Lehrstuhl für Informatik I
Optimierung unter Ressourcenbeschränkung
Universität Würzburg

Prof. Dr. Marie Schmidt
Kendra Reiter, M. Sc.
SS 2023

11. Übungsblatt zur Vorlesung Graphen und diskrete Optimierung

Abgabe am 05.07.2023 um 10:00 Uhr

Aufgabe 1. *(Komplementärer Schlupf)* **3 Punkte**

Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s. d.} \quad & -6x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ & 10x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 76, \\ & 6x_1 - 3x_2 + 8x_3 \geq 50, \\ & x_1 \leq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

(1.1) Stellen Sie das duale Problem (D) zu (P) auf. **1 Punkt**

(1.2) Prüfen Sie mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob der Punkt $x^* = (0, 0, 10)^T$ eine Optimallösung von (P) ist. Wie lautet die Optimallösung zum dualen Problem (D)? **2 Punkte**

Aufgabe 2. *(Ganzzahlige Optimierung)* **6 Punkte**

Gegeben sei folgendes ganzzahliges, lineares Optimierungsproblem (ILP):

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s. d.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2, \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 17, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \tag{1}$$

(2.1) Skizzieren Sie die Nebenbedingungen, das resultierende Polyeder (i.e., den Zulässigkeitsbereich des linearen Programms) und die zulässigen ganzzahligen Lösungen des Optimierungsproblems (1). Lösen Sie die LP-Relaxierung grafisch. **2 Punkte**

(2.2) Wie viele zulässige Lösungen gibt es für das ILP, die einen x_1-Wert im offenen Intervall $(1, 2)$ haben? **1 Punkt**

(2.3) Stellen Sie zwei neue ganzzahlige Programme auf, so dass die Vereinigung ihrer möglichen (ganzzahligen) Punkte die Menge der zulässigen ganzzahligen Lösungen des ursprünglichen ILPs (1) ist. *Hinweis:* benutzen Sie Aufgabe (2.2)! **1 Punkt**

(2.4) Lösen Sie beide ILPs aus Aufgabe (2.3) graphisch. Sind diese Lösungen auch optimal für das jeweils zugehörige (relaxierte) LP? **1 Punkt**

(2.5) Wie können Sie nun die Lösungen der beiden ILPs aus Aufgabe (2.3) nutzen, um das ursprüngliche ganzzahlige Optimierungsproblem (1) zu lösen? **1 Punkt**

Aufgabe 3. *(Total Unimodulare Matrizen)* **5 Punkte**

Definition. Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt *total unimodular (TU)* , wenn jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ die Eigenschaft $\det A' \in \{0, 1, -1\}$ besitzt.

Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. A ist total unimodular
2. $-A$ ist total unimodular
3. A^T ist total unimodular
4. $\begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix}$ ist total unimodular
5. $\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix}$ ist total unimodular
6. $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$ ist total unimodular

Hinweis: I_n ist die n-dimensionale Einheitsmatrix. Eine Matrix A' heißt *Untermatrix* von A, wenn sie durch eine Auswahl gewisser Spalten und Zeilen von A gebildet wird.

Aufgabe 4. *(Robuste Optimierung)* **6 Punkte**

Wir betrachten noch einmal das Optimierungsproblem, einen im schlimmsten Fall kostenoptimalen Bedarfsfluss im Beispiel aus der Vorlesung zu finden. Gegeben sei das Netzwerk für das Bedarfsflussproblem mit Kantenkapazitäten, Bedarfen und Kosten wie auf Slide 12 aus Vorlesung 11 und $\Gamma = 14$.

(4.1) Wir betrachten den zulässigen Bedarfsfluss der durch $\tilde{f}$ gegeben ist. Was sind die Kosten dieses Bedarfsflusses im Szenario, das durch d gegeben ist? **1 Punkt**

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
$\tilde{f}$	18	15	2	3	0	5	12	15	5
d	1	1	1	0	1	2	1	3	2

(4.2) Schreiben Sie das Duale des Optimierungsproblem, die schlimmstmöglichen Kosten für den konkreten Bedarfsfluss $\tilde{f}$ zu finden, aus. **1 Punkt**

(4.3) Bestimmen Sie duale Lösungen und die dazugehörigen unteren Schranken an die maximalen Kosten von Bedarfsfluss $\tilde{f}$, indem Sie den Wert von z schrittweise von 0 erhöhen und für festes z optimale Werte für y_e bestimmen. **2 Punkte**

(4.4) Was ist die Optimallösung des Problems, die schlimmstmöglichen Kosten für den Bedarfsfluss $\tilde{f}$ zu finden, bzw. seines Dualen? Beweisen Sie Ihre Vermutung mit Hilfe des Satzes über starke Dualität. **1 Punkt**

(4.5) Bestimmen Sie mit CPLEX den im schlimmsten Fall kostenminimalen Bedarfsfluss. Was sind die Kosten für diesen Bedarfsfluss im schlimmsten Fall? Was ist der dazugehörige schlimmste Fall? **1 Punkt**

Hinweis: Geben Sie für diese Aufgabe bitte zusätzlich zu der PDF-Abgabe Ihre `.mod` Datei (und ggf. Ihre `.dat` Datei) über WueCampus ab.

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf Datei auf WueCampus hoch. Die Übungsblätter können in Gruppen von maximal zwei Personen bearbeitet werden, geben Sie bei der Abgabe stets beide Namen an.