

10. Übungsblatt zur Vorlesung Graphen und diskrete Optimierung

Abgabe am 28.06.2023 um 10:00 Uhr

Aufgabe 1. (*World Food Programme*)

5 Punkte

Das World Food Programme der Vereinten Nationen ist oft eine der ersten Organisationen die im Katastrophenfall weltweit im Einsatz ist, um die Bevölkerung vor Ort mit Wasser und Nahrung zu versorgen. Durch die begrenzten Transportmöglichkeiten ist Größe und Gewicht der Notfallrationen relevant und sollte möglichst gering gehalten werden, um so viele Menschen wie möglich versorgen zu können. Gleichzeitig sollten die Mahlzeiten besonders nährreich sein, um vor Untergewicht und Mangelernährung zu schützen.

Als Referenzmenge wird davon ausgegangen, dass jeder Erwachsener 2.100 kcal pro Tag benötigt. Außerdem ist die Nährstoffzusammensetzung zwischen Eiweiß, Kohlenhydraten und Fett relevant. Hierfür wird so-genanntes *Ready-to-Use Supplementary Food* (RUSF) eingesetzt, welches speziell für den Katastrophenfall entwickelt wird. Es stehen drei Varianten zur Verfügung:

Kategorie	RUSF 1	RUSF 2	RUSF 3
Gewicht	28g	50g	100g
Energiewert (kcal) pro 100g	440	450	530
Gramm Eiweiß pro 100g	12	15	12
Gramm Kohlenhydrate pro 100g	57	80	48
Gramm Fett pro 100g	15	18	33

Die laut WHO (World Health Organisation) empfohlene Menge an Eiweiß sollte mindestens 8 Prozent des Gesamtgewichts ausmachen. Mindestens 11 Prozent der Ration sollte aus Fett bestehen, wobei diese wiederum 20 Prozent nicht übersteigen sollte. Mindestens 40 Prozent sollten durch Kohlenhydrate abgedeckt werden.

- (1.1) Stellen Sie das Problem, eine Gruppe von 250 Erwachsenen mit Notfallrationen zu versorgen, aus mathematisches Optimierungsproblem auf. **2 Punkte**
- (1.2) Lösen Sie das Problem mithilfe von CPLEX. **2 Punkte**
- (1.3) Passen Sie das Modell geeignet an, um einen möglichen Lebensmittelverlust von 5% beim Transport abzudecken und lösen Sie das Problem mit Hilfe von CPLEX. **1 Punkt**

Aufgabe 2. (*Zwei-Phasen-Simplex*)

2 Punkte

Lösen Sie das folgende lineare Programm mithilfe des 2-Phasensimplex:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & -2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \text{s. d.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 40, \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 10, \\ & -x_2 + x_3 \geq 10, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie Ihre Schritte!

Aufgabe 3. (Dualität)**4 Punkte**

Gegeben sei folgendes lineares Problem

$$\begin{aligned}
\max_x \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s. d.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2, \\
& x_2 + x_4 \leq 1, \\
& x_1 + 2x_3 \leq 1, \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{P}$$

(3.1) Bestimmen Sie das dazugehörige duale lineare Programm (D). **2 Punkte**(3.2) Lösen Sie (P) und (D) mit der Simplex-Methode. Zeigen Sie Ihre Schritte! **2 Punkte****Aufgabe 4. (Bundesfreiwilligendienst)****9 Punkte**

Der Bundesfreiwilligendienst ist ein Angebot an Menschen jedes Alters, sich außerhalb von Beruf und Schule ehrenamtlich zu engagieren – im sozialen, ökologischen und kulturellen Bereich oder im Bereich des Sports, der Integration sowie im Zivil- und Katastrophenschutz (Quelle: <https://www.bundesfreiwilligendienst.de/bundesfreiwilligendienst>).

Sie sind zuständig für die Einteilung von vier neuen Bundesfreiwilligen (auch *Bufris* genannt) in Würzburg: Anna, Ben, Clara und Dennis. Die Tätigkeitsbereiche, die zur Verfügung stehen, sind die KiTa ‘Regenwurm’, die Feuerwehrscheule ‘Brand’, der Naturschutzbund ‘Birke’ und das Musikzentrum ‘Notentreff’. Jede:r Bufrdi soll eingesetzt werden und jede Tätigkeitsstätte soll unterstützt werden.

Aufgrund ihrer Vorkenntnisse und Interessen unterscheidet sich die Einarbeitungszeit (in Stunden) der vier Bufris wie folgt:

Einarbeitungszeit	Regenwurm	Brand	Birke	Notentreff
Anna	9	2	7	8
Ben	6	4	3	7
Clara	5	8	1	8
Dennis	7	6	9	4

Wie sieht die optimale Zuordnung aus, wenn die Einarbeitungszeit insgesamt so gering wie möglich sein soll?

(4.1) Modellieren Sie das Problem als ganzzahliges, lineares Optimierungsproblem basierend auf dem Flussproblem. **2 Punkte**

(4.2) Auf Übungsblatt 4 haben wir folgenden Satz (ohne Beweis) eingeführt:

Satz (Ganzzahligkeitssatz)

Sind alle Kantenkapazitäten eines Graphen $G = (V, E)$ ganzzahlig, so existiert immer ein maximaler Fluss auf G , der ganzzahlig ist.

Zeigen Sie, dass die Ganzzahligkeitsbedingung in Aufgabe (4.1) vernachlässigt werden kann. **1 Punkt**

(4.3) Lösen Sie das Problem mithilfe einer geeigneten Methode. Zeigen Sie Ihre Schritte bzw. laden Sie Ihren CPLEX Code hoch. **2 Punkte**

(4.4) Generalisieren Sie die Formulierung Ihres linearen Programms auf Tätigkeitsstätten $t_1, \dots, t_n$ und Bufris $b_1, \dots, b_m$, mit Einarbeitungszeit $e_{i,j}$ für Bufrdi b_i an Tätigkeitsstätte t_j für alle $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, unter der Annahme dass $m \geq n$ gilt. **1 Punkt**

- (4.5) Zusätzlich zu der Einarbeitungszeit gibt es nun auch anfallende Kosten k_j für jede Tätigkeitsstätte t_j (z.B. für Arbeitskleidung) und ein Stipendium s_i für jede:n Bufdi b_i . Formulieren Sie ein ganzzahliges lineares Programm welches die Zuordnung zwischen Bufdis und Tätigkeit unter den minimalen Kosten modelliert. Jede Tätigkeitsstätte braucht eine:n Bufdi, allerdings kann nun ein:e Bufdi auch an mehreren Tätigkeitsstätten unterstützen, solange das Stipendium alle anfallenden Kosten deckt. **2 Punkte**
- (4.6) Formulieren Sie ein ganzzahliges, lineares Programm welches die Zuordnung zwischen Bufdis und Tätigkeitsstätten optimiert, sodass die maximalen Kosten über alle Bufdi-Tätigkeitsstätte-Paare minimal ist (und jedes Stipendium eingehalten wird). Jede:r Bufdi muss an genau einer Tätigkeitsstätte arbeiten und jede Tätigkeitsstätte braucht genau eine:n Bufdi. **1 Punkt**
- (4.7) **Bonus:** Die Kosten für die vier Tätigkeitsstätten und Stipendien der vier Bufdis sind wie folgt festgelegt:

Bufdi b_i	Anna	Ben	Clara	Dennis
Stipendium s_i	3	4	5	3

Tätigkeitsstätte t_j	Regenwurm	Brand	Birke	Notentreff
Kosten k_j	1	2	3	2

Lösen Sie Ihre linearen Programme aus Aufgaben (4.4) bis (4.6) mithilfe von CPLEX auf den gegebenen Kosten und Stipendien. Laden Sie Ihren Quellcode zusätzlich zur PDF Abgabe auf WueCampus hoch. **2 Punkte**

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf Datei auf WueCampus hoch. Die Übungsblätter können in Gruppen von maximal zwei Personen bearbeitet werden, geben Sie bei der Abgabe stets beide Namen an.