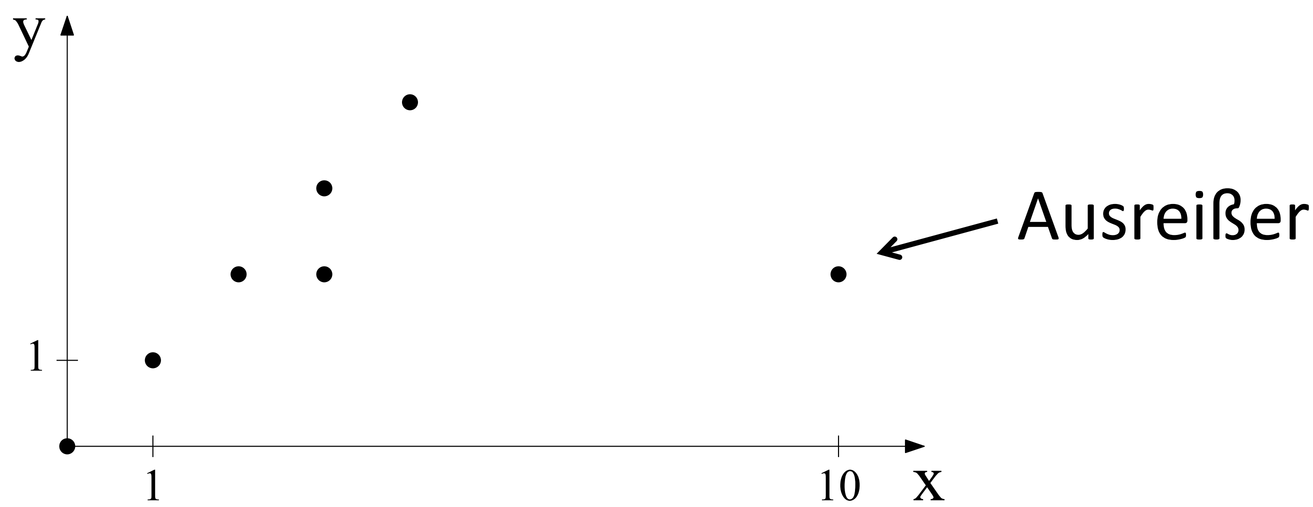
Algorithmen für geographische Informationssysteme

Ausgleichung mit Ausreißern

11. Vorlesung

Alexander Wolff

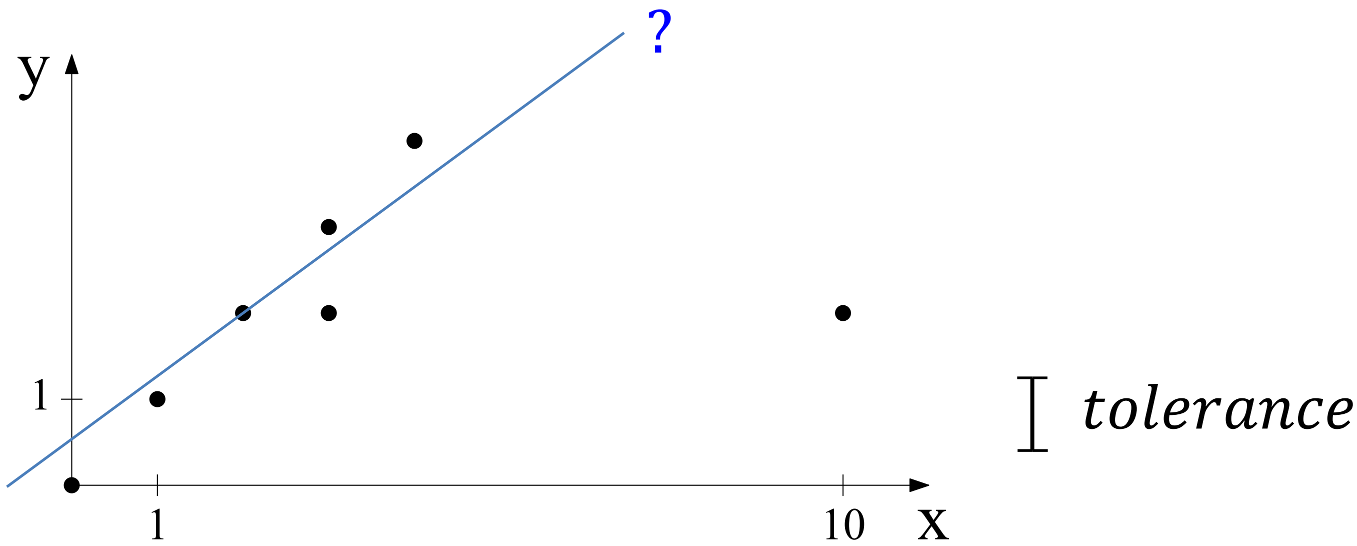
Ausgleichung mit Ausreißertest (bis ca. 1981)



Problem: berechne Ausgleichsgerade ***ohne*** Ausreißer

Ansatz: Finde Ausreißer ***nach*** Ausgleichung,
dann wiederhole Ausgleichung

Ausgleichung mit Ausreißertest (bis ca. 1981)



Algorithmus:

do

g = Ausgleichsgrade für Menge P

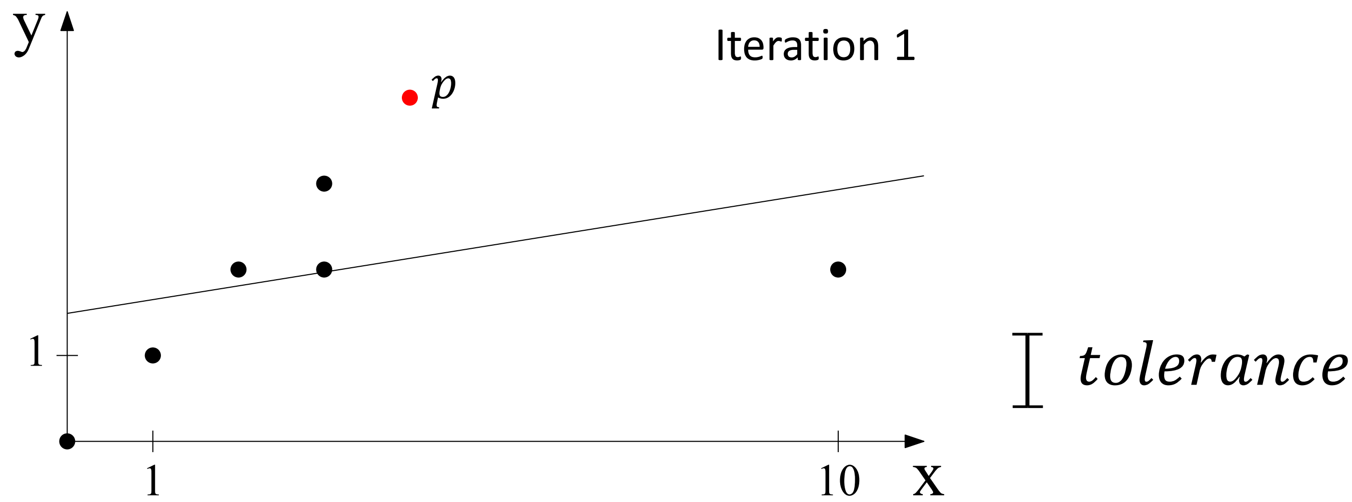
identifiziere Punkt $p \in P$ mit größter Verbesserung v

if $v > tolerance$ **then** $P = P \setminus \{p\}$

while ($v > tolerance$)

return g

Ausgleichung mit Ausreißertest (bis ca. 1981)



Algorithmus:

do

$g =$ Ausgleichsgrade für Menge P

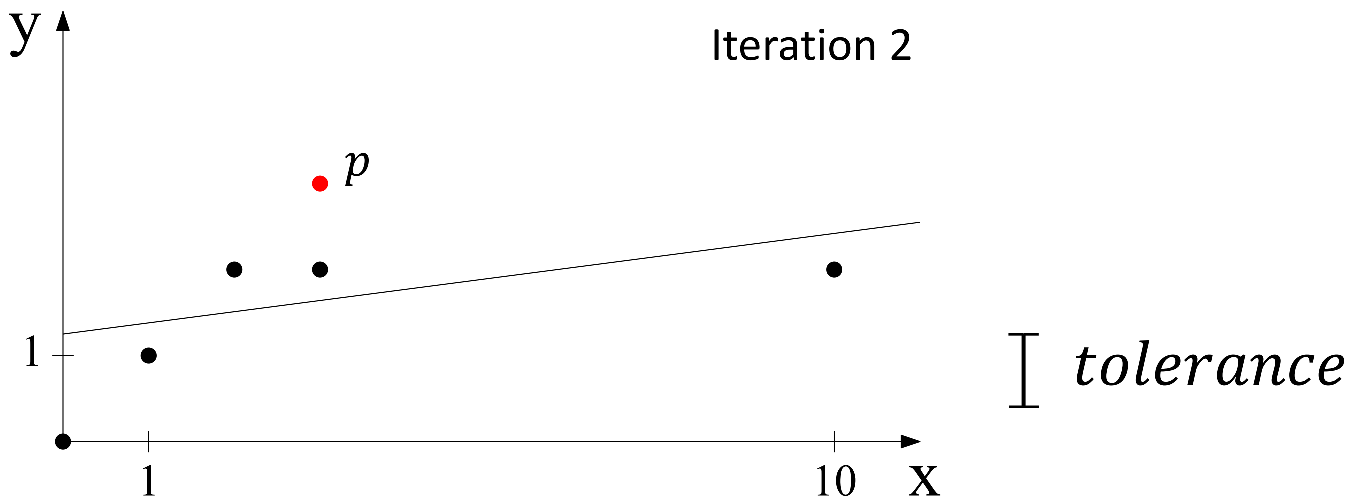
identifiziere Punkt $p \in P$ mit größter Verbesserung v

if $v > tolerance$ **then** $P = P \setminus \{p\}$

while $(v > tolerance)$

return g

Ausgleichung mit Ausreißertest (bis ca. 1981)



Algorithmus:

do

$g =$ Ausgleichsgrade für Menge P

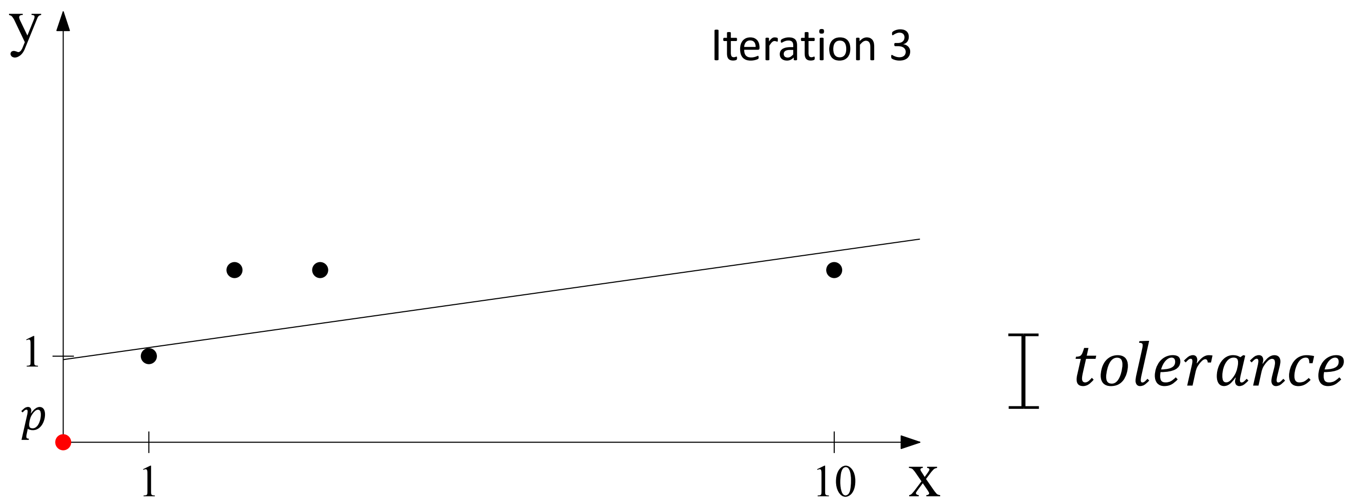
identifiziere Punkt $p \in P$ mit größter Verbesserung v

if $v > tolerance$ **then** $P = P \setminus \{p\}$

while $(v > tolerance)$

return g

Ausgleichung mit Ausreißertest (bis ca. 1981)



Algorithmus:

do

$g =$ Ausgleichsgrade für Menge P

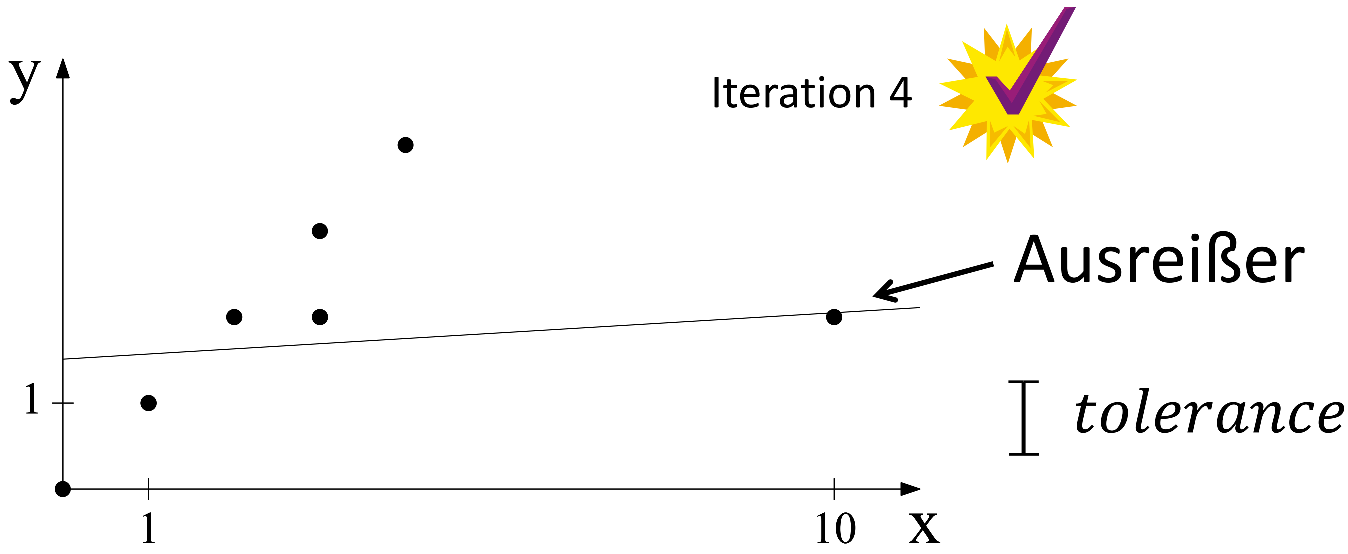
identifiziere Punkt $p \in P$ mit größter Verbesserung v

if $v > tolerance$ **then** $P = P \setminus \{p\}$

while $(v > tolerance)$

return g

Ausgleichung mit Ausreißertest (bis ca. 1981)



Algorithmus:

do

$g =$ Ausgleichsgrade für Menge P

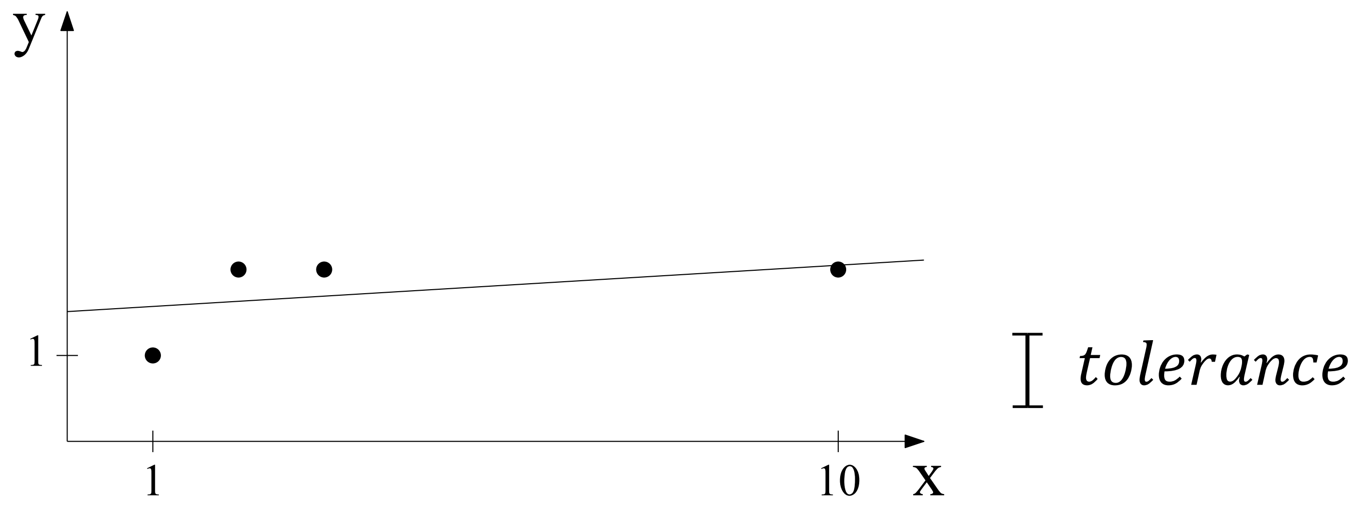
identifiziere Punkt $p \in P$ mit größter Verbesserung v

if $v > tolerance$ **then** $P = P \setminus \{p\}$

while $(v > tolerance)$

return g

Ausgleichung mit Ausreißertest (bis ca. 1981)



→ **Ein einzelner Ausreißer genügt,**
um Ergebnis extrem zu verfälschen

Ein (nicht mehr ganz) neuer Ansatz

M. A. Fischler & R. C. Bolles (1981):

> ***Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography.***
>
> **Communications of the ACM, 24(6):381–395.**

Ein (nicht mehr ganz) neuer Ansatz

M. A. Fischler & R. C. Bolles (1981):

Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography.

Communications of the ACM, 24(6):381–395.

= RANSAC

31000 citations! (Google scholar)

Grundidee

- Verwende ***so wenige Punkte wie nötig***,
  um Gerade zu instanziieren (→ **Hypothese**)
- Verifiziere Hypothese anhand übriger Punkte (→ **Consensus Set**)
- Berechne Ausgleichsgerade für Consensus Set

Generiere hinreichend viele Hypothesen!

Grundidee

- Verwende ***zwei* Punkte** (p_1 und p_2), um Gerade zu instanziieren (→ **Hypothese**)
- Verifiziere Hypothese anhand übriger Punkte (→ **Consensus Set**)
- Berechne Ausgleichsgerade für Consensus Set

Generiere hinreichend viele Hypothesen!

Grundidee

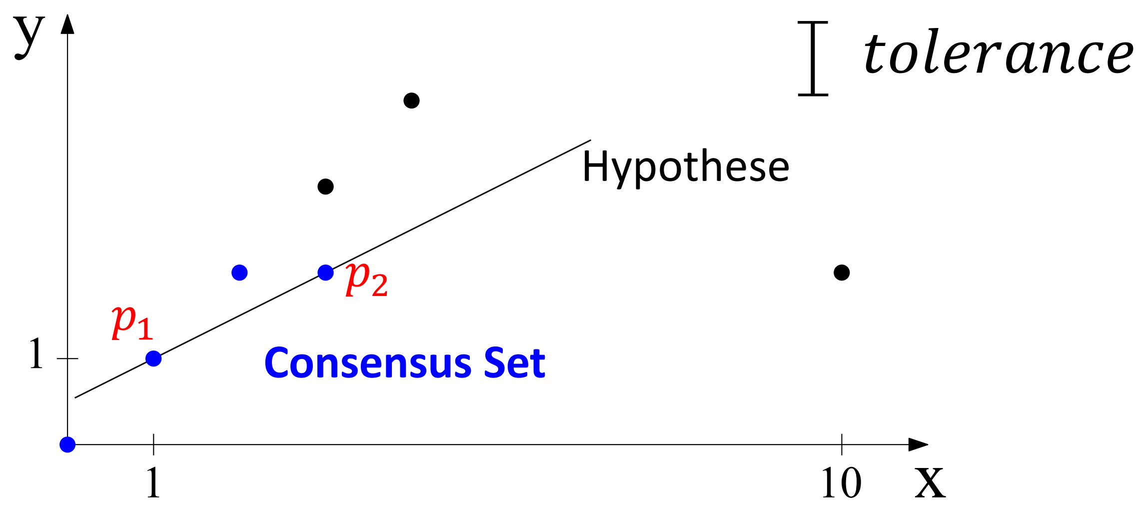
- Verwende ***zwei* Punkte** (p_1 und p_2),
  um Gerade zu instanziieren (**→ Hypothese**)
- Verifiziere Hypothese anhand übriger Punkte (**→ Consensus Set**)
- Berechne Ausgleichsgerade für Consensus Set

Generiere hinreichend viele Hypothesen! **Durch Zufall**

Grundidee

- Verwende ***zwei* Punkte** (p_1 und p_2), um Gerade zu instanziieren (→ **Hypothese**)
- Verifiziere Hypothese anhand übriger Punkte (→ **Consensus Set**)
- Berechne Ausgleichsgerade für Consensus Set

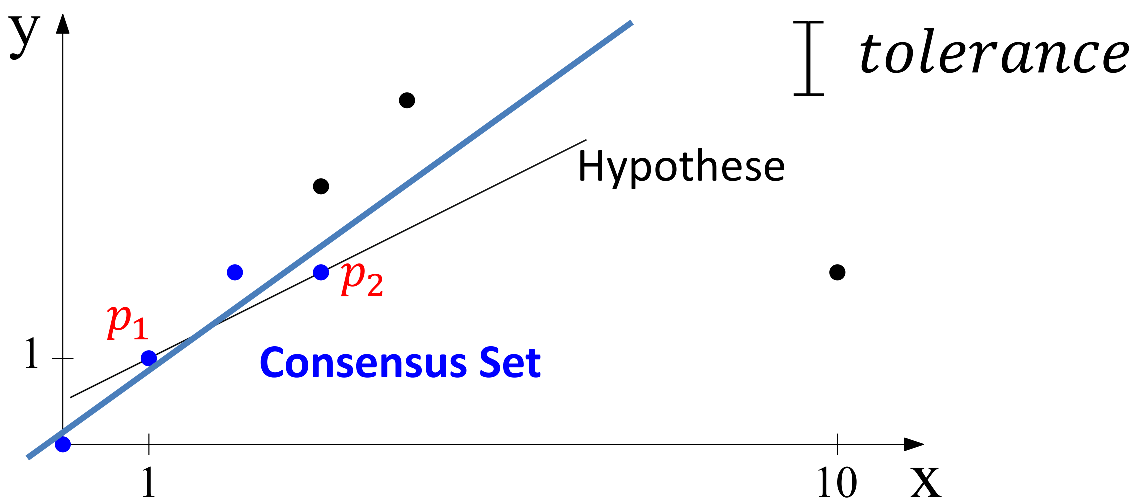
Generiere hinreichend viele Hypothesen! **Durch Zufall**



Grundidee

- Verwende ***zwei Punkte*** (p_1 und p_2) um Gerade zu instanziieren (→ **Hypothese**)
- Verifiziere Hypothese anhand übriger Punkte (→ **Consensus Set**)
- Berechne Ausgleichsgerade für Consensus Set

Generiere hinreichend viele Hypothesen! **Durch Zufall**



Algorithmus

for $i = 1$ **to** k **do**

Steuerparameter:

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Algorithmus

for $i = 1$ **to** k **do**

instanziiere Gerade g_i durch Menge S_i zufällig gewählter Punkte aus P

Steuerparameter:

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute" Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Algorithmus

for $i = 1$ **to** k **do**

instanziiere Gerade g_i durch Menge S_i zufällig gewählter Punkte aus P

finde Consensus Set $S_i^* = \{p \in P \mid \text{Abstand von } p \text{ nach } g_i < tolerance\}$

Steuerparameter:

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Algorithmus

for $i = 1$ **to** k **do**

instanziiere Gerade g_i durch Menge S_i zufällig gewählter Punkte aus P

finde Consensus Set $S_i^* = \{p \in P$ | Abstand von p nach $g_i < tolerance\}$

if $|S_i^*| \geq t$ **then**

Steuerparameter:

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute" Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Algorithmus

for $i = 1$ **to** k **do**

instanziiere Gerade g_i durch Menge S_i zufällig gewählter Punkte aus P

finde Consensus Set $S_i^* = \{p \in P \mid \text{Abstand von } p \text{ nach } g_i < tolerance\}$

if $|S_i^*| \geq t$ **then**

$g_i^* =$ Ausgleichsgerade für S_i^*

return g_i^*

Steuerparameter:

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Algorithmus

for $i = 1$ **to** k **do**

  instanziiere Gerade g_i durch Menge S_i zufällig gewählter Punkte aus P

  finde Consensus Set $S_i^* = \{p \in P \mid \text{Abstand von } p \text{ nach } g_i < tolerance\}$

  if $|S_i^*| \geq t$ **then**

    $g_i^* =$ Ausgleichsgerade für S_i^*

    return g_i^*

return nil // kein Erfolg!

Steuerparameter:

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute" Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Verallgemeinerung

for $i = 1$ **to** k **do**

  instanziiere Modell M_i durch Menge S_i zufällig gewählter Punkte aus P

  finde Consensus Set $S_i^* = \{p \in P \mid \text{Abstand von } p \text{ nach } M_i < tolerance\}$

  if $|S_i^*| \geq t$ **then**

    M_i^* = am besten passendes Modell zu S_i^*

    return M_i^*

return nil // kein Erfolg!

Modell enthält Parameter, die zu schätzen sind, z.B. Mittelpunkt und Radius von Kreis.

Steuerparameter:

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Verallgemeinerung

$|S_i| = n$ **immer so klein wie möglich!**

for $i = 1$ **to** k **do**

  instanziiere Modell M_i durch Menge S_i zufällig gewählter Punkte aus P

  finde Consensus Set $S_i^* = \{p \in P \mid \text{Abstand von } p \text{ nach } M_i < tolerance\}$

  if $|S_i^*| \geq t$ **then**

    M_i^* = am besten passendes Modell zu S_i^*

    return M_i^*

return nil // kein Erfolg!

Modell enthält Parameter, die zu schätzen sind, z.B. Mittelpunkt und Radius von Kreis

Steuerparameter:

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Variante

for $i = 1$ **to** k **do**

instanziiere Modell M_i durch Menge S_i zufällig gewählter Punkte aus P

finde Consensus Set $S_i^* = \{p \in P \mid \text{Abstand von } p \text{ nach } M_i < tolerance\}$

if $|S_i^*| \geq t$ **then**

M_i^* = am besten passendes Modell zu S_i^*

finde neuen Consensus Set für M_i^*

return am besten passendes Modell für neuen Consensus Set

return nil // kein Erfolg!

Steuerparameter:

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Wahl der Steuerparameter

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Wahl der Steuerparameter

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Empfehlung:

$2\sigma \leq tolerance \leq 3\sigma$

mit $\sigma =$ Standardabweichung einer (Koordinaten-)Messung

Wahl der Steuerparameter

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w, dass beliebiger Punkt ein Inlier ist, ist bekannt.

Ansatz:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert,
um n Inlier zu erwischen?

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert,
um n Inlier zu erwischen?

$$E(k) =$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert, um n Inlier zu erwischen?

$$E(k) = \qquad \text{mit } b = w^n$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert, um n Inlier zu erwischen?

$$E(k) = b + 2(1-b)b + 3(1-b)^2 b + \ \dots \qquad \text{mit } b = w^n$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert, um n Inlier zu erwischen?

$$E(k) = b + 2(1-b)b + 3(1-b)^2 b + \ \dots$$

mit $b = w^n$

drei Versuche nötig

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert, um n Inlier zu erwischen?

$$E(k) = b + 2(1-b)b + 3(1-b)^2 b + \ \ldots \qquad \text{mit } b = w^n$$

<u>drei</u> Versuche nötig

Wahrscheinlichkeit, dass dritter Versuch erfolgreich

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert, um n Inlier zu erwischen?

$$E(k) = b + 2(1-b)b + 3(1-b)^2 b + \ \ldots \qquad \text{mit } b = w^n$$

drei Versuche nötig

Wahrscheinlichkeit, dass zuvor zwei Versuche erfolglos

Wahrscheinlichkeit, dass dritter Versuch erfolgreich

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert, um n Inlier zu erwischen?

$$E(k) = b + 2(1-b)b + 3(1-b)^2 b + \ \dots$$

mit $b = w^n$

$$= b(1 + 2a + 3a^2 + \ \dots)$$

mit $a = 1 - b$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert, um n Inlier zu erwischen?

$$E(k) = b + 2(1-b)b + 3(1-b)^2 b + \ \ldots$$

mit $b = w^n$

$$= b(1 + 2a + 3a^2 + \ \ldots)$$

mit $a = 1 - b$

?

Geometrische Reihe:

$$a + a^2 + a^3 + \ \ldots = \frac{a}{1-a}$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert, um n Inlier zu erwischen?

$$E(k) = b + 2(1-b)b + 3(1-b)^2 b + \ \dots \qquad \text{mit } b = w^n$$

$$= b(1 + 2a + 3a^2 + \ \dots) \qquad \text{mit } a = 1 - b$$

Geometrische Reihe:

$$a + a^2 + a^3 + \ \dots = \frac{a}{1-a} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Ableiten (mit Quotientenregel)}} 1 + 2a + 3a^2 + \ \dots = \frac{1}{(1-a)^2}$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert, um n Inlier zu erwischen?

$$E(k) = b + 2(1-b)b + 3(1-b)^2 b + \ \dots \qquad \text{mit } b = w^n$$

$$= b(1 + 2a + 3a^2 + \ \dots) \qquad \text{mit } a = 1 - b$$

$$= \frac{b}{(1-a)^2}$$

Geometrische Reihe:

$$a + a^2 + a^3 + \ \dots = \frac{a}{1-a} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Ableiten (mit Quotientenregel)}} 1 + 2a + 3a^2 + \ \dots = \frac{1}{(1-a)^2}$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert, um n Inlier zu erwischen?

$$E(k) = b + 2(1-b)b + 3(1-b)^2 b + \ \dots$$

mit $b = w^n$

$$= b(1 + 2a + 3a^2 + \ \dots)$$

mit $\boldsymbol{a = 1 - b}$

$$= \frac{b}{(1-a)^2} = \frac{1}{b}$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert, um n Inlier zu erwischen?

$$E(k) = b + 2(1-b)b + 3(1-b)^2 b + \ \dots$$

mit $\boldsymbol{b = w^n}$

$$= b(1 + 2a + 3a^2 + \ \dots)$$

mit $a = 1 - b$

$$= \frac{b}{(1-a)^2} = \frac{1}{b} = \underline{\underline{\frac{1}{w^n}}}$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Wie viele Versuche braucht man im Erwartungswert, um n Inlier zu erwischen?

$$E(k) = b + 2(1-b)b + 3(1-b)^2 b + \ \dots$$

mit $b = w^n$

$$= b(1 + 2a + 3a^2 + \ \dots)$$

mit $a = 1 - b$

$$= \frac{b}{(1-a)^2} = \frac{1}{b} = \underline{\underline{\frac{1}{w^n}}}$$

Empfehlung: ?

k sollte etwa gleich $E(k)$ **plus** ein bis zwei $\sigma(k)$ sein.

↑ Standardabweichung der Anzahl erforderlicher Versuche

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$\sigma^2(k) = E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right)$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$\sigma^2(k) = E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right)$$

$$= E(k^2 - 2kE(k) + E(k)^2)$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$\sigma^2(k) = E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right)$$
$$= E(k^2 - 2kE(k) + E(k)^2)$$
$$= E(k^2) - 2E\left(kE(k)\right) + E(k)^2$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$\sigma^2(k) = E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right)$$
$$= E\left(k^2 - 2kE(k) + E(k)^2\right)$$
$$= E(k^2) - 2E\left(kE(k)\right) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - 2E(k)E(k) + E(k)^2$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$\sigma^2(k) = E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right)$$
$$= E(k^2 - 2kE(k) + E(k)^2)$$
$$= E(k^2) - 2E\big(kE(k)\big) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - 2E(k)E(k) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - E(k)^2$$

“expected square minus square expected“

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(k) &= E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right) \\
&= E\left(k^2 - 2kE(k) + E(k)^2\right) \\
&= E(k^2) - 2E\left(kE(k)\right) + E(k)^2 \\
&= E(k^2) - 2E(k)E(k) + E(k)^2 \\
&= E(k^2) - E(k)^2
\end{aligned}
$$

$$E(k^2) =$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$\sigma^2(k) = E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right)$$
$$= E(k^2 - 2kE(k) + E(k)^2)$$
$$= E(k^2) - 2E\left(kE(k)\right) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - 2E(k)E(k) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - E(k)^2$$

$$E(k^2) = b + 4(1-b)b + 9(1-b)^2 b + \ \ldots$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(k) &= E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right) \\
&= E\left(k^2 - 2kE(k) + E(k)^2\right) \\
&= E(k^2) - 2E\left(kE(k)\right) + E(k)^2 \\
&= E(k^2) - 2E(k)E(k) + E(k)^2 \\
&= E(k^2) - E(k)^2
\end{aligned}
$$

$$
E(k^2) = b + 4(1-b)b + 9\underbrace{(1-b)^2}b + \ \ldots
$$

<u>drei</u> Versuche nötig, also $k^2 = 9$

Wahrscheinlichkeit, dass dritter Versuch erfolgreich

Wahrscheinlichkeit, dass zuvor zwei Versuche erfolglos

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$\begin{aligned}
\sigma^2(k) &= E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right) \\
&= E\left(k^2 - 2kE(k) + E(k)^2\right) \\
&= E(k^2) - 2E\left(kE(k)\right) + E(k)^2 \\
&= E(k^2) - 2E(k)E(k) + E(k)^2 \\
&= E(k^2) - E(k)^2
\end{aligned}$$

$$E(k^2) = b + 4(1-b)b + 9(1-b)^2 b + \ \dots = \frac{2-b}{b^2}$$

Analog zu Berechnung von $E(k)$
(wieder über geometrische Reihe)

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$\sigma^2(k) = E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right)$$
$$= E\left(k^2 - 2kE(k) + E(k)^2\right)$$
$$= E(k^2) - 2E\left(kE(k)\right) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - 2E(k)E(k) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - E(k)^2$$

$$E(k^2) = b + 4(1-b)b + 9(1-b)^2 b + \ \dots = \frac{2-b}{b^2}$$

Also:

$$\sigma^2(k) = \frac{2-b}{b^2} - \frac{1}{b^2}$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$\sigma^2(k) = E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right)$$
$$= E(k^2 - 2kE(k) + E(k)^2)$$
$$= E(k^2) - 2E\left(kE(k)\right) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - 2E(k)E(k) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - E(k)^2$$

$$E(k^2) = b + 4(1-b)b + 9(1-b)^2 b + \ \dots = \frac{2-b}{b^2}$$

Also:

$$\sigma^2(k) = \frac{2-b}{b^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1-b}{b^2}$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$\sigma^2(k) = E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right)$$
$$= E(k^2 - 2kE(k) + E(k)^2)$$
$$= E(k^2) - 2E\left(kE(k)\right) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - 2E(k)E(k) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - E(k)^2$$

$$E(k^2) = b + 4(1-b)b + 9(1-b)^2 b + \ \dots = \frac{2-b}{b^2}$$

Also:

$$\sigma^2(k) = \frac{2-b}{b^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1-b}{b^2} = \frac{1-w^n}{w^{2n}}$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$\sigma^2(k) = E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right)$$
$$= E(k^2 - 2kE(k) + E(k)^2)$$
$$= E(k^2) - 2E\left(kE(k)\right) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - 2E(k)E(k) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - E(k)^2$$

$$E(k^2) = b + 4(1-b)b + 9(1-b)^2 b + \ \dots = \frac{2-b}{b^2}$$

Also:

$$\sigma^2(k) = \frac{2-b}{b^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1-b}{b^2} = \frac{1-w^n}{w^{2n}} \Rightarrow \sigma(k) = \frac{\sqrt{1-w^n}}{w^n}$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Varianz der Anzahl erforderlicher Versuche

$$\sigma^2(k) = E\left(\left(k - E(k)\right)^2\right)$$
$$= E(k^2 - 2kE(k) + E(k)^2)$$
$$= E(k^2) - 2E\left(kE(k)\right) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - 2E(k)E(k) + E(k)^2$$
$$= E(k^2) - E(k)^2$$

$$E(k^2) = b + 4(1-b)b + 9(1-b)^2 b + \ \dots = \frac{2-b}{b^2}$$

Also:

$$\sigma^2(k) = \frac{2-b}{b^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1-b}{b^2} = \frac{1-w^n}{w^{2n}} \Rightarrow \sigma(k) = \frac{\sqrt{1-w^n}}{w^n} \approx \frac{1}{w^n} = \underline{\underline{E(k)}}$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Empfehlung:

k sollte etwa gleich $E(k)$ **plus** ein bis zwei $\sigma(k)$ sein.

Standardabweichung der Anzahl erforderlicher Versuche

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Empfehlung:

$E(k) + \sigma(k) \leq k \leq E(k) + 2\,\sigma(k).$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Empfehlung:

$E(k) + \sigma(k) \leq k \leq E(k) + 2\,\sigma(k).$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{2}{w^n} \leq k \leq \frac{3}{w^n}}}$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Empfehlung:

$E(k) + \sigma(k) \leq k \leq E(k) + 2\,\sigma(k).$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{2}{w^n} \leq k \leq \frac{3}{w^n}}}$$

Beobachtung:

Anzahl k der Iterationen hängt nicht von Anzahl $|P|$ der Eingabepunkte ab.

Beispiel:

$w = 0.5$ (das heißt, 50% Outlier)

$n = 2$ (z.B. zwei Punkte, um Linie zu schätzen)

$\Longrightarrow$ **im Erwartungswert 4 Iterationen nötig, Abbruch nach 12 Iterationen sinnvoll**

Wahl der Steuerparameter:

Empfehlung:

$E(k) + \sigma(k) \leq k \leq E(k) + 2\,\sigma(k).$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{2}{w^n} \leq k \leq \frac{3}{w^n}}}$$

Beobachtung:

Anzahl k der Iterationen hängt nicht von Anzahl $|P|$ der Eingabepunkte ab.

Beispiel:

$w = 0.2$ (das heißt, 80% Outlier!)

$n = 3$ (z.B. drei Punkte, um Kreis zu schätzen)

$\Longrightarrow$ **im Erwartungswert 125 Iterationen nötig, Abbruch nach 375 Iterationen sinnvoll**

Wahl der Steuerparameter:

Empfehlung:

$E(k) + \sigma(k) \leq k \leq E(k) + 2\,\sigma(k).$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{2}{w^n} \leq k \leq \frac{3}{w^n}}}$$

Beobachtung:

Anzahl k der Iterationen hängt nicht von Anzahl $|P|$ der Eingabepunkte ab.

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Alternative Empfehlung:

k so wählen, dass mit Wahrscheinlichkeit z eine Menge von n guten Punkten erwischt wird.

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Alternative Empfehlung:

k so wählen, dass mit Wahrscheinlichkeit z eine Menge von n guten Punkten erwischt wird.

$$(1 - b)^k = (1 - z) \qquad \text{mit } b = w^n$$

Annahme:

Wahrscheinlichkeit w: Punkt ist Inlier

Wahl der Steuerparameter:

Alternative Empfehlung:

k so wählen, dass mit Wahrscheinlichkeit z eine Menge von n guten Punkten erwischt wird.

$$(1-b)^k = (1-z) \qquad \text{mit } b = w^n$$

$$\Rightarrow k = \frac{\log(1-z)}{\log(1-b)} = \underline{\underline{\frac{\log(1-z)}{\log(1-w^n)}}}$$

Beispiel:

$w = 0.5$ (das heißt, 50% Outlier)

$n = 2$ (z.B. zwei Punkte, um Gerade zu schätzen)

$z = 0.95$ $\Rightarrow k = 10$

Wahl der Steuerparameter:

Alternative Empfehlung:

k so wählen, dass mit Wahrscheinlichkeit z eine Menge von n guten Punkten erwischt wird.

$$(1-b)^k = (1-z)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\log(1-z)}{\log(1-b)} = \underline{\underline{\frac{\log(1-z)}{\log(1-w^n)}}}$$

Beispiel:

$w = 0.2$ (das heißt, 80% Outlier)

$n = 3$ (z.B. drei Punkte, um Kreis zu schätzen)

$z = 0.95$ $\Rightarrow k = 372$

Wahl der Steuerparameter:

Alternative Empfehlung:

k so wählen, dass mit Wahrscheinlichkeit z eine Menge von n guten Punkten erwischt wird.

$$(1-b)^k = (1-z)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\log(1-z)}{\log(1-b)} = \underline{\underline{\frac{\log(1-z)}{\log(1-w^n)}}}$$

Wahl der Steuerparameter

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Wahl der Steuerparameter

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Ansatz:
Sei y die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt innerhalb der Toleranz eines falschen Modells liegt.

Wahl der Steuerparameter

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Ansatz:

Sei y die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt innerhalb der Toleranz eines falschen Modells liegt.

Dann ist y^{t-n} die Wahrscheinlichkeit, dass ein falsches Modell akzeptiert wird.

Wahl der Steuerparameter

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Ansatz:

Sei y die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt innerhalb der Toleranz eines falschen Modells liegt.

Dann ist y^{t-n} die Wahrscheinlichkeit, dass ein falsches Modell akzeptiert wird.

Annahme: $y < 0.5$

Wahl der Steuerparameter

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Ansatz:

Sei y die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt innerhalb der Toleranz eines falschen Modells liegt.

Dann ist y^{t-n} die Wahrscheinlichkeit, dass ein falsches Modell akzeptiert wird.

Annahme: $y < 0.5$ $\quad \Rightarrow y^{t-n} < 0.05$ für $\underline{\underline{t = n + 5}}$

Überblick I: Algorithmus

for $i = 1$ **to** k **do**

- instanziiere Modell M_i durch Menge S_i zufällig gewählter Punkte aus P
- finde Consensus Set $S_i^* = \{p \in P \mid \text{Abstand von } p \text{ nach } M_i < tolerance\}$
- **if** $|S_i^*| \geq t$ **then**
  - $M_i^* =$ am besten passendes Modell zu S_i^*
  - finde neues Consensus Set für M_i^*
  - **return** am besten passendes Modell für neues Consensus Set

return nil //kein Erfolg!

Steuerparameter:

$tolerance$	Fehlertoleranz für „gute" Punkte (Inlier)
k	Anzahl Iterationen
t	kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

Überblick II: Steuerparameter

$tolerance$ Fehlertoleranz für „gute“ Punkte (Inlier)

$$2\sigma \leq tolerance \leq 3\sigma$$

k Anzahl Iterationen

$$\frac{2}{w^n} \leq k \leq \frac{3}{w^n} \quad \text{oder} \quad k = \frac{\log(1-z)}{\log(1-w^n)}$$

t kleinste Anzahl guter Punkte, bei der Gerade akzeptiert wird

$$t = n + 5$$