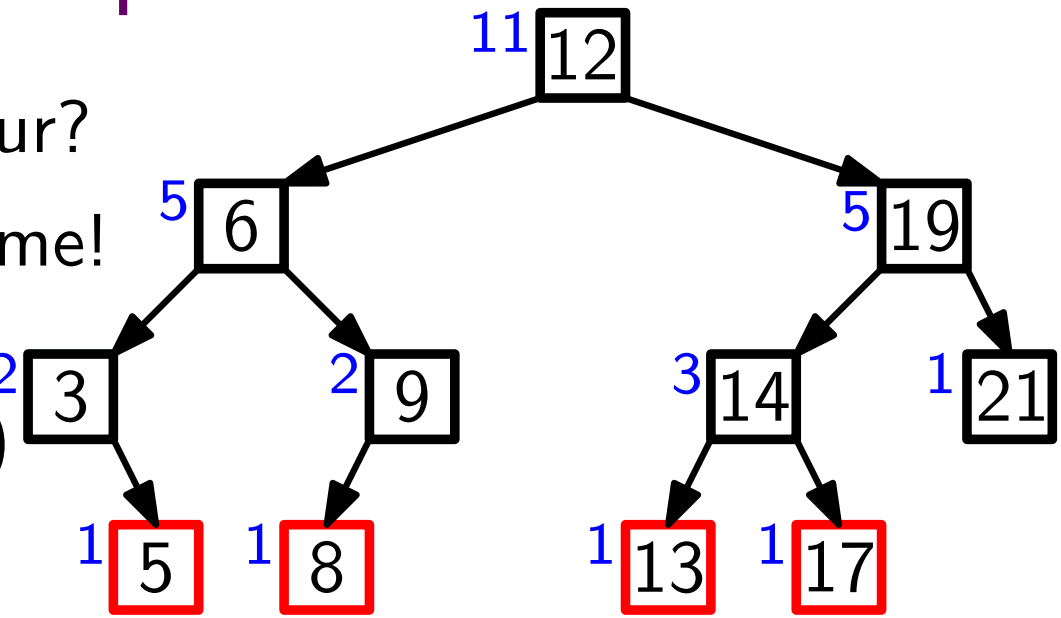
Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i): $O(\ \ )$

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

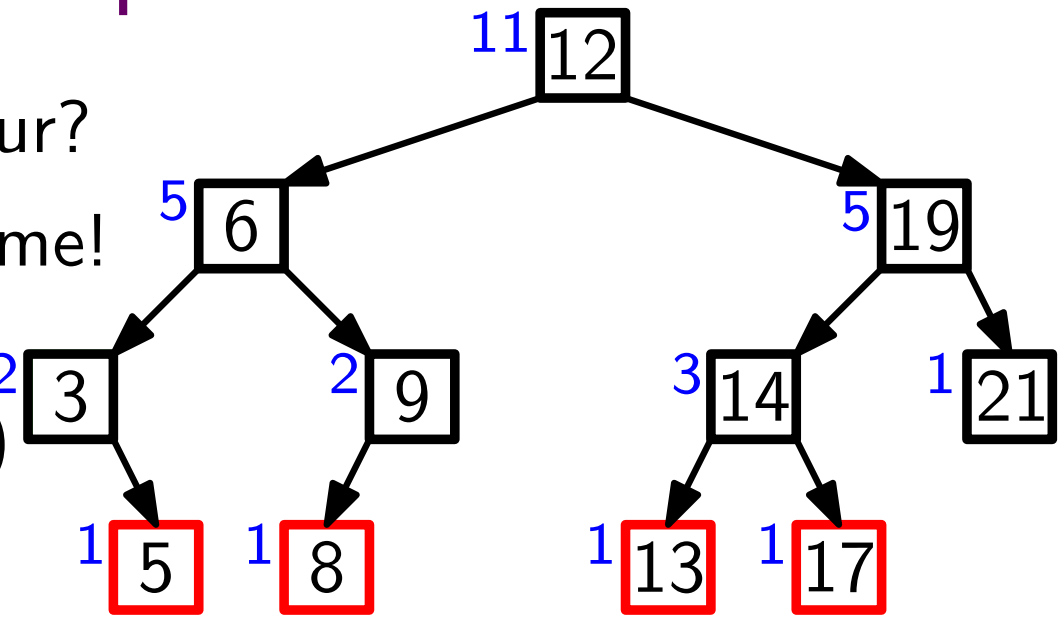
Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i): $O(\ \ )$

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

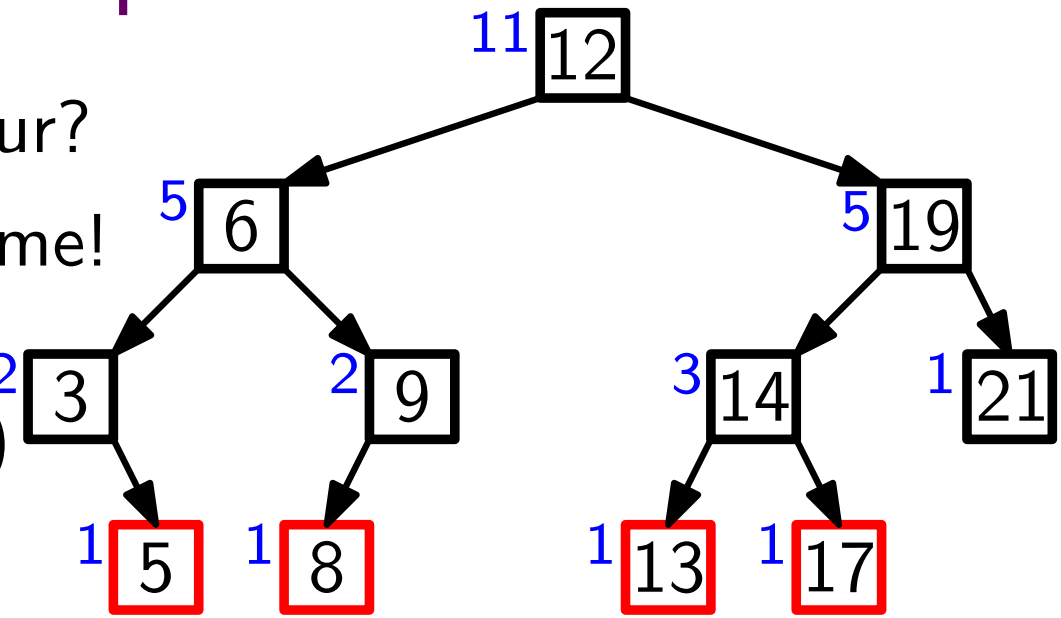
Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i): $O(h)$

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

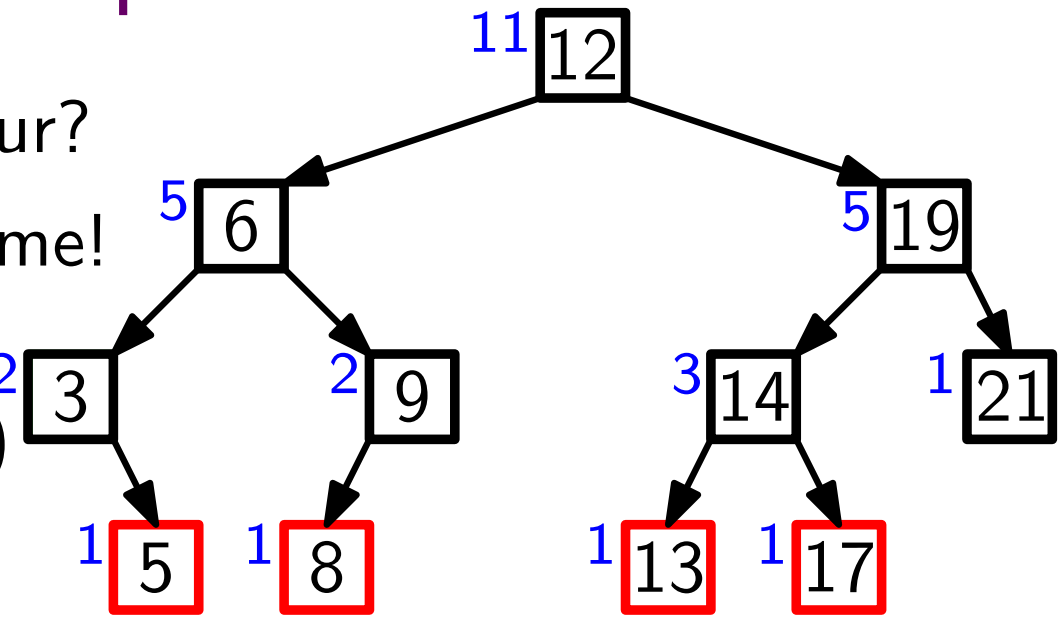
Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i): $O(h)$

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

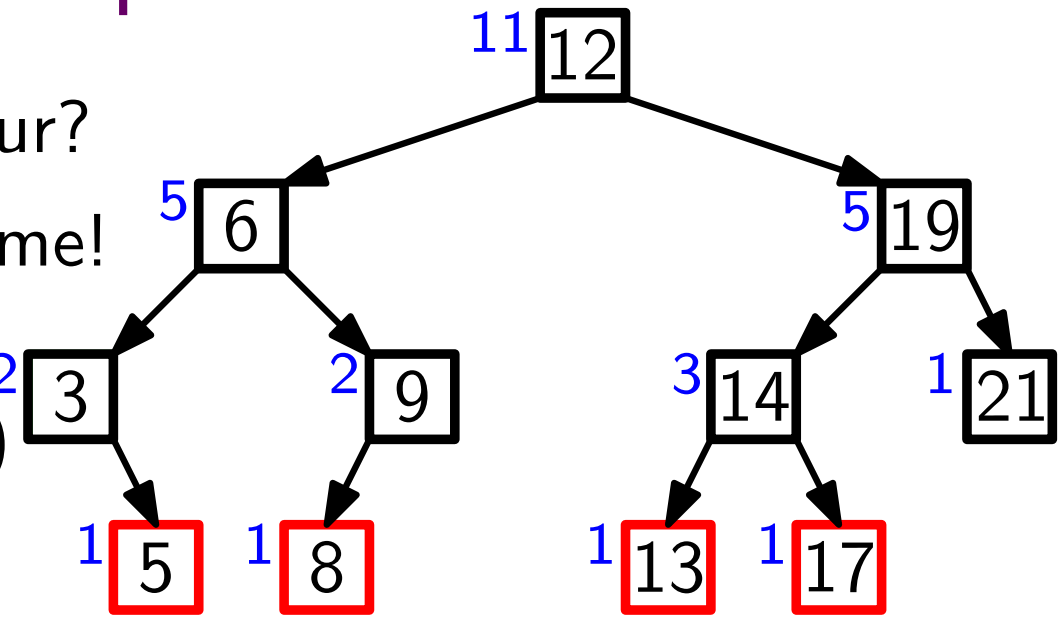
Rank(Node v): $O(\ )$

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i): $O(h)$

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

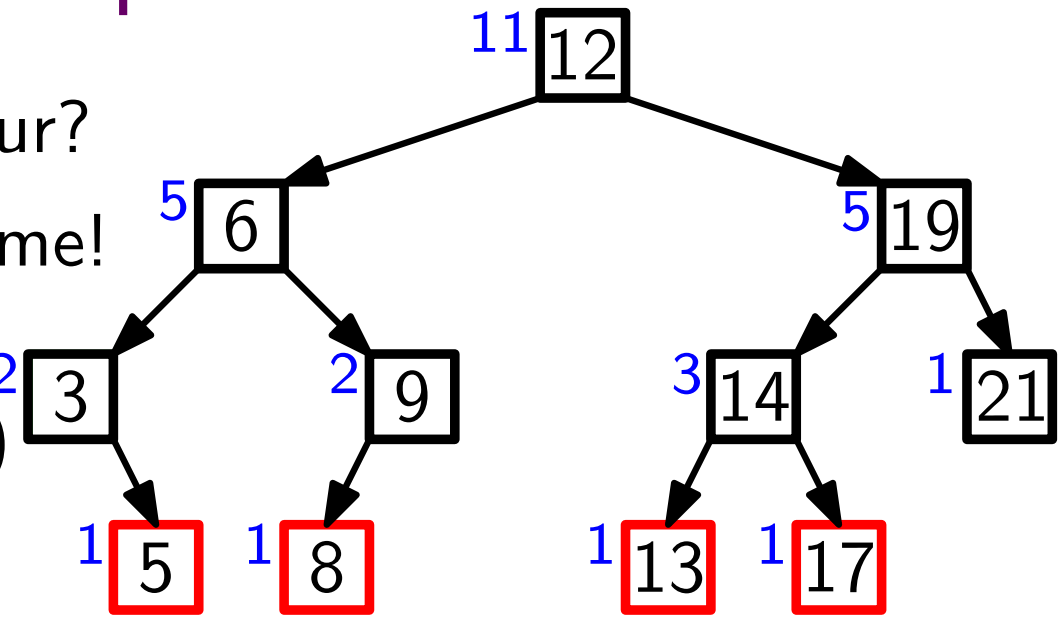
Rank(Node v): $O(\ )$

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume!
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in O(\log n)$



2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume: für jeden Knoten v, speichere $v.size$

4. Select(Node $v = root$, int i): $O(h)$

```
r = v.left.size + 1
if i == r then return v
else
    if i < r then
        return Select(v.left, i)
    else
        return Select(v.right, i − r)
```

Rank(Node v): $O(h)$

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

Invariante:

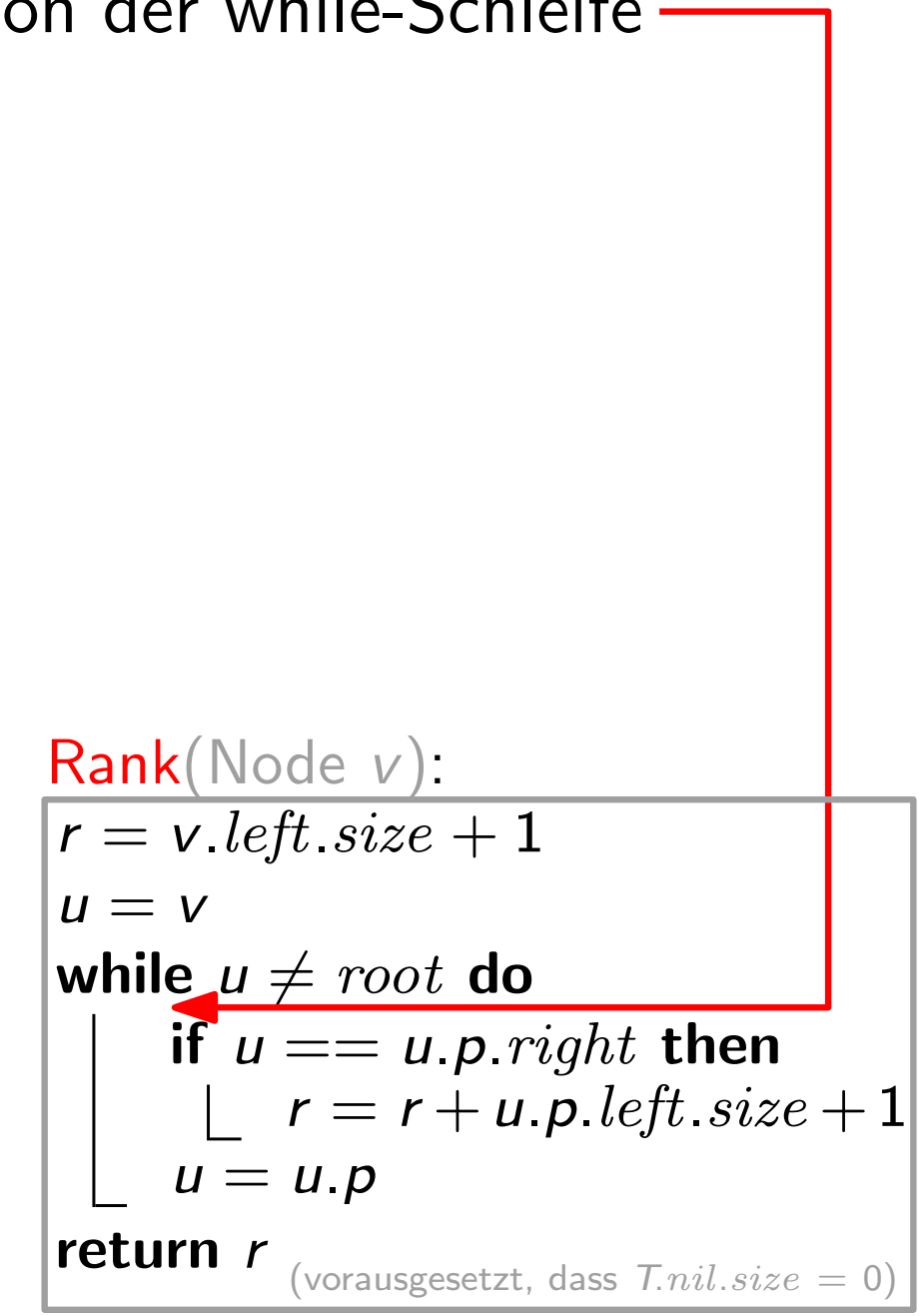
Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

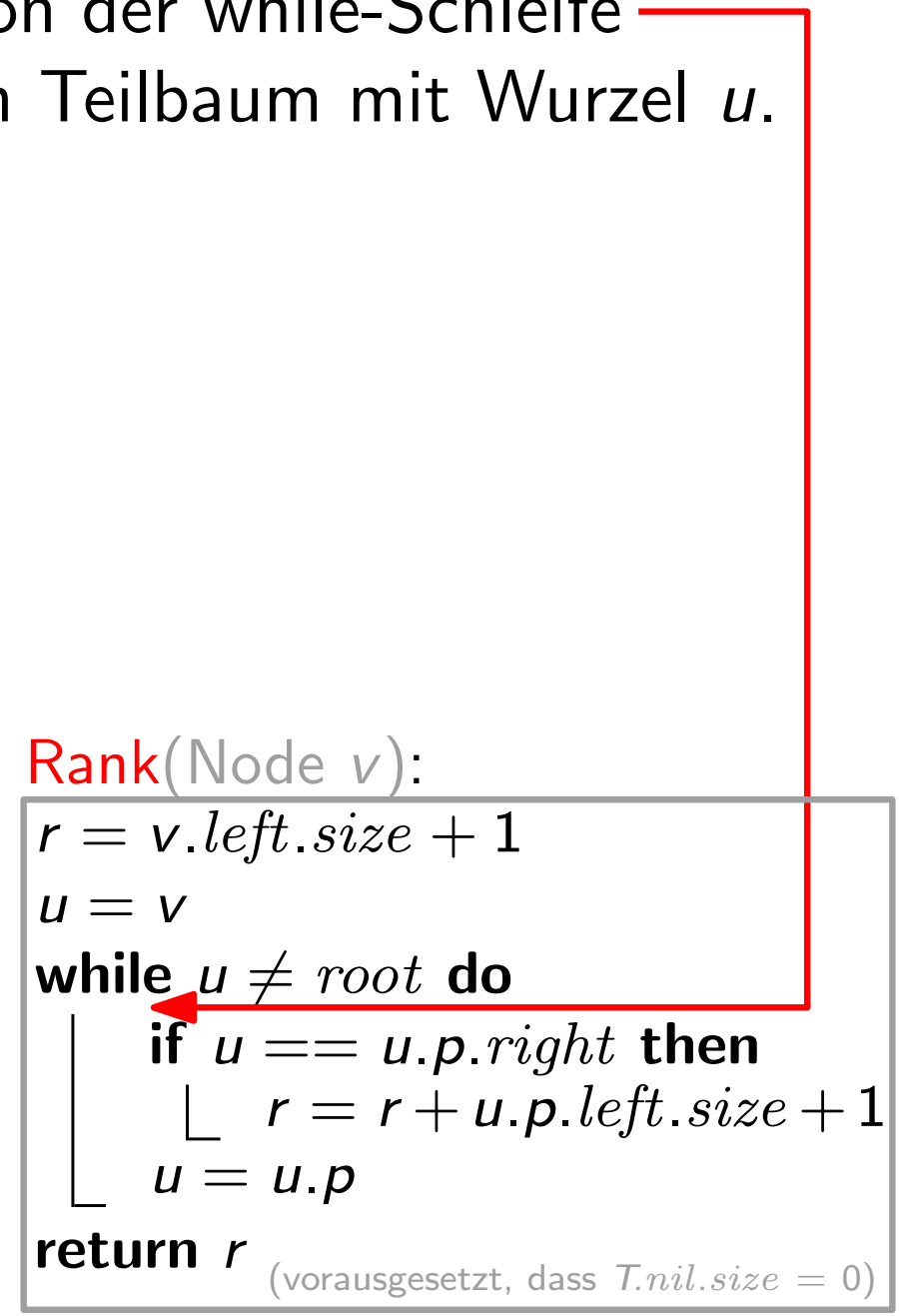
Korrektheit von Rank()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist



Korrektheit von Rank()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.



Korrektheit von Rank()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der $\underbrace{\text{Rang von } v \text{ im Teilbaum mit Wurzel } u.}_{u\text{-Rang von } v}$

1.) Initialisierung

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

1.) Initialisierung

Vor 1. Iteration gilt $u = v \Rightarrow u\text{-Rang}(v) = v.left.size + 1$.

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

1.) Initialisierung

Vor 1. Iteration gilt $u = v \Rightarrow u\text{-Rang}(v) = v.left.size + 1$. ✓

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

1.) Initialisierung ✓

2.) Aufrechterhaltung

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

1.) Initialisierung ✓

2.) Aufrechterhaltung

Annahme: Inv. galt zu Beginn der aktuellen Iteration.
Zu zeigen: Inv. gilt dann auch am Ende der aktuellen Iter.

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

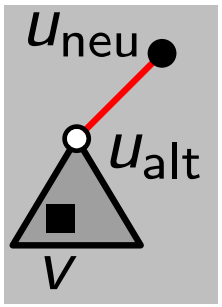
Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

1.) Initialisierung ✓

2.) Aufrechterhaltung

Annahme: Inv. galt zu Beginn der aktuellen Iteration.
Zu zeigen: Inv. gilt dann auch am Ende der aktuellen Iter.



1. Fall: u war linkes Kind.

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

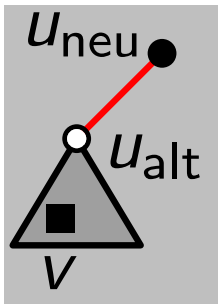
Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

1.) Initialisierung ✓

2.) Aufrechterhaltung

Annahme: Inv. galt zu Beginn der aktuellen Iteration.
Zu zeigen: Inv. gilt dann auch am Ende der aktuellen Iter.



1. Fall: u war linkes Kind.
   $\Rightarrow$ u-Rang von v bleibt gleich.

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

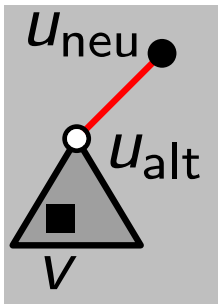
Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

1.) Initialisierung ✓

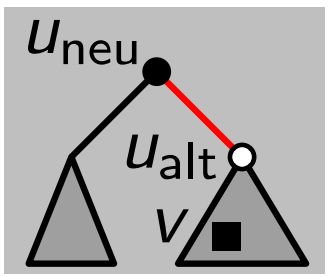
2.) Aufrechterhaltung

Annahme: Inv. galt zu Beginn der aktuellen Iteration.
Zu zeigen: Inv. gilt dann auch am Ende der aktuellen Iter.



1. Fall: u war linkes Kind.
   $\Rightarrow$ u-Rang von v bleibt gleich.

2. Fall: u war rechtes Kind.



Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

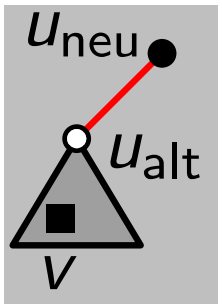
Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

1.) Initialisierung ✓

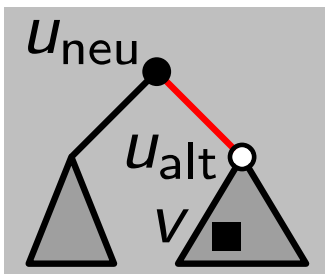
2.) Aufrechterhaltung

Annahme: Inv. galt zu Beginn der aktuellen Iteration.
Zu zeigen: Inv. gilt dann auch am Ende der aktuellen Iter.



1. Fall: u war linkes Kind.
   $\Rightarrow$ u-Rang von v bleibt gleich.

2. Fall: u war rechtes Kind.



$\Rightarrow$ u-Rang von v erhöht sich um Größe des li. Teilbaums von u plus 1 (für u selbst).

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

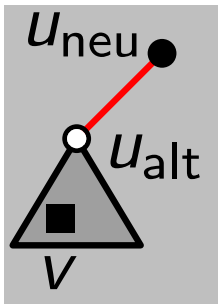
Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

1.) Initialisierung ✓

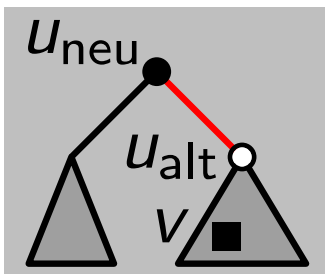
2.) Aufrechterhaltung ✓

Annahme: Inv. galt zu Beginn der aktuellen Iteration.
Zu zeigen: Inv. gilt dann auch am Ende der aktuellen Iter.



1. Fall: u war linkes Kind.
   $\Rightarrow$ u-Rang von v bleibt gleich.

2. Fall: u war rechtes Kind.



$\Rightarrow$ u-Rang von v erhöht sich um Größe des li. Teilbaums von u plus 1 (für u selbst).

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

1.) Initialisierung ✓

2.) Aufrechterhaltung ✓

3.) Terminierung

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

1.) Initialisierung ✓

2.) Aufrechterhaltung ✓

3.) Terminierung

Bei Schleifenabbruch: $u = root$.
$\Rightarrow r = u\text{-Rang}(v) = \text{Rang}(v)$.

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

1.) Initialisierung ✓

2.) Aufrechterhaltung ✓

3.) Terminierung ✓

Bei Schleifenabbruch: $u = root$.
$\Rightarrow r = u\text{-Rang}(v) = \text{Rang}(v)$.

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von Rank()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von v im Teilbaum mit Wurzel u.

u-Rang von v

1.) Initialisierung ✓

2.) Aufrechterhaltung ✓

3.) Terminierung ✓

Bei Schleifenabbruch: $u = root$.
$\Rightarrow r = u\text{-Rang}(v) = \text{Rang}(v)$.

Zusammenfassung:

Die Methode Rank() liefert wie gewünscht den Rang des übergebenen Knotens.

Rank(Node v):

```
r = v.left.size + 1
u = v
while u ≠ root do
    if u == u.p.right then
        r = r + u.p.left.size + 1
    u = u.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:

3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.

Für alle Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu z:

Erhöhe $v.size$ um 1.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:

3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

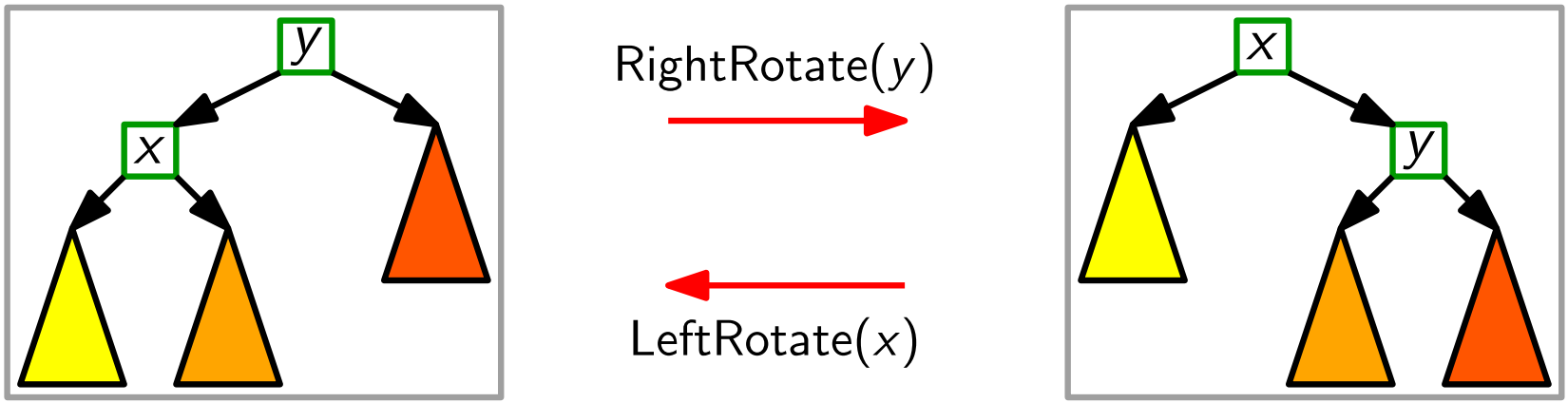
RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.

Für alle Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu z:

Erhöhe $v.size$ um 1.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:

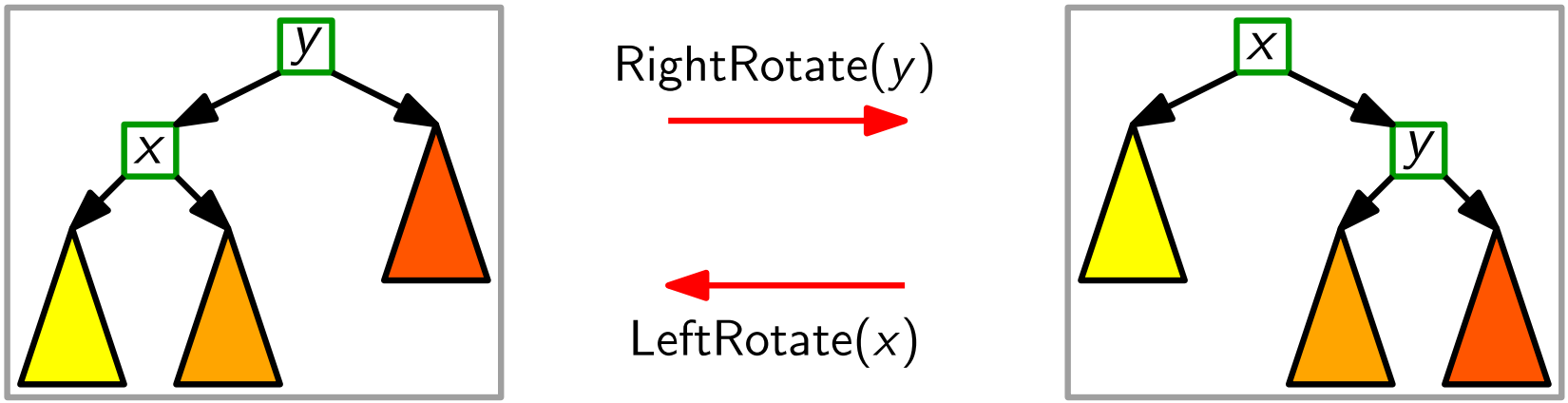


3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.
Für alle Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu z:
Erhöhe $v.size$ um 1.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:



Welche Befehle müssen wir an RightRotate(Node y) anhängen, damit nach der Rotation alle $size$-Einträge wieder stimmen?

$x.size =$

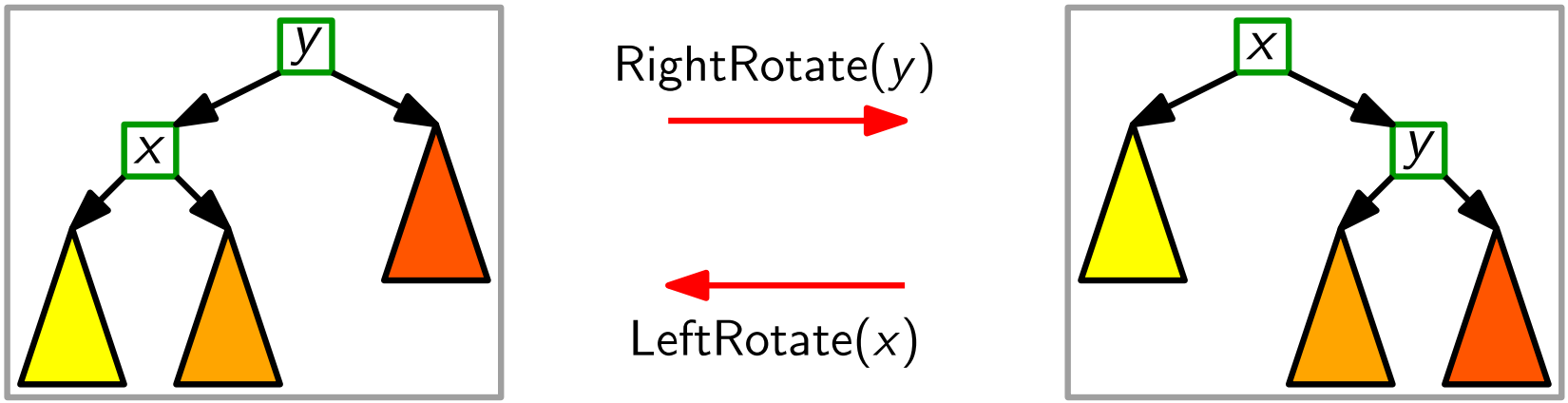
$y.size =$

3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.
Für alle Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu z:
Erhöhe $v.size$ um 1.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:



Welche Befehle müssen wir an RightRotate(Node y) anhängen, damit nach der Rotation alle $size$-Einträge wieder stimmen?

$x.size = y.size$

$y.size =$

3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

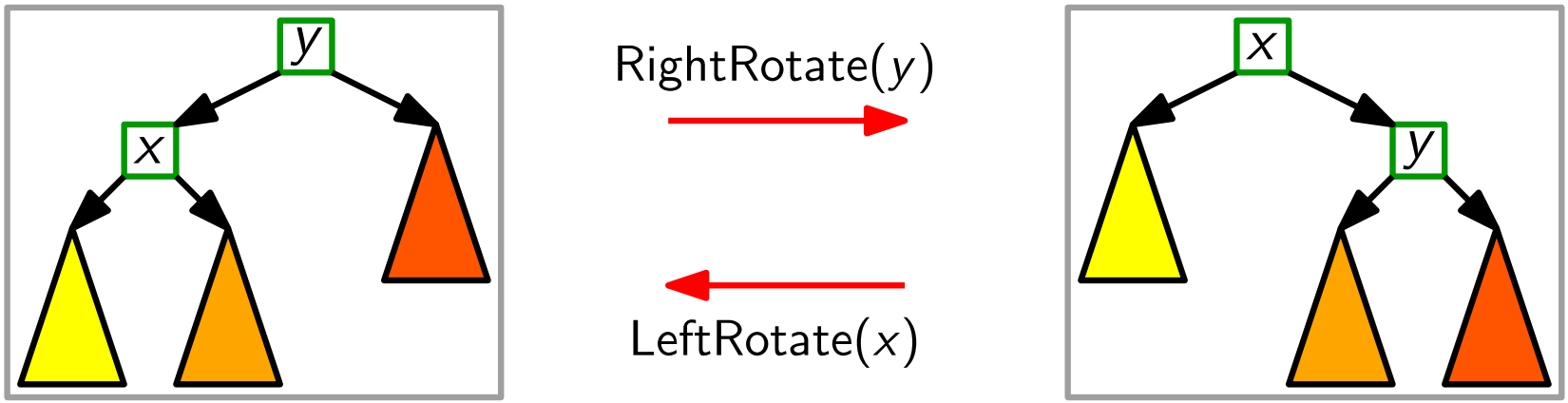
RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.

Für alle Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu z:

Erhöhe $v.size$ um 1.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:



Welche Befehle müssen wir an RightRotate(Node y) anhängen, damit nach der Rotation alle $size$-Einträge wieder stimmen?

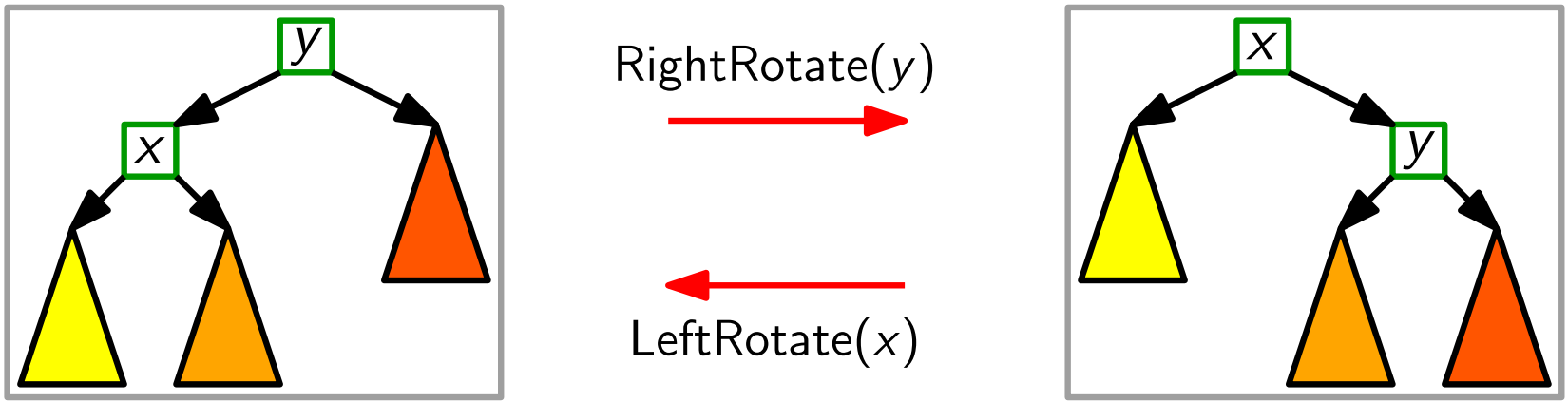
$$x.size = y.size$$
$$y.size = y.left.size + y.right.size + 1$$

3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.
Für alle Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu z:
Erhöhe $v.size$ um 1.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:



Welche Befehle müssen wir an RightRotate(Node y) anhängen, damit nach der Rotation alle $size$-Einträge wieder stimmen?

$$x.size = y.size$$
$$y.size = y.left.size + y.right.size + 1$$

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

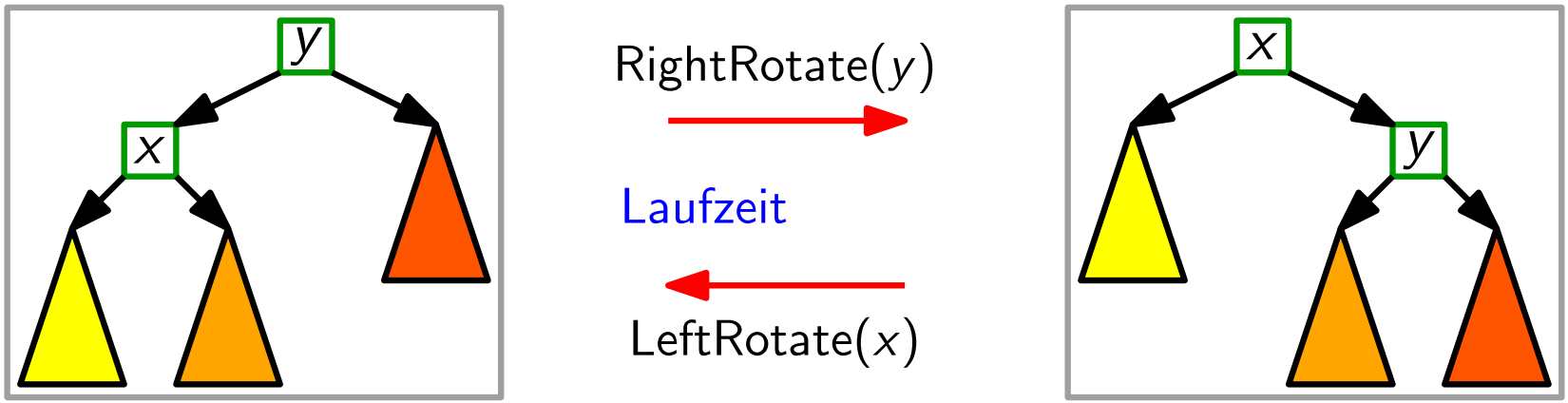
RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.

Für alle Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu z:

Erhöhe $v.size$ um 1.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:



Welche Befehle müssen wir an RightRotate(Node y) anhängen, damit nach der Rotation alle $size$-Einträge wieder stimmen?

$$x.size = y.size$$
$$y.size = y.left.size + y.right.size + 1$$

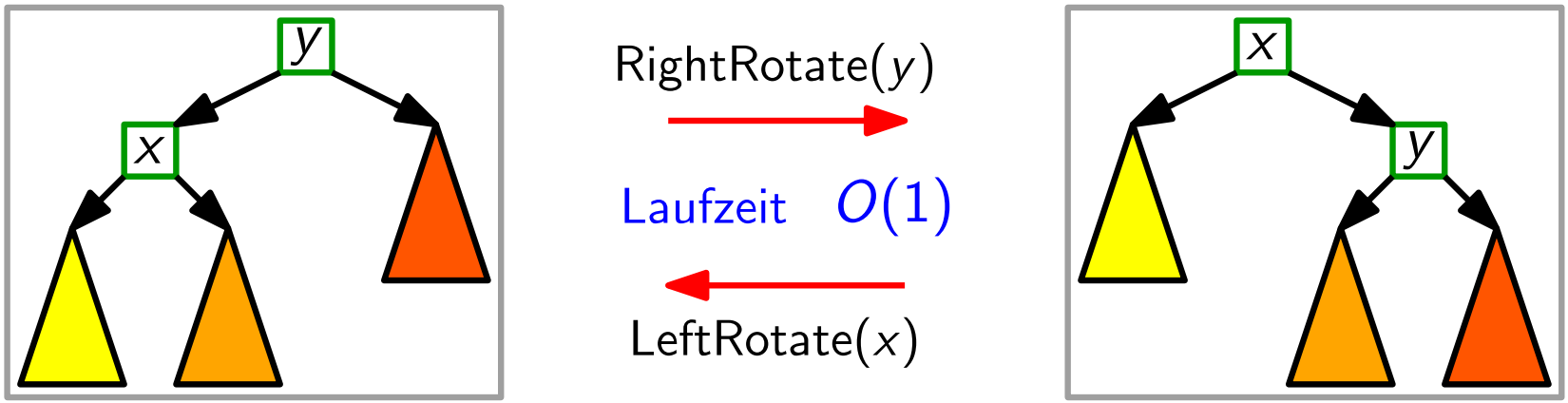
(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.
Für alle Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu z:
Erhöhe $v.size$ um 1.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:



Welche Befehle müssen wir an RightRotate(Node y) anhängen, damit nach der Rotation alle $size$-Einträge wieder stimmen?

$$x.size = y.size$$
$$y.size = y.left.size + y.right.size + 1$$

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

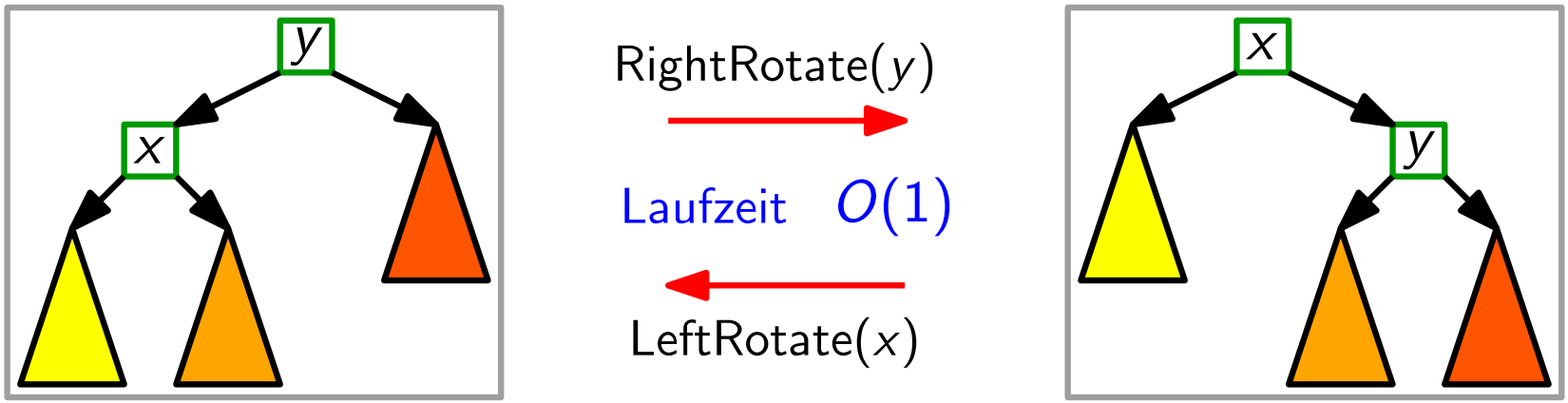
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.

Laufzeit { *Für alle Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu z:*
Erhöhe $v.size$ um 1.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:



Welche Befehle müssen wir an RightRotate(Node y) anhängen, damit nach der Rotation alle $size$-Einträge wieder stimmen?

$$x.size = y.size$$
$$y.size = y.left.size + y.right.size + 1$$

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

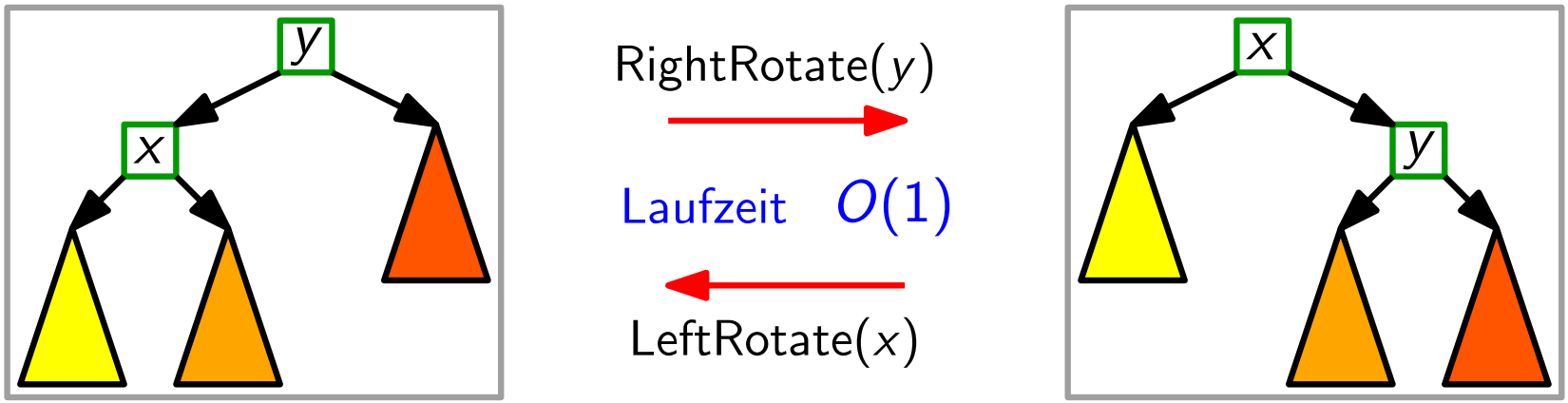
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.

Laufzeit $O(h)$ { *Für alle Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu z:*
Erhöhe $v.size$ um 1.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:



Welche Befehle müssen wir an RightRotate(Node y) anhängen, damit nach der Rotation alle $size$-Einträge wieder stimmen?

$$x.size = y.size$$
$$y.size = y.left.size + y.right.size + 1$$

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

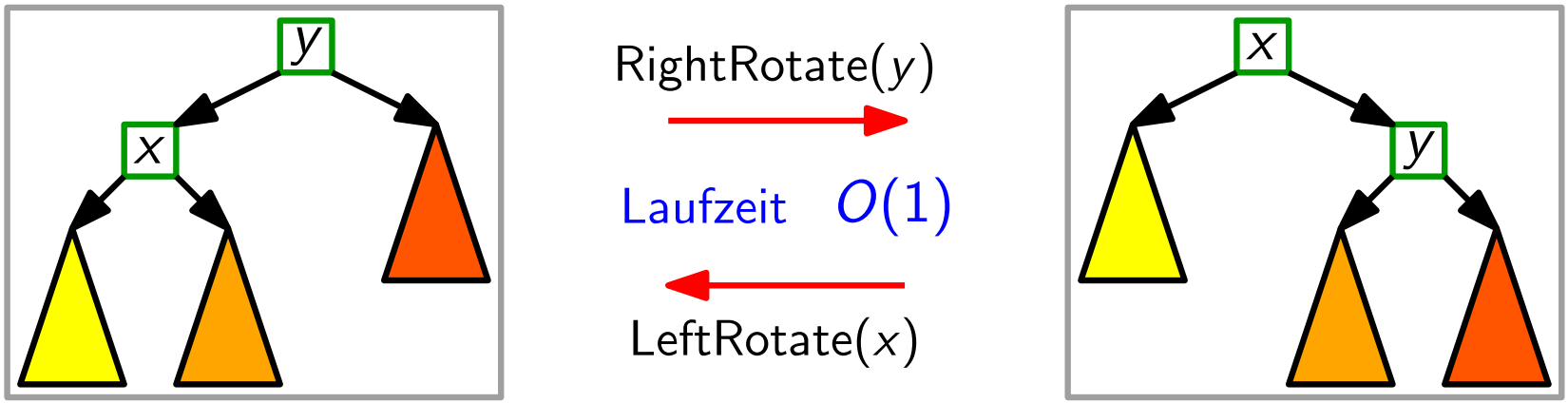
RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

zusätzliche Laufzeit fürs Einfügen:

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.

Laufzeit $O(h)$ { *Für alle Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu z:* Erhöhe $v.size$ um 1.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:



Welche Befehle müssen wir an RightRotate(Node y) anhängen, damit nach der Rotation alle $size$-Einträge wieder stimmen?

$$x.size = y.size$$
$$y.size = y.left.size + y.right.size + 1$$

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

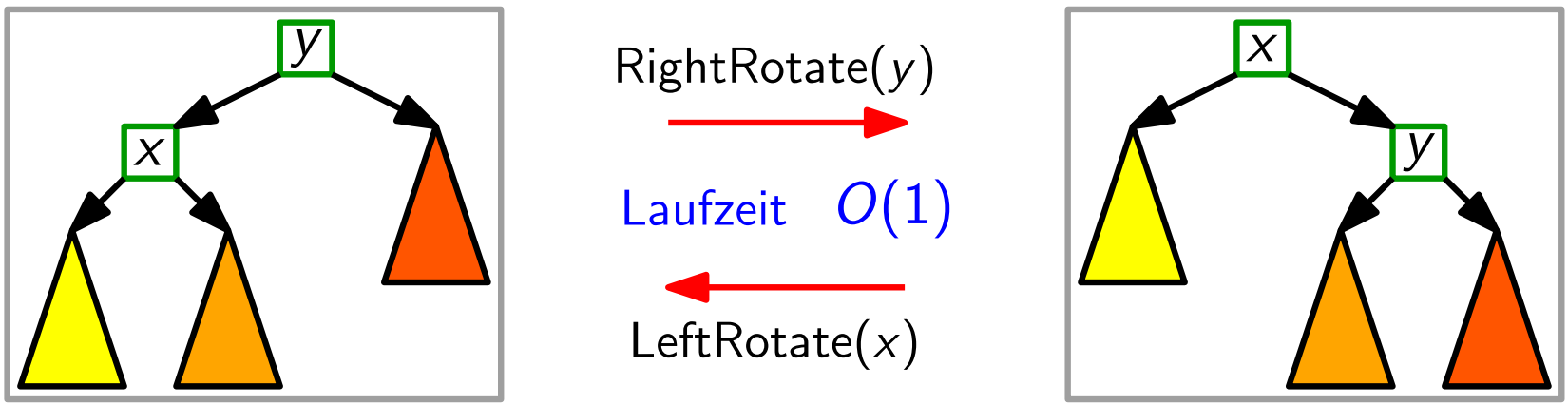
RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

zusätzliche Laufzeit fürs Einfügen: $O(h)$

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.

Laufzeit $O(h)$ { *Für alle Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu z:*
Erhöhe $v.size$ um 1.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:



Welche Befehle müssen wir an RightRotate(Node y) anhängen, damit nach der Rotation alle $size$-Einträge wieder stimmen?

$$x.size = y.size$$
$$y.size = y.left.size + y.right.size + 1$$

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

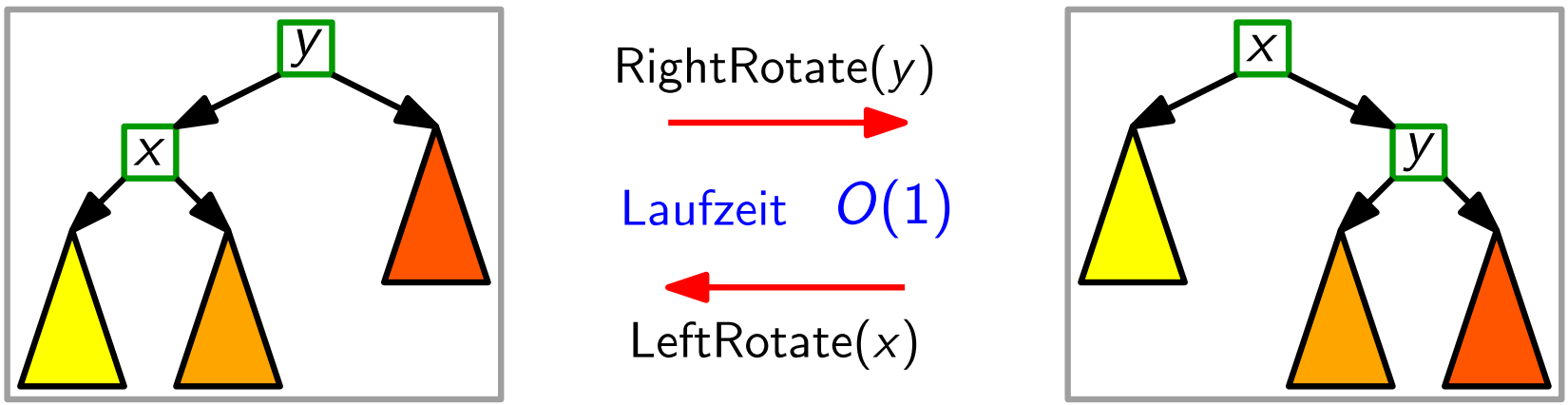
RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

zusätzliche Laufzeit fürs Einfügen: $O(h)$

Phase I: Suche der Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.

Laufzeit $O(h)$ { *Für alle Knoten v auf dem Weg von der Wurzel zu z:*
Erhöhe $v.size$ um 1.

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 *Rotationen*:



Welche Befehle müssen wir an RightRotate(Node y) anhängen, damit nach der Rotation alle $size$-Einträge wieder stimmen?

$$x.size = y.size$$
$$y.size = y.left.size + y.right.size + 1$$

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

RBDelete() kann man analog „upgraden“.

Ergebnis

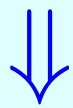
Satz. Das dynamische Auswahlproblem kann man so lösen, dass Select() und Rank() sowie alle gewöhnlichen Operationen für dynamische Mengen in einer Menge von n Elementen in $O(\log n)$ Zeit laufen.

Verallgemeinerung

Satz. Sei f Knotenattribut eines R-S-Baums mit n Knoten.

Falls für jeden Knoten v gilt:

$f(v)$ lässt sich in $O(1)$ Zeit aus Information in v, $v.left$, $v.right$ (inklusive $f(v.left/right)$) berechnen.



Verallgemeinerung

Satz. Sei f Knotenattribut eines R-S-Baums mit n Knoten.

Falls für jeden Knoten v gilt:

$f(v)$ lässt sich in $O(1)$ Zeit aus Information in v, $v.left$, $v.right$ (inklusive $f(v.left/right)$) berechnen.

$\Downarrow$

Dann kann man beim Einfügen und Löschen einzelner Knoten den Wert von f in allen Knoten aufrechterhalten, ohne die asymptotischen Laufzeit $O(\log n)$ der Update-Operationen zu verändern.

Verallgemeinerung

Satz. Sei f Knotenattribut eines R-S-Baums mit n Knoten.

Falls für jeden Knoten v gilt:

$f(v)$ lässt sich in $O(1)$ Zeit aus Information in v, $v.left$, $v.right$ (inklusive $f(v.left/right)$) berechnen.

$\Downarrow$

Dann kann man beim Einfügen und Löschen einzelner Knoten den Wert von f in allen Knoten aufrechterhalten, ohne die asymptotischen Laufzeit $O(\log n)$ der Update-Operationen zu verändern.

Beweisidee.

Verallgemeinerung

Satz. Sei f Knotenattribut eines R-S-Baums mit n Knoten.

Falls für jeden Knoten v gilt:

$f(v)$ lässt sich in $O(1)$ Zeit aus Information in v, $v.left$, $v.right$ (inklusive $f(v.left/right)$) berechnen.

$\Downarrow$

Dann kann man beim Einfügen und Löschen einzelner Knoten den Wert von f in allen Knoten aufrechterhalten, ohne die asymptotischen Laufzeit $O(\log n)$ der Update-Operationen zu verändern.

Beweisidee. Im Prinzip wie im Spezialfall $f \equiv size$.

Verallgemeinerung

Satz. Sei f Knotenattribut eines R-S-Baums mit n Knoten.

Falls für jeden Knoten v gilt:

$f(v)$ lässt sich in $O(1)$ Zeit aus Information in v, $v.left$, $v.right$ (inklusive $f(v.left/right)$) berechnen.

$\Downarrow$

Dann kann man beim Einfügen und Löschen einzelner Knoten den Wert von f in allen Knoten aufrechterhalten, ohne die asymptotischen Laufzeit $O(\log n)$ der Update-Operationen zu verändern.

Beweisidee. Im Prinzip wie im Spezialfall $f \equiv size$.

Allerdings ist es im Prinzip möglich, dass sich die Veränderungen von einem gewissen veränderten Knoten bis in die Wurzel hochpropagieren.

Verallgemeinerung

Satz. Sei f Knotenattribut eines R-S-Baums mit n Knoten.

Falls für jeden Knoten v gilt:

$f(v)$ lässt sich in $O(1)$ Zeit aus Information in v, $v.left$, $v.right$ (inklusive $f(v.left/right)$) berechnen.

$\Downarrow$

Dann kann man beim Einfügen und Löschen einzelner Knoten den Wert von f in allen Knoten aufrechterhalten, ohne die asymptotischen Laufzeit $O(\log n)$ der Update-Operationen zu verändern.

Beweisidee. Im Prinzip wie im Spezialfall $f \equiv size$.

Allerdings ist es im Prinzip möglich, dass sich die Veränderungen von einem gewissen veränderten Knoten bis in die Wurzel hochpropagieren. [Details Kapitel 14.2, CLRS]

Noch ein Beispiel

zur Augmentierung von Rot-Schwarz-Bäumen (Kapitel 14.3):

Intervall-Baum

Noch ein Beispiel

zur Augmentierung von Rot-Schwarz-Bäumen (Kapitel 14.3):

Intervall-Baum

verwaltet eine Menge M von Intervallen und bietet Operationen:

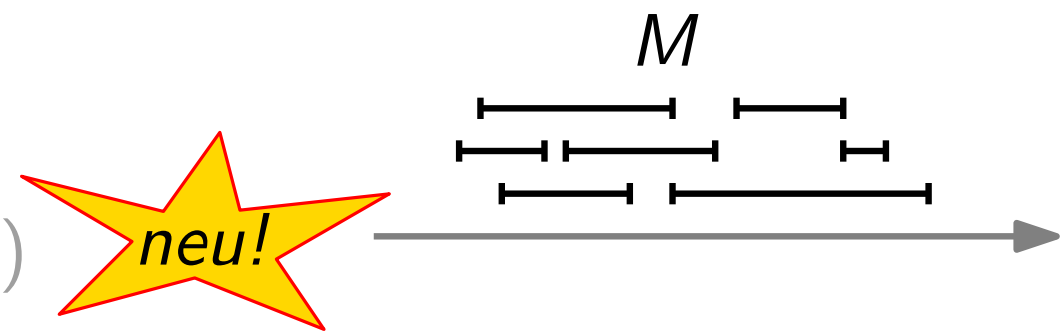
Noch ein Beispiel

zur Augmentierung von Rot-Schwarz-Bäumen (Kapitel 14.3):

Intervall-Baum

verwaltet eine Menge M von Intervallen und bietet Operationen:

- Element Insert(Interval i)
- Delete(Element e)
- Element Search(Interval i)



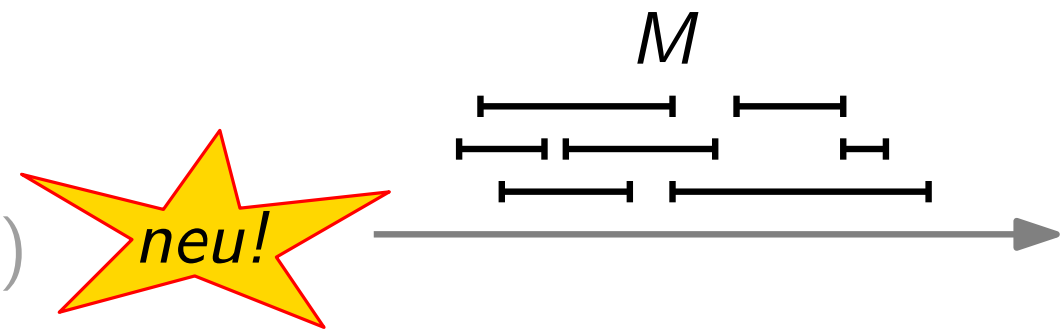
Noch ein Beispiel

zur Augmentierung von Rot-Schwarz-Bäumen (Kapitel 14.3):

Intervall-Baum

verwaltet eine Menge M von Intervallen und bietet Operationen:

- Element Insert(Interval i)
- Delete(Element e)
- Element Search(Interval i)



liefert ein Element mit Interval $i' \in M$ mit $i \cap i' \neq \emptyset$,
falls ein solches existiert, sonst nil.

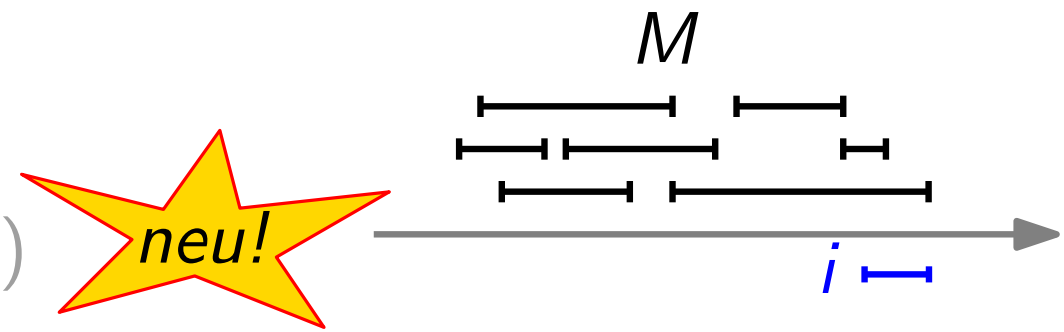
Noch ein Beispiel

zur Augmentierung von Rot-Schwarz-Bäumen (Kapitel 14.3):

Intervall-Baum

verwaltet eine Menge M von Intervallen und bietet Operationen:

- Element Insert(Interval i)
- Delete(Element e)
- Element Search(Interval i)



liefert ein Element mit Interval $i' \in M$ mit $i \cap i' \neq \emptyset$,
falls ein solches existiert, sonst nil.

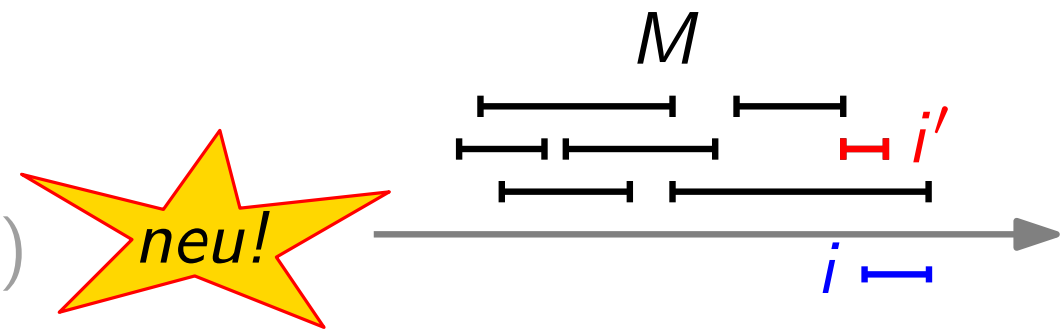
Noch ein Beispiel

zur Augmentierung von Rot-Schwarz-Bäumen (Kapitel 14.3):

Intervall-Baum

verwaltet eine Menge M von Intervallen und bietet Operationen:

- Element Insert(Interval i)
- Delete(Element e)
- Element Search(Interval i)



liefert ein Element mit Interval $i' \in M$ mit $i \cap i' \neq \emptyset$,
falls ein solches existiert, sonst nil.

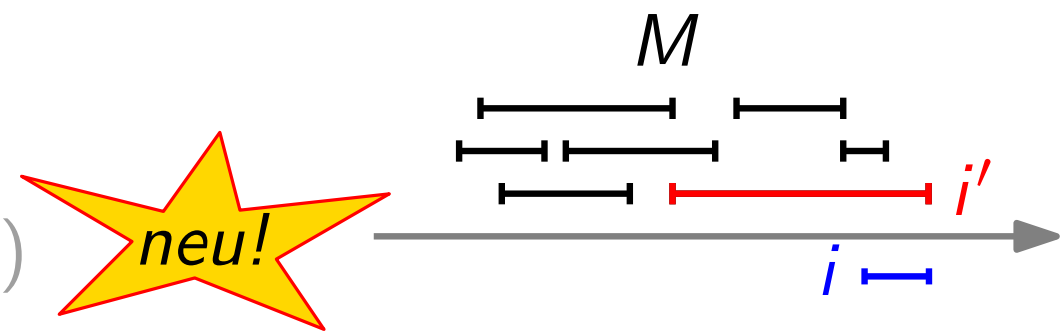
Noch ein Beispiel

zur Augmentierung von Rot-Schwarz-Bäumen (Kapitel 14.3):

Intervall-Baum

verwaltet eine Menge M von Intervallen und bietet Operationen:

- Element Insert(Interval i)
- Delete(Element e)
- Element Search(Interval i)



liefert ein Element mit Interval $i' \in M$ mit $i \cap i' \neq \emptyset$,
falls ein solches existiert, sonst nil.

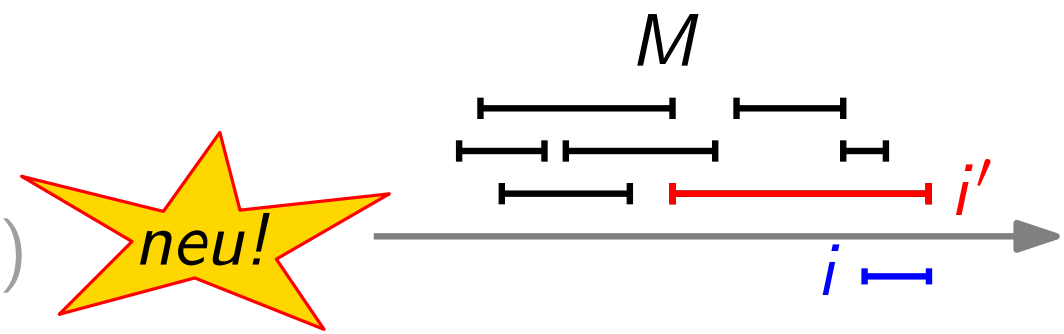
Noch ein Beispiel

zur Augmentierung von Rot-Schwarz-Bäumen (Kapitel 14.3):

Intervall-Baum

verwaltet eine Menge M von Intervallen und bietet Operationen:

- Element Insert(Interval i)
- Delete(Element e)
- Element Search(Interval i)



liefert ein Element mit Interval $i' \in M$ mit $i \cap i' \neq \emptyset$, falls ein solches existiert, sonst nil.

Bitte lesen Sie's und stellen Sie Fragen...