

13. Übungsblatt zur Vorlesung Graphen und diskrete Optimierung Abgabe am 19.07.2023 um 10:00 Uhr

Aufgabe 1. (*Schnittebenen*)**3 Punkte**

Gegeben sei folgendes mathematisches Programm:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. d.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ & 3x_1 + x_2 \leq 7, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Lösen Sie das ILP mit dem Schnittebenen-Verfahren aus der Vorlesung. Benutzen Sie den Simplex-Algorithmus, um die LP-Relaxierungen zu lösen. Zeigen Sie Ihre Schritte!

Aufgabe 2. (*Total Unimodulare Matrizen*)**6 Punkte**

Ein nützliches Kriterium für die totale Unimodularität ist durch den folgenden Satz gegeben:

Satz (Ghouila-Houri)

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist genau dann total unimodular, wenn es für jedes $R \subseteq \{1, \dots, m\}$ eine Partition $R = R_1 \cup R_2$ der Zeilen gibt mit

$$\sum_{i \in R_1} a_{ij} - \sum_{i \in R_2} a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$$

für alle $j = 1, \dots, n$.

Einen Beweis finden Sie in dem Buch ‘Kombinatorische Optimierung’ von Korte & Vygen.

(2.1) Beweisen Sie: Knoten-Kanten-Inzidenzmatrizen sind total unimodular. *Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von Ghouila-Houri und finden Sie eine geeignete Partition. **2 Punkte**

(2.2) Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe (2.1) den Satz vom ganzzahligen Fluss: **2 Punkte**

Satz (Ganzzahligkeitssatz)

Sind alle Kantenkapazitäten eines Graphen $G = (V, E)$ ganzzahlig, so existiert immer ein maximaler Fluss auf G , der ganzzahlig ist.

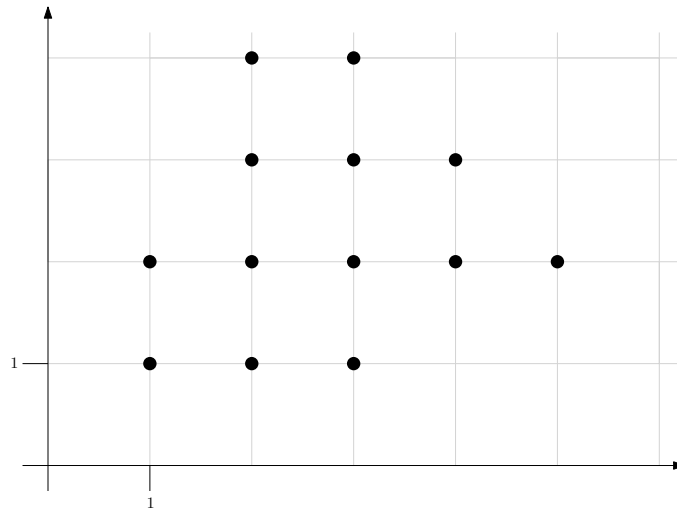
(2.3) Unter welchen Bedingungen existiert ein ganzzahliger minimaler Bedarfsfluss auf einem Netzwerk? **1 Punkt**

(2.4) Ist auch die Nebenbedingungsmatrix vom ILP zum Finden eines minimalen Schnitts total unimodular? **1 Punkt**

Hinweis: Für ein Optimierungsproblem mit zulässigem Bereich $Ax \leq b$ heißt die Matrix A auch *Nebenbedingungsmatrix*.

Aufgabe 3. (Konvexe Mengen)**5 Punkte**

Betrachten Sie folgende Menge $X \subset \mathbb{R}^2$ an ganzzahligen Punkten:



- (3.1) Zeichnen Sie die konvexe Hülle $\text{conv}(X)$ und markieren Sie alle Extrempunkte von $\text{conv}(X)$.
Wie viele Extrempunkte gibt es? **1 Punkt**

Wir bezeichnen eine Menge X als *konvexe Menge*, falls alle Punkte in X als Konvexkombination darstellbar sind. Formal heißt das:

Definition. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt, dass $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$.

- (3.2) Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie: **4 Punkte**

- (a) der Durchschnitt $X \cap Y$ ist eine konvexe Menge.
- (b) die Vereinigung $X \cup Y$ ist eine konvexe Menge.
- (c) das Kartesische Produkt $X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ ist eine konvexe Menge.
- (d) die Summe $X + Y := \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ ist eine konvexe Menge.

Aufgabe 4. (Standortproblem II)**6 Punkte**

Wir betrachten nochmal das Standortproblem (Aufgabe 4) von Übungsblatt 12: es gibt m Kunden welche beliefert werden müssen. Dafür sollen genug neue Lagerhallen errichtet werden, wofür aus einer Menge an n Standorten gewählt werden kann. Jeder potenzielle Standort s kostet k_s jährlich und es fallen jeweils Transportkosten von $c_{s,t}$ für die Lieferung von Standort s zum Kunden t an. Jeder Kunde muss beliefert werden und jede Lagerhalle hat unendlich viel Lagerkapazität.

An welchen Standorten sollen Lagerhallen errichtet werden, damit die Kunden so kostengünstig wie möglich versorgt werden können?

Das dazugehörige ILP lautet:

$$\begin{aligned}
 \min_{x, y} \quad & \sum_{s=1}^n k_s \cdot y_s + \sum_{t=1}^m \sum_{s=1}^n c_{s,t} \cdot x_{s,t} \\
 \text{s. d.} \quad & \sum_{s=1}^n x_{s,t} = 1 \quad \forall t = 1, \dots, m, \\
 & x_{s,t} \leq y_s \quad \forall t = 1, \dots, m, \forall s = 1, \dots, n, \\
 & x_{s,t} \in \{0, 1\} \quad \forall t = 1, \dots, m, \forall s = 1, \dots, n, \\
 & y_s \in \{0, 1\} \quad \forall s = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{1}$$

- (4.1) Beschreiben Sie die Nebenbedingungen in (1) in Ihren eigenen Worten. **1 Punkt**
- (4.2) Durch die Einführung einer großen Konstanten M können wir eine Formulierung (auch *big- M* Formulierung genannt) des ILPs mit weniger Nebenbedingungen erreichen:

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} \quad & \sum_{s=1}^n k_s \cdot y_s + \sum_{t=1}^m \sum_{s=1}^n c_{s,t} \cdot x_{s,t} \\
 \text{s. d.} \quad & \sum_{s=1}^n x_{s,t} = 1 \quad \forall t = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{t=1}^m x_{s,t} \leq M \cdot y_s \quad \forall s = 1, \dots, n, \\
 & x_{s,t} \in \{0, 1\} \quad \forall t = 1, \dots, m, \forall s = 1, \dots, n, \\
 & y_s \in \{0, 1\} \quad \forall s = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2}$$

Beschreiben Sie die neue Nebenbedingung. Wann ist sie aktiv? Welcher Wert für M ist hier ausreichend? **2 Punkte**

- (4.3) Sind die Zulässigkeitsbereiche von (1) und (2) gleich? Begründen Sie Ihre Behauptung. **1 Punkt**
- (4.4) Sind die Zulässigkeitsbereiche der LP-Relaxierungen von (1) und (2) gleich? Begründen Sie Ihre Behauptung. **1 Punkt**
- (4.5) Ist eine der beiden Formulierungen stärker als die andere? Warum oder warum nicht? **1 Punkt**

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf Datei auf WueCampus hoch. Die Übungsblätter können in Gruppen von maximal zwei Personen bearbeitet werden, geben Sie bei der Abgabe stets beide Namen an.