

12. Übungsblatt zur Vorlesung Graphen und diskrete Optimierung

Abgabe am 12.07.2023 um 10:00 Uhr

Aufgabe 1. (*Behälterproblem*)

6 Punkte

Im *Behälterproblem* (auch *Bin Packing Problem* genannt) haben wir n Objekte, die unterschiedlich schwer sind, und einige Behälter, die alle gleich viel Gewicht aufnehmen können. Unser Ziel ist es, die Objekte so in den Behältern zu verstauen, dass die Anzahl der benötigten Behälter minimal ist. Die maximale Kapazität jedes Behälters muss dabei immer eingehalten werden. Das Problem kann wie folgt formuliert werden:

Eingabe: $n \in \mathbb{N}$ Objekte, jeweils mit Gewichten $w_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, \dots, n$, und Behälterkapazität $C \in \mathbb{N}$.

Aufgabe: Bestimme die minimale Anzahl an Behältern $k \in \mathbb{N}$ sodass es eine Zuordnung von Objekten zu Behältern $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ mit $\sum_{f(i)=j} w_i \leq C$ für alle $j = 1, \dots, k$ gibt.

(1.1) Formulieren Sie das Behälterproblem als ganzzahliges, lineares Optimierungsproblem. **2 Punkte**

(1.2) Lösen Sie folgende Instanz des Behälterproblem mit einer Methode Ihrer Wahl. Wie viele Behälter werden für die Optimallösung benötigt? **2 Punkte**

Die Kapazität jedes Behälters beträgt 10 und die Gewichte der Objekte ist wie folgt:

Objekt	a	b	c	d	e	f
Gewicht	4	8	2	9	5	6

(1.3) Entwickeln Sie eine greedy-Strategie, um das Behälterproblem zu lösen, wenn zu Beginn des Berechnungsvorgangs nicht alle Gewichte der Objekte bekannt sind (sondern während der Ausführung laufend ergänzt werden). Dies wird auch *Online-Strategie* genannt. Wie lautet die Laufzeit Ihres Algorithmus'? **1 Punkt**

(1.4) Lösen Sie die Instanz aus Aufgabe (1.2) mit Ihrer greedy-Strategie. Stimmt Ihre Lösung mit der Optimallösung überein? **1 Punkt**

(1.5) **Bonus:** Welche α -Approximationsgüte hat Ihr Algorithmus? **1 Punkt**

Aufgabe 2. (*Branch and Bound I*)

4 Punkte

Gegeben sei folgendes ganzzahliges, lineares Programm:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s. d.} \quad & x_1 + 4x_2 \leq 10, \\ & 3x_1 - 4x_2 \leq 6, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(2.1) Skizzieren Sie den Lösungsraum vom oben gegebenem Problem, den Lösungsraum der LP-Relaxierung und die Zielfunktion. Wie lautet die optimale Lösung der LP-Relaxation? Können Sie eine obere Schranke für die optimale ILP-Lösung angeben? **1 Punkt**

(2.2) Lösen Sie das ILP mit dem Branch and Bound Verfahren. Lösen Sie die LP-Relaxierungen graphisch. Zeigen Sie Ihre Schritte! **3 Punkte**

Aufgabe 3. (*Branch and Bound II*)

3 Punkte

Gegeben sei folgendes ganzzahliges, lineares Programm:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & 4x_1 - x_2 \\ \text{s. d.} \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14, \\ & x_2 + x_4 = 3, \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_5 = 3, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Lösen Sie das ILP mit dem Branch and Bound Verfahren. Geben Sie für jeden Schritt an:

- ob eine obere Schranke gefunden wurde, und wenn ja, wie diese lautet,
- ob eine untere Schranke gefunden wurde, und wenn ja, wie diese lautet,
- ob eine zulässige Lösung gefunden wurde, und wenn ja, wie diese lautet.

Sie dürfen für die LP-Relaxierung einen Solver bzw. eine Methode Ihrer Wahl benutzen.

Aufgabe 4. (*Standortproblem*)

7 Punkte

Eine Hilfsorganisation benötigt mehr Lagerkapazität für ihre Hilfsgüter und möchte dafür eine (oder mehrere) neue Lagerhalle eröffnen. Die Organisation hat drei potenzielle Standorte ausfindig gemacht, die in Frage kommen würden. In der betroffenen Region gibt es bereits fünf Ausgabestellen, die alle von diesem Lager aus versorgt werden müssen.

Jeder Standort s hat jährlich anfallende Kosten k_s (z.B. für die Miete) und kann ein maximales Volumen von M_s lagern. Jede Ausgabestelle t hat einen Bedarf B_t . Für den Transport von Gütern zwischen Standort s und Ausgabestelle t fallen jeweils Transportkosten $c_{s,t}$ an. Sie können annehmen, dass jede Ausgabestelle von jedem der potenziellen Standorte erreichbar ist und dass eine Ausgabestelle von mehreren Lagerhallen aus beliefert werden kann.

Transportkosten $c_{s,t}$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
s_1	4	5	6	8	10
s_2	6	4	3	5	8
s_3	9	7	4	3	4
Bedarf B_t	80	270	250	160	180

	s_1	s_2	s_3
Volumen M_s	300	800	500
Kosten k_s	80	150	100

An welchen Standorten sollte die Hilfsorganisation neue Lagerhallen errichten, damit alle Ausgabestellen versorgt werden können und die Kosten möglichst gering sind? Wie viele Lagerhallen werden benötigt? Welche Ausgabestelle wird von welcher Lagerhalle aus versorgt?

(4.1) Schreiben Sie das Problem als mathematisches Programm auf. Benutzen Sie dafür Variablen y_s um darzustellen, ob ein Standort s errichtet wird und Variablen $x_{s,t}$ um den Bruchteil des Bedarfs darzustellen, den ein Standort s an eine Ausgabestelle t liefert. Ist es ein ganzzahliges, lineares Programm? **2 Punkte**

(4.2) Lösen Sie das Problem mit CPLEX. **2 Punkte**

(4.3) Betrachten Sie nun das Problem, wenn die Lagerkapazitäten an jedem Standort unbeschränkt sind. Dafür können alle M_s auf die selbe, sehr große Zahl M gesetzt werden. Wie verändert sich dadurch die Interpretation Ihres LPs? Was wäre ein guter Wert für M ? **1 Punkt**

- (4.4) Nehmen Sie an, die Variablenbelegung für alle y_s ist bereits gegeben, also dass bereits feststeht, welche Lagerhallen errichtet werden. Beschreiben Sie eine Methode, das verbleibende Teilproblem, also die Zuordnung zwischen Lagerhallen und Ausgabestellen, ohne die Verwendung von CPLEX zu lösen. **1 Punkt**
- (4.5) Auf welchen Variablen, $x_{s,t}$ oder y_s , sollten Sie beim Branch and Bound Verfahren zuerst branchen, um die Optimallösung möglichst schnell zu erreichen? **1 Punkt**

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf Datei auf WueCampus hoch. Die Übungsblätter können in Gruppen von maximal zwei Personen bearbeitet werden, geben Sie bei der Abgabe stets beide Namen an.