

8. Übungsblatt zur Vorlesung Graphen und diskrete Optimierung

Abgabe am 14.06.2023 um 10:00 Uhr

Aufgabe 1. (Färbungsproblem als ILP)

6 Punkte

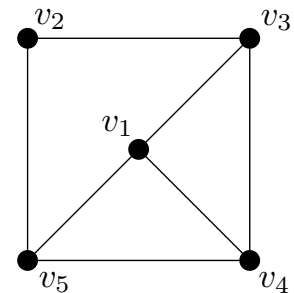
Betrachten Sie folgendes mathematisches Programm:

$$\begin{aligned} \min_y \quad & f(y) = \sum_{k=1}^{|V|} y_k \\ \text{s.d.} \quad & x_{vk} + x_{wk} \leq y_k \quad \forall \{v, w\} \in E, k = 1, \dots, |V|, \\ & x_{vk} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, k = 1, \dots, |V|, \\ & y_k \in \{0, 1\} \quad k = 1, \dots, |V| \end{aligned} \tag{1}$$

Behauptung: das Programm (1) ist ein ganzzahliges, lineares Programm (ILP) welches das Färbungsproblem auf einem gegebenen Graphen $G = (V, E)$ löst, i.e. welches eine minimale Färbung für einen Graphen $G = (V, E)$ findet.

Verifizieren Sie diese Behauptung, in dem Sie folgende Fragen bearbeiten:

- (1.1) Was modellieren die Variablen y und x in (1)? Sind diese ganzzahlig? Welche ist die Optimierungsvariable? **1 Punkt**
- (1.2) Wofür steht die Zielfunktion $f(y)$? Was wird hier minimiert? Ist f linear? **1 Punkt**
- (1.3) Beschreiben Sie die Nebenbedingungen aus (1) in Ihren eigenen Worten. Was wird hier eingeschränkt bzw. gemacht? Sind diese linear? **2 Punkte**
- (1.4) Finden Sie eine optimale Färbung Y auf folgendem Graphen mit geeigneter graphentheoretischer Methode. Formulieren Sie Ihre Lösung als Lösung für das ILP (1) auf dem Beispielgraph. Wie ist der optimale Zielfunktionswert $f(Y)$? Was sind die Werte der Optimierungsvariable? **2 Punkte**



Aufgabe 2. (Modellierung als lineares Programm I)

5 Punkte

Eine Schokoladenfabrik möchte für den Sommer zwei Sondereditionen ihrer Schokoladentafeln herstellen. Beide Tafeln werden aus Schokolade, Früchten und Nüssen in unterschiedlichen Mischverhältnissen gefertigt.

Für die Herstellung von Sonderedition A benötigt man eine Einheit Schokolade, $\frac{3}{2}$ Einheiten Früchte und $\frac{4}{3}$ Einheiten Nüsse. Für Sonderedition B werden eine Einheit Schokolade, $\frac{3}{4}$ Einheiten Früchte sowie $\frac{2}{3}$ Einheiten Nüsse verwendet.

Jeden Monat hat die Fabrik 4 Einheiten Schokolade, 6 Einheiten Früchte und 4 Einheiten Nüsse zur Verfügung. Beide Sondereditionen werden für den selben Preis im Markt verkauft. Wie viele Tafeln der jeweiligen Sondereditionen A und B sollte die Fabrik fertigen, um ihren Profit zu maximieren?

- (2.1) Modellieren Sie das Problem als lineares Programm. Was ist Ihre Zielfunktion und Ihre Optimierungsvariable(n)? Wird hier maxi- oder minimiert? **1 Punkt**
- (2.2) Zeichnen Sie den zulässigen Lösungsbereich und lösen Sie das Problem graphisch. Wie viele Einheiten der Sondereditionen A und B sollte die Fabrik fertigen? **2 Punkte**

- (2.3) Modellieren Sie das Problem in CPLEX. Gibt es eine optimale Lösung? Stimmt diese mit Ihrer Lösung aus (2.2) überein? **2 Punkte**

Hinweis: Geben Sie für diese Aufgabe bitte zusätzlich zu der PDF-Abgabe Ihre .mod Datei über WueCampus ab.

Aufgabe 3. (*Handelsreisendenproblem als ILP*)

6 Punkte

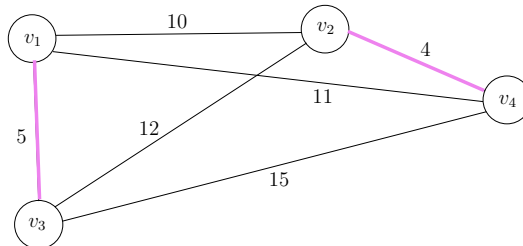
In der Vorlesung wurde folgendes ILP eingeführt und behauptet, dass es das ein-Besuch-TSP auf einer Instanz $G = (V, E)$ mit Kantengewichten w modelliert:

$$\begin{aligned}
 \min_{x_{uv}} \quad & \sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \\
 \text{s.d.} \quad & \sum_{u \in V: \{u,v\} \in E} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V, \\
 & \sum_{u \in V: \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V: \{v,w\} \in E} x_{vw} \quad \forall v \in V, \\
 & x_{uv} \in \{0, 1\}
 \end{aligned} \tag{2}$$

wobei wir die Variable x_{uv} wie folgt definiert haben:

$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (3.1) Formulieren Sie folgenden Beispielgraph aus der Vorlesung als Variablenbelegung für das LP. Verifizieren Sie, ob jede Nebenbedingung in (2) erfüllt ist. **1 Punkt**



- (3.2) Betrachten Sie folgende zusätzliche Bedingung

$$\sum_{u,v \in V'} x_{uv} \leq |V'| - 1 \quad \forall V' \subsetneq V \tag{3}$$

Verifizieren Sie, dass diese Bedingung in dem Beispiel verletzt ist. **1 Punkt**

- (3.3) Was macht die Nebenbedingung (3)? Beschreiben Sie in Ihren eigenen Worten, warum diese Bedingung für das ein-Besuch-TSP notwendig ist. **1 Punkt**
- (3.4) Wir wollen nun beweisen, dass das ILP (2) zusammen mit der Bedingung (3) das ein-Besuch-TSP modelliert. Zeigen Sie hierzu: für jede TSP-Instanz $G = (V, E)$ mit Kantengewichten w gilt:

- Ist K eine TSP-Tour in G (in anderen Worten: K ist ein Kreis der jeden Knoten in V genau einmal besucht) mit Länge $w(K)$, dann gibt es eine zulässige Variablenbelegung X_K für das ILP mit dem Zielfunktionswert $f(X_K) = w(K)$.
- Ist X eine zulässige Variablenbelegung mit Zielfunktionswert $f(X)$, dann gibt es eine zulässige TSP-Tour K_X in G mit $w(K_X) = f(X)$.

3 Punkte

Aufgabe 4. (*Modellierung als lineares Programm II*)

3 Punkte

Modellieren Sie, basierend auf dem ILP für das Handelsreisendenproblem, das Schulbusroutenplanungsproblem als ILP wie wir es in der Vorlesung besprochen haben. Gehen Sie wie folgt vor:

- (4.1) Stellen Sie das Schulbusroutenplanungsproblem mit Schulkindern, zwei Schulbussen (mit unbegrenzter Kapazität an Sitzplätzen), einer Menge an Haltestellen und einer Schule als ‘Grundversion’ auf. Beschreiben Sie die Zielfunktion (in Worten). Wir mini- oder maximiert?

1 Punkt

- (4.2) Fügen Sie Ihrer Modellierung eine Kapazitätsbeschränkung von k Sitzplätzen in den Bussen hinzu. Wie verändern sich die Nebenbedingungen? **1 Punkt**

- (4.3) Fügen Sie Ihrer Modellierung eine zweite Schule hinzu. Es ist im Vorhinein bekannt, welches Schulkind zu welcher Schule gebracht werden muss. Jeder Bus darf jede Schule anfahren. Wie verändern sich die Nebenbedingungen? Ist das Problem weiterhin linear? **1 Punkt**

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf Datei auf WueCampus hoch. Die Übungsblätter können in Gruppen von maximal zwei Personen bearbeitet werden, geben Sie bei der Abgabe stets beide Namen an.