Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 12. Juli 2023

Prof. Dr. Alexander Wolff
Felix Klesen, M. Sc.

Probeklausur zur Vorlesung
Algorithmische Graphentheorie

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise!

1. **Personalien:** Bitte tragen Sie Ihre Daten gut lesbar ein.

Name	
Vorname	
Matrikelnummer	
Hauptfach	

2. **Papier:** Tragen Sie Ihre Lösungen direkt unterhalb der Aufgaben ein. Verwenden Sie kein eigenes Papier. Am Ende der Klausur findet sich ein zusätzliches leeres Blatt.

3. Sie dürfen ein einseitig handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit Notizen verwenden. **Weitere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.**

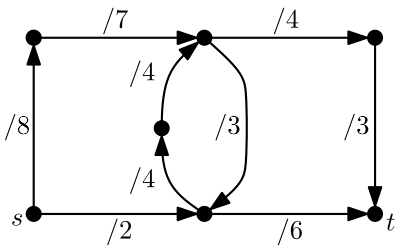
4. **Erwartungshorizont:** Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben, wobei Teilaufgabe 6b) Zusatzpunkte bringt. Es werden auch Teillösungen gewertet. Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

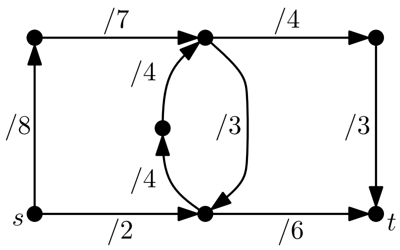
Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

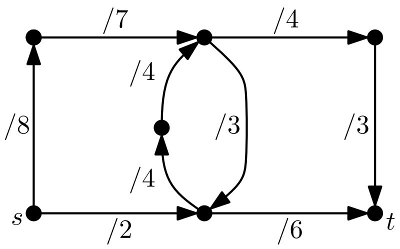
1a		3
1b		2
1c		1
2		4
3a		3
3b		2
4a		2
4b		2
4c		2
5a		2
5b		3
5c		1
6a		3
6b		(5)
		30

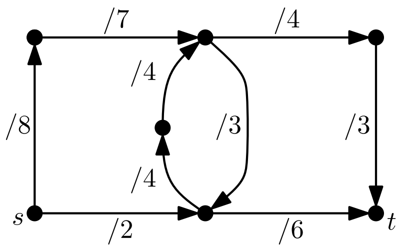
Aufgabe 1 – Flüsse und Schnitte

a) Ermitteln Sie für den angegebenen Graphen einen maximalen s-t-Fluss mit Hilfe des Algorithmus von *Edmonds & Karp*. Geben Sie dabei die Zwischenschritte des Algorithmus an. **3 Punkte**



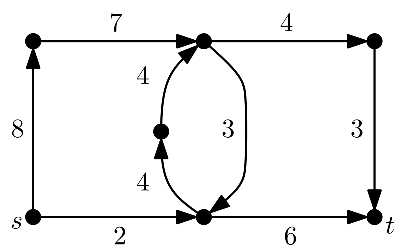






b) Geben Sie den Residualgraphen zu Ihrem maximalen Fluss aus a) an. **2 Punkte**

c) Zeichnen Sie einen minimalen s-t-Schnitt ein. Der minimale s-t-Schnitt hat Wert ______. **1 Punkt**



Aufgabe 2 – Matchings

Zeigen Sie, dass der folgende Greedy-Algorithmus für gewichtsmaximale Matchings eine 1/2-Approximation liefert.

Algorithmus 0: Greedy-Matching (Gewichteter Graph $G = (V, E; w)$)

$M = \emptyset$
while $E \neq \emptyset$ **do**
    $uv = \arg\max\{w(uv) \mid uv \in E\}$
    $M = M \cup \{uv\}$
    $E = E \setminus \{e \in E \mid e$ inzident zu u oder $v\}$
return M

Hinweis: Vergleichen Sie die Kanten in der vom Algorithmus gewählten Reihenfolge mit den Kanten in einer optimalen Lösung. **4 Punkte**

Aufgabe 3 – Wurzelspannbäume

Gegeben sei ein gerichteter, gewichteter, *azyklischer*[1] Graph $G = (V, E; w)$, in dem von einem (unbekanntem) Knoten $s \in V$ aus alle Knoten erreichbar sind. Die Kantengewichte $w\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sind nicht-negativ.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der in $O(V + E)$ Zeit einen minimalen s-Wurzelspannbaum findet, und zeigen Sie, dass Ihr Algorithmus in der geforderten Zeit läuft. **3 Punkte**

b) Konstruieren Sie ein Beispiel, in dem der kürzeste s-t-Pfad für ein $t \in V$ *keine* Kante eines minimalen s-Wurzelspannbaumes enthält.
2 Punkte

[1] d. h. ein Graph ohne gerichtete Kreise

Aufgabe 4 – Lineare Programme

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Geben Sie für die folgenden Probleme jeweils ein lineares Programm an.

a) MAXIMUM INDEPENDENT SET: Gesucht ist eine möglichst große Menge $V' \subseteq V$, so dass für alle $u, v \in V'$ gilt $\{u, v\} \notin E$. **2 Punkte**

b) MINIMUM DOMINATING SET: Gesucht ist eine möglichst kleine Menge $V' \subseteq V$, so dass für jeden Knoten $u \in V$ gilt (i) $u \in V'$ oder (ii) es gibt einen Knoten $v \in V'$, so dass $\{u, v\} \in E$. **2 Punkte**

c) EDGE COLORING: Gesucht ist eine Zuweisung, die jeder Kante der Kantenmenge eine positive natürliche Zahl (*Farbe*) zuordnet, sodass keinem Paar von adjazenten Kanten dieselbe Farbe zugeordnet wird und die größte verwendete Farbe so klein wie möglich ist. **2 Punkte**

Aufgabe 5 – Färbungen

Sei G ein Graph, $\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ hat eine } k\text{-Färbung}\}$ die chromatische Zahl von G und $\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$ die Cliquenzahl von G.

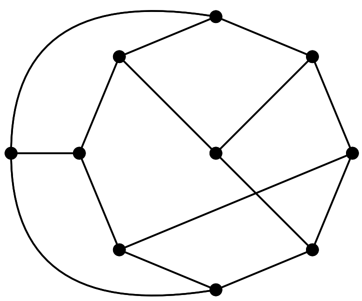
a) Sei $G = K_n - 1$ für ein beliebiges n, d.h. der vollständige Graph K_n, aus dem eine Kante $\{u, v\}$ entfernt wurde. Finden Sie $\chi(G)$ und begründen Sie Ihre Antwort. **2 Punkte**

b) Sei $\Delta(G)$ der Maximalgrad der Knoten in einem beliebigen Graphen G. Beweisen Sie, dass $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. **3 Punkte**

c) Geben Sie ein Beispiel an mit $\omega(G) < \chi(G) = \Delta(G) + 1$. **1 Punkt**

Aufgabe 6 – Planare Graphen

a) Zeigen Sie, dass der folgende Graph *nicht* planar ist. **3 Punkte**



b) Zeigen Sie, dass MAXIMUM INDEPENDENT SET in planaren Graphen festparameterberechenbar ist bezüglich der Kardinalität k der unabhängigen Menge. **5 Zusatzpunkte**