Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Lehrstuhl für INFORMATIK I Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2023/24

7. Vorlesung

Zufall!

Dr. Johannes Zink

Lehrstuhl für Informatik I

Inhaltsverzeichnis

- Ein Zufallsexperiment
- InsertionSort: erwartete bzw. Durchschnittslaufzeit
- Das Geburtstagsparadoxon

Ein Experiment

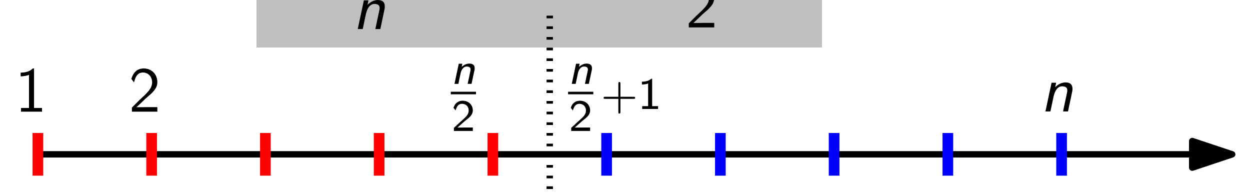
Ein Franke und ein Münchner gehen (unabhängig voneinander) n mal in verschiedenen Restaurants essen und benoten nach jedem Besuch ihr Essen.

Der Franke ist zufrieden, wenn er überdurchschnittlich gut isst, d. h. wenn seine aktuelle Note über dem Mittel liegt.

Der Münchner ist zufrieden, wenn er besser isst als er jemals vorher gegessen hat.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Wer is(s)t zufriedener?



Das Kleingedruckte:

Die Reihenfolge der Restaurants ist *zufällig*. Beide Gourmets müssen ihr Essen mit einer Zahl zwischen 1 (= sehr schlecht) und n (= sehr gut) bewerten und dürfen jede Zahl nur einmal vergeben. Die Zahl n sei gerade. Der Münchner ist beim ersten Essen zufrieden.

Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$.

Sei S_n die Menge all dieser Permutationen. $\Rightarrow$ $|S_n| = n!$

Ergebnismenge Ω *Beobachtungsmenge Ω'*

Sei $M\colon S_n \to \{1, \ldots, n\}$ eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

Uns interessiert der erwartete Wert von M, kurz: der *Erwartungswert* $\mathbf{E}[M]$ von M.

Definition: $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$ (Def. für *diskrete* ZV)

„gewichtetes Mittel“ der Werte in Ω'

Es gilt: $\sum_{i \in \Omega'} \mathbf{Pr}[M = i] = \mathbf{1}$

Problem: Was ist $\mathbf{Pr}[M = 7]$??

Ein Trick

Definition: $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für $i = 1, \ldots, n$):

Sei $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i\text{. Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \overset{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

Beispiel: Zahlenfolge $= (7, 2, 8, 5, \overset{i}{9}, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[M_i = 1] =$ WK, dass i. Zahl die bisher größte ist

$= \dfrac{\text{Anz. der „guten" Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$

Voraussetzung: Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich!

$= \dfrac{\text{Anz. Perm., bei denen } i\text{. Zahl am größten}}{\text{Anz. aller Permutationen von } i \text{ Zahlen}} = \dfrac{(i-1)!}{i!} = \dfrac{1}{i}$

Ein Trick

Definition: $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für $i = 1, \ldots, n$):

Sei $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i\text{. Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow\ \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1]\ = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

Beispiel: Zahlenfolge $= (7, 2, 8, 5, \overset{i}{9}, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[F_i = 1] =$ WK, dass i. Zahl größer als $\frac{n+1}{2}$ ist

$$= \frac{\text{Anz. der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$$

$$= \frac{\text{Anz. Perm., bei denen } i\text{. Zahl} > n/2}{\text{Anz. aller Permutationen von } n \text{ Zahlen}} = \frac{(n-1)! \cdot \frac{n}{2}}{n!} = \frac{1}{2}$$

Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i\text{. Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

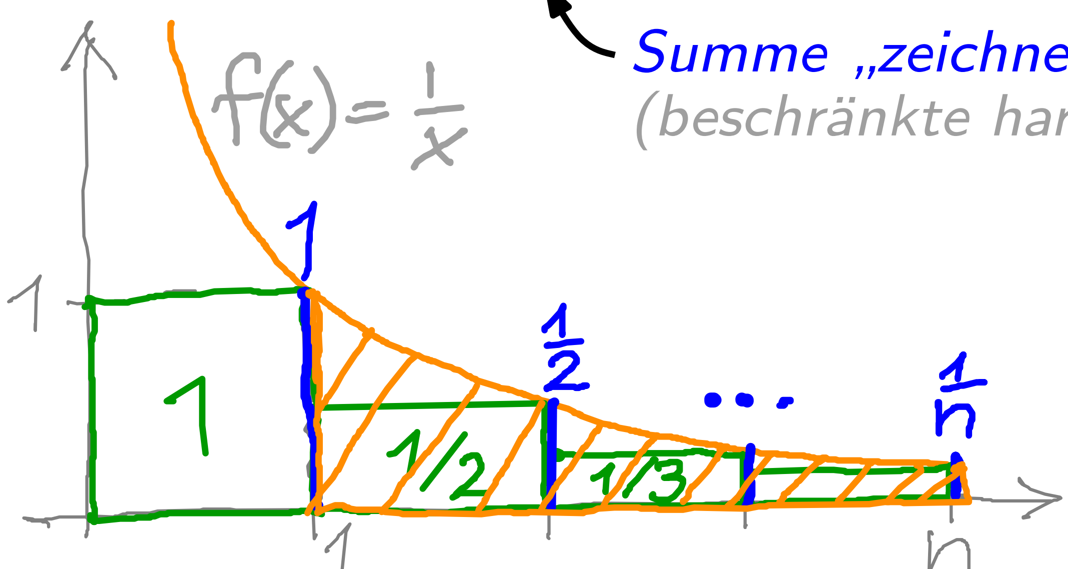
$\Rightarrow \quad M = \sum_{i=1}^{n} M_i$ (Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.)

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\textstyle\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

Linearität des Erwartungswerts *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \left(\ln x \Big|_1^n\right) = 1 + \ln n$$

Summe „zeichnen"!
(beschränkte harmonische Reihe)



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i\text{. Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Rightarrow \; M = \sum_{i=1}^{n} M_i$ (Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.)

$$\Rightarrow \; \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\textstyle\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

Linearität des Erwartungswerts *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \left(\ln x \Big|_1^n\right) = \boxed{1 + \ln n}$$

Summe „zeichnen"!
(beschränkte harmonische Reihe)

Entsprechend...

$$\mathbf{E}[F] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Pr}[F_i = 1] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \boxed{\frac{n}{2}}$$

M.a.W.: man kann erwarten,
dass der Franke *exponentiell zufriedener* ist als der Münchner!

;-)

Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

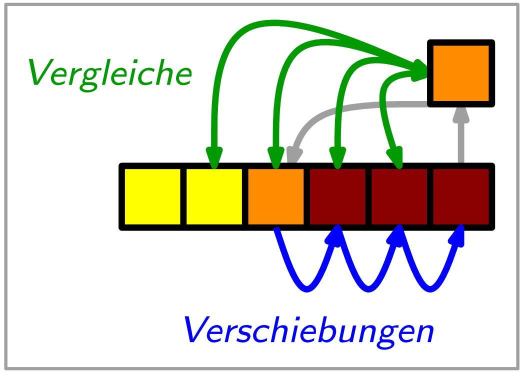
Beob. Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

Hier: Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe $A[1..n]$ (für festes n)?

Einfacher: Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$?

Wissen: $n - 1 \;\leq\; V_{\mathrm{IS}}(n) \;\leq\; n(n-1)/2$

Beob. Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen T_{IS} zählen, denn



wenn wir **ein** Element einfügen (innere Schleife von InsertionSort), gilt:

$\#$ Verschiebungen $\leq$ $\#$ Vergleiche $\leq$ $\#$ Verschiebungen $+1$

Also **insgesamt:** $T_{\mathrm{IS}} \;\leq\; V_{\mathrm{IS}} \;\leq\; T_{\mathrm{IS}} + (n-1)$.

Average-Case-Laufzeit vs. erwartete Laufzeit

Beob. Statt der durchschnittlichen Laufzeit über alle Permutationen können wir auch die *erwartete* Laufzeit einer zufälligen Permutation betrachten.

Warum?

Betrachte Definition:

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{i=0}^{n^2} \boxed{i} \cdot \boxed{\mathbf{Pr}[T = i]}$$

hier: # Verschiebungen (d.h. Laufzeit) — *Anteil* der Permutationen, die i Verschiebungen verursachen.

Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T :=$ Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation $A[1..n]$ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$ zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um T auszudrücken?

$$T_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{array} \right\} \text{ für } 1 \le i < j \le n.$$

$\Rightarrow \; T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} =$ Anz. Pos., um die $A[j]$ n. li. verschoben wird.

$\Rightarrow \; T = \sum_{j=2}^{n} T_j = \sum \sum T_{ij}$ und $\mathbf{E}[T] = \sum \sum \mathbf{E}[T_{ij}]$

Aber was ist $\mathbf{E}[T_{ij}]$**?** Laut Def. $\mathbf{E}[T_{ij}] = \mathbf{Pr}[T_{ij} = 1] = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \; \mathbf{E}[T] = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{E}[T_{ij}] = \sum_{j=2}^{n} \frac{j-1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{4} \qquad \square$$

Zusammenfassung InsertionSort

Satz. [alt]

Im *besten Fall* benötigt InsertionSort $n - 1 \in \Theta(n)$ Vergleiche und 0 Verschiebungen.

Im *schlechtesten Fall* benötigt InsertionSort $n(n-1)/2 \in \Theta(n^2)$ Vergleiche/Verschiebungen.

Satz. [neu]

Im *Durchschnitt* benötigt InsertionSort $n(n-1)/4 \in \Theta(n^2)$ Verschiebungen und zwischen $n(n-1)/4$ und $n(n-1)/4 + (n-1)$, d.h. $\Theta(n^2)$, Vergleiche.

Kurz: Bei InsertionSort gilt

Average Case $=_{\text{asymptotisch}}$ Worst Case!

Geburtstagswahrscheinlichkeiten

Frage: Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass mindestens zwei Leute hier im Hörsaal am gleichen Tag Geburtstag haben? [siehe Abschnitt 5.4, CLRS]

Frage′: Wie groß ist der *Erwartungswert* für die Anzahl X von Paaren von Leuten hier im Hörsaal, die am gleichen Tag Geburtstag haben?

Was wäre eine gute Indikatorvariable, um X auszudrücken?

$$X_{ij} := \left.\begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ und } j \text{ gleichen Geburtstag haben} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}\right\} \text{für } 1 \le i < j \le k;\ k = \text{Anz. Leute}$$

Dann gilt $X = \sum_{1 \le i < j \le k} X_{ij} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} X_{ij}$.

Geburtstagserwartungen

Geburtstag von Person j

Es gilt: $$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \text{ und } X = \sum_{1 \le i < j \le k} X_{ij}.$$

Annahme: Alle n Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^{n} \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

(Geht auch einfacher!)

Gesucht: $$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}\left[\sum_{1 \le i < j \le k} X_{ij}\right] = \sum_{1 \le i < j \le k} \mathbf{E}[X_{ij}] =$$

Linearität des Erwartungswerts!

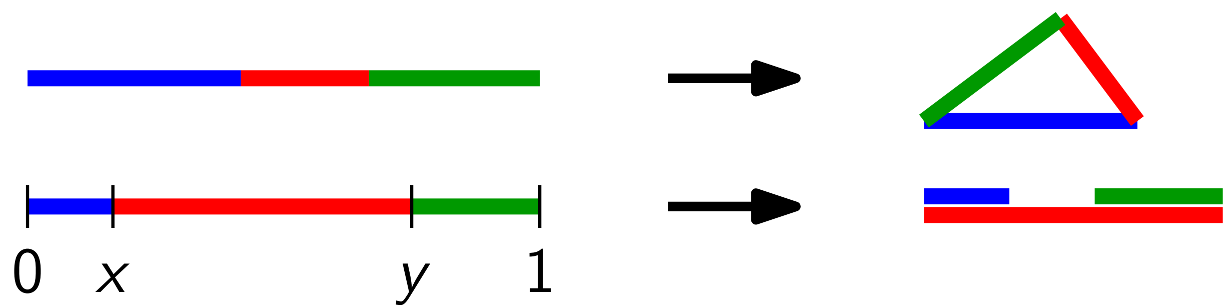
$$= \binom{k}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{k(k-1)}{2n} \ge 1 \Leftrightarrow k(k-1) \ge 2n.$$

Für ein Jahr mit $n = 365$ Tagen braucht man also nur $k \ge 28$ Personen um ein Pärchen mit gleichem Geburtstag erwarten zu können. $\square$

Bonustrack (Nur eine Frage, keine Antwort!)

Angenommen, Sie haben einen Stock der Länge 1 und zerbrechen ihn an zwei zufällig gewählten Stellen $x \in [0,1]$ und $y \in [0,1]$. (Die ZV x & y sind also *nicht* diskret!)

Was ist die Wahrscheinlichkeit,
dass Sie aus den drei Teilen ein Dreieck legen können?



Mit anderen Worten – was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\max\{x, y - x, 1 - y\} < 1/2$?

Tipp: Betrachten Sie das Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$.