

9. Übungsblatt zur Vorlesung Graphen und diskrete Optimierung

Abgabe am 21.06.2023 um 10:00 Uhr

Aufgabe 1. (*Untersuchung von optimalen Lösungen*)

8 Punkte

Bestimmen Sie für jedes der folgenden mathematischen Programme, mithilfe einer Zeichnung,

- ob das Problem (ganzzahlig) linear ist
- den optimalen Zielfunktionswert
- die Menge der Optimallösungen (Variablenbelegung)

Sie brauchen die Optimalität Ihrer Lösung nicht zu beweisen.

(1.1)

$$\begin{array}{ll}\max_{x,y} & x + 2y \\ \text{s. d.} & 2x + y \leq 16, \\ & -4x + 5y \leq 10, \\ & x - 2y \leq -2, \\ & x, y \geq 0\end{array}$$

(1.3)

$$\begin{array}{ll}\max_{x,y} & 2x - y \\ \text{s. d.} & x - y \leq 1, \\ & -2x - y \leq -6, \\ & x, y \geq 0\end{array}$$

(1.2)

$$\begin{array}{ll}\max_{x,y} & 4x + 2y \\ \text{s. d.} & 2x + y \leq 16, \\ & -4x + 5y \leq 10, \\ & x - 2y \leq -2, \\ & x, y \geq 0\end{array}$$

(1.4)

$$\begin{array}{ll}\max_{x,y} & -200x - 300y \\ \text{s. d.} & -2x - 3y \leq -1200, \\ & x + y \leq 400, \\ & -2x - \frac{3}{2}y \leq -900, \\ & x, y \geq 0\end{array}$$

Aufgabe 2. (*Simplexverfahren*)

4 Punkte

Gegeben Sei folgendes Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll}\max_x & x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s. d.} & x_2 \leq 6, \\ & x_3 \leq 9, \\ & x_1 - x_2 - x_3 \leq 3, \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 24, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

(2.1) Formen Sie das Problem mithilfe von Schlupfvariablen in Normalform um. **1 Punkt**

(2.2) Lösen Sie das Problem mithilfe des Simplexverfahrens. Zeigen Sie Ihre Schritte! **3 Punkte**

Aufgabe 3. (Modellierung von Strombedarf)**5 Punkte**

Ihr regionaler Energieversorger möchte die regenerative Stromgewinnung ausbauen und hat dazu eine Fläche von $1.000.000 m^2$ zur Verfügung. Auf dieser Fläche kann ein Energiemix aus Biomasse, Photovoltaik und Windkraft genutzt bzw. gebaut werden. Natürlich kann auch Strom für einen festen Preis von 25 Cent pro kWh vom Markt gekauft werden.

Pro Tag werden aktuell zusätzliche 4.000 MWh (= 4.000.000 kWh) benötigt. Durch die geltenden Abstandsregeln gibt es pro Energiequelle eine maximale Fläche die genutzt werden kann. Die durchschnittliche Leistung, Kosten im Betrieb sowie Flächenbegrenzungen können Sie folgender Tabelle entnehmen:

Source	Ø Leistung (kWh / m^2)	Kosten (Cent / kWh)	Maximale Fläche (m^2)
Biomasse	4	14,4	1.000.000
Photovoltaik	100	6,6	600.000
Windkraft	40	5,8	40.000

Um auch bei schlechtem Wetter die Grundversorgung der Haushalte zu gewährleisten, sollten mindestens 1.000 MWh (= 1.000.000 kWh) pro Tag aus Biomasse gewonnen werden. Wie viel Fläche sollte für jede Quelle ausgebaut werden um möglichst kostengünstig den Bedarf zu decken?

- (3.1) Stellen Sie das Problem als mathematisches Optimierungsproblem auf. Was ist der zulässige Bereich? Was ist die Zielfunktion? Was sind die Optimierungsvariablen? **2 Punkte**
- (3.2) Lösen Sie das Problem mithilfe von CPLEX. Wie viel Strom sollte aus welcher Energiequelle gewonnen werden? Muss was vom Markt gekauft werden? **2 Punkte**
- (3.3) Wie verändert sich die Modellierung, wenn der Energieversorger nun selber ins Netz einspeist und jede nicht selber benötigte kWh für 19 Cent verkaufen kann? Lösen Sie das Problem mithilfe von CPLEX. **1 Punkt**
- (3.4) **Bonus:** Untersuchen Sie, wie sich das Problem für einen schwankenden Strombedarf verhält, in dem Sie die benötigte Menge an Strom variieren. Probieren Sie mindestens 5 Werte aus. **1 Punkt**

Den aktuellen Energiemix für Würzburg können Sie übrigens über <https://energiemonitor.bayernwerk.de/wuerzburg-landkreis> einsehen.

Hinweis: Geben Sie für diese Aufgabe bitte zusätzlich zu der PDF-Abgabe Ihre .mod Datei über WueCampus ab.

Aufgabe 4. (Optimallösungen)**3 Punkte**

Ein lineares Optimierungsprogramm kann in der *Matrixschreibweise* dargestellt werden, wobei die folgenden beiden Programme äquivalent sind:

$$\begin{array}{ll}
 \min_{x_1, \dots, x_n} & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\
 \text{s. d.} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1, \\
 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2, \\
 & \vdots \\
 & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m, \\
 & x_1, \dots, x_n \geq 0
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{ll}
 \min_{\mathbf{x}} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{s. d.} & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \\
 & \mathbf{x} \geq 0
 \end{array}$$

mit $\mathbf{c}^T = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b}^T = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$.

Sei $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ das in Normalform beschriebene Polyeder, welches durch die $n + m$ Nebenbedingungen eines Optimierungsprogramms definiert ist.

Definition (Extrempunkt). Die Teilmenge $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\} \subseteq \mathbb{R}^n$ (für $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$) wird *Hyperebene* genannt und definiert eine Seite von dem Polyeder P . Die Schnittmenge von n linear unabhängigen Hyperebenen aus der Menge der Hyperebenen $H_1, \dots, H_{m+n}$ welche P definieren wird *Extrempunkt* genannt.

Sei $\text{Rang}(\mathbf{A}) = m$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist ein Extrempunkt von P .
2. $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist ein zulässiger Basisvektor von P .
3. es existiert ein Kostenvektor $c \in \mathbb{R}^n$, sodass $x^* \in \mathbb{R}^n$ die einzige Optimallösung des Problems

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x \\ \text{s. d.} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

ist.

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf Datei auf WueCampus hoch. Die Übungsblätter können in Gruppen von maximal zwei Personen bearbeitet werden, geben Sie bei der Abgabe stets beide Namen an.